Philos. N. 36.

A. hydr. 36.

Fiche

Mathesis. Statica & mechanica corporum fluidorum. A92.

R

# Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper.

Dargestellt

von

Leonhard Euler.

Uebersezt,

mit einigen Abänderungen und Zusätzen

von

H. W. Brandes.

---

Mit 9 Kupfertafeln.

---

Leipzig 1806
bey Siegfried Lebrecht Crusius.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorrede.

Der gröſsere und wichtigste Theil des Werkes, welches ich hier bekannt mache, ist eine Uebersetzung von 4 Abhandlungen, welche **Euler** im 13., 14., 15. und 16ten Bande der Neuen Commentarien der Petersburgischen Academie der Welt mittheilte. Ich hoffe, daſs die Bemühung, dieses Eulersche Werk durch eine Uebersetzung allgemeiner bekannt zu machen, keiner Entschuldigung bedarf, zumal, da die in demselben vorgetragenen Lehren noch in keinem mir bekannten deutschen Buche so vollständig und zugleich so gründlich vorgetragen sind, als man sie hier findet. Ob aber meine **Bearbeitung** dieses Werkes nicht eine Rechtfertigung nöthig hat, das ist wohl eine andere Frage. Ich will es nur geradezu gestehen, daſs

ich an manchen Stellen mit dem Vortrage unsers grofsen Lehrers etwas willkürlich verfahren bin, und dafs der Titel dieses Buches ganz genau richtig, es eine Uebersetzung mit Abänderungen nennt. Was mich dazu berechtigte oder mich dazu verleitete? — um das vollkommen anzugeben, müfste ich die einzelnen Sätze durchgehen und die Gründe hier mittheilen, welche mich bewogen, hier etwas wegzulassen, dort mehrere §. §. zusammenzuziehen, und an andern Stellen die Folge der Sätze sogar ganz abzuändern: — da dieses nicht möglich ist, so bin ich genöthiget, es dem Leser zu überlassen, zu beurtheilen, wiefern ich hieran Recht gethan habe oder nicht. Meine Absicht ging dahin, nur das wegzulassen, was aller Wahrscheinlichkeit nach Euler selbst in einer jetzt erscheinenden zweiten Auflage weggelassen hätte, oder was von keiner erheblichen Wichtigkeit war, und nur da abzukürzen, wo Eulers zu oft wiederholte Darstellung eines und desselben Satzes mehr die Geduld des Lesers

zu ermüden, als die Deutlichkeit des Vortrages zu befördern schien: — ob ich hierin immer richtig geurtheilt habe, darüber kann ich nicht entscheiden.

Die wichtigste Unannehmlichkeit, welche für den bequemen Leser, ich meine für den, welchem die Prüfung des Gelesenen zu mühsam ist, aus dieser Mischung der Arbeiten des Lehrers und des Schülers entspringt, ist, daſs er nun nicht mit so ruhiger Glaubensfreudigkeit alles als Worte des groſsen Mannes annehmen darf, als in einer ganz getreuen Uebersetzung, denn er ist nirgends sicher, daſs nicht hie und da ein Gedanke des Schülers mit eingemischt ist, auch da, wo der Haupttheil der Gedankenreihe dem Lehrer angehört. Indeſs, in einem mathematischen Werke, wo man alles strenge zu erweisen verspricht, hat es hiemit weniger zu bedeuten, weil man doch im Ganzen annehmen darf, daſs hier weniger als in andern Wissenschaften etwas auf Auctorität angenommen wird; und es ist daher vielleicht ganz

unnöthig, noch besonders die Regel zu geben, daſs man alles mit der prüfenden Aufmerksamkeit lesen möge, welche man einem Buche widmet, in dem man Irrthümer vermuthet.

Das Bisherige betraf nur die kleinen Abänderungen und Zusätze in denjenigen Sätzen, deren Hauptinhalt Eulers Eigenthum ist, es sind aber auſserdem noch einige Zusätze von erheblicherer Gröſse hinzugekommen, welche ich in dem — aus diesem Grunde etwas ins Einzelne gehenden — Inhaltsverzeichnisse mit einem B. bezeichnet habe. Sie enthalten umständlichere Untersuchungen über einige von Eulern nur kurz oder gar nicht erwähnte Lehren, die gleichwohl, nach dem Zwecke des Buchs, hier vollständiger dargestellt zu werden verdienten, und ich hoffe, daſs die Leser wenigstens über die Wichtigkeit der darin abgehandelten Lehren mit mir eines Sinnes seyn werden, selbst wenn ihr Urtheil über den Werth der hier mitgetheilten Untersuchungen weniger günstig ausfallen sollte, als ich

wünschte. — Wo ich bei diesen eigenen Zusätzen andere Schriftsteller benutzt habe, da habe ich es angeführt; sollten die übrigen Untersuchungen, welche ich für neu gehalten, schon anderswo vorkommen, so muſs ich wegen meiner Unkunde der Literatur um Verzeihung bitten.

Daſs übrigens dieses Buch blos Theorie enthält, und fast nichts von practischen Anwendungen, wird bei Manchem keine Empfehlung für dasselbe seyn. Wirklich werden diejenigen, denen die Wissenschaft blos —

*eine trächtige Kuh, die sie mit Butter versorgt,*

— ist, hier wenig finden, was in ihre Scheuren zu sammeln der Mühe werth wäre. Aber dieses liegt zu sehr in der Natur der Sache, als daſs es einer Entschuldigung bedürfte. Die wahre strenge Theorie der Bewegungen des Wassers ist noch viel zu unvollkommen, als daſs man sie auf die — meistens sehr verwickelten Fälle anwenden könnte, die bei Maschinen etc. vorkommen: ja selbst sehr einfache Fälle, z. B.

das Ausfliefsen des Wassers aus sehr weiten Gefäfsen durch enge Oefnungen, lassen sich noch nicht einmal einer in jeder Rücksicht vollkommenen theoretischen Berechnung unterwerfen. So wenig Zweifel es nun auch leidet, dafs diejenigen Schriftsteller allen Dank verdienen, welche empirisch gefundene, aus einzelnen Erfahrungen abgeleitete Formeln zum practischen Gebrauch bekannt machen, so läfst sich doch von der andern Seite auch nicht läugnen, dafs hiebei stehen zu bleiben, sich gänzlich dabei zu beruhigen, nicht rathsam ist. Vielmehr schien es sehr der Mühe werth, einmal den wahren Bestand unserer hydraulischen Kenntnisse klar vor Augen zu legen, das Ungewisse, das Halbwahre, das auf illegitimen Wegen mehr Errathene als Entdeckte zu sondern von dem, was auf sichern Gründen beruht: — und dieses war, dünkt mich, einer der Zwecke, den Euler bei Abfassung dieser Abhandlungen vor Augen hatte. Woher rühren die häufigen, oft mit Bitterkeit erhobenen Klagen über die Fehl-

schlüsse, worauf die Theorie führen sollte, als vorzüglich daher, weil man für strenge erwiesen und für allgemein wahr hielt, was nur in beschränkten Fällen genau richtig, und allenfalls in andern halb oder beinahe richtig war.

Es ist schon oft gesagt worden, daſs die Astronomie andern Wissenschaften zum Vorbilde dienen kann, und wann fing diese an, groſse Fortschritte zu machen? — Erst da, als man das Gewirre der Ptolomäischen Epicyclen bei Seite legte, und einen festen Grund gewann, auf dem man weiter fortbauen konnte. — Die hydraulischen Formeln mancher unsrer jetzigen Schriftsteller gleichen noch zu sehr den Epicyclen der Ptolomäer, denen man bei jeder neuen Entdeckung einen neuen Kreis — oder ein neues Glied der Gleichung hinzuzufügen genöthigt ist, um sie nur für einige wenige Erfahrungen passend zu machen. — Etwas von diesen empirischen Correctionen wird zwar in einer so schwierigen Wissenschaft, wie die von der Bewegung des Wassers ist, immer Be-

dürfnifs bleiben, aber es wäre zu wünschen, dafs nur Männer, auf denen Tobias Mayers oder Lamberts Geist ruht, die Formeln für diese Correctionen entwerfen möchten — und solche Männer würden auch nie mit Bitterkeit darüber klagen, dafs die Theorie der Hydraulik, so wie alle menschlichen Kenntnisse, langsam zum Ziele fortschreitet, und erst spät zu der Vollkommenheit gelangen kann, zu welcher allenfalls unsre Wünsche sich aufzuschwingen, aber welche herbeizuführen unsere Kräfte nicht vermögen.

Eckwarden, im Herzogthum Oldenburg, im Februar 1805.

*H. W. Brandes.*

# Inhalt.

## Erster Theil.

### Die Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper.

#### Erster Abschnitt.

*Von den wesentlichen Eigenschaften flüssiger Körper und den besondern Eigenschaften der beiden Hauptarten.* S. 1 — 21.

§. 1. 2. Von der gleichförmigen Verbreitung des Druckes in flüssigen Körpern beim Gleichgewichte.
3. Abmessung des Druckes durch das Gewicht einer Säule, deren Basis der gedrückten Fläche gleich ist.
4. Der flüssige Körper wird hier als der Schwere nicht unterworfen betrachtet.
5. 6. Fernere Erläuterungen. — Erklärung einiger anscheinend paradoxen Folgerungen.
7. 8. Diese gleichförmige Verbreitung des Drucks ist die charakteristische Eigenschaft flüssiger Körper, und es lassen sich aus derselben alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper herleiten.
9. Eintheilung der flüssigen Körper in solche, die sich zusammenpressen lassen, und solche, bei denen dieses nicht Statt findet.
12 — 14. Wie Dichtigkeit und Druck bei der Luft von einander abhängen? Hypothese für die Abhängigkeit der Dichtigkeit vom Drucke, und daraus hergeleitete Erläuterungen.
15. 16. Ueber die Gränzen der Dichtigkeit der Luft.
17. Von dem Drucke, welchen gänzlich eingeschlossene Luft ausübt.
18. Wirkung der Wärme auf flüssige Körper.
19 — 21. Die Dichtigkeit als Function der Wärme und des Druckes dargestellt.
22. Beschränkung der Formel auf die gewöhnlich vorkommenden Fälle. (Anm. Wiefern die Formel der Erfahrung gemäſs ist? — B.)

## Zweiter Abschnitt.

*Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, welche der Schwere und ähnlichen Kräften nicht unterworfen sind. S. 22—31.*

24 Lehrs. Ein Körper, dessen Oberfläche in allen ihren Punkten von gleich grofsen Kräften senkrecht gedrückt wird, bleibt im Gleichgewichte.

25. Erläuterung (B.).

27. 28. Anwendung des Satzes §. 24. auf das Gleichgewicht flüssiger Körper und der darin eingetauchten festen Körper etc.

29. Wirkung der auf den Kolben wirkenden Kraft auf das ganze Gefäfs.

30. Unterschied innerer und äufserer Kräfte.

31. Betrachtung des Falles, da das Fluidum gar keinen Druck leidet.

32. Probl. 1. Ein unelastisches Fluidum wird durch eine äufsere Kraft gedrückt; man sucht den Druck, den die Wände des Gefäfses leiden etc.

33. 34. Folgerungen. — Warum die Erfahrung diesen Sätzen zu widersprechen scheint.

35. Probl. 2. Ein elastisches Fluidum leidet einen äufsern Druck, man soll jedes Theilchens Dichtigkeit und den Druck, den es aushält, bestimmen.

37. Bestimmung der ganzen Masse des flüssigen Körpers.

38. Ueber die Abmessung der Dichtigkeiten und der Wärme.

## Dritter Abschnitt.

*Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper, auf welche beschleunigende Kräfte wirken. S. 32—45.*

39. Probl. 3. Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts, wenn beschleunigende Kräfte auf das Fluidum wirken.

40—43. Folgerungen. — Begrif der äufsersten oder freien Oberflächen.

44. Ob der Druck negativ werden kann?

45. Kräfte, für welche die Integralformel möglich wird.

45b. Allgemeinere Bestimmung von Fällen, wo diese Integrabilität Statt findet (B.).

45 c. Vergleichung unserer Formel mit Maupertuis Wirkung der Kräfte.

46. Probl. 4. Bestimmung des Druckes auf einen untergetauchten festen Körper.
50. Probl. 5. Bestimmung des Druckes auf einen blos zum Theil eingetauchten festen Körper.
52. Wie man die Kräfte bestimmt, welche angebracht werden müssen, um den eingetauchten Körper in Ruhe zu erhalten.
53. Probl. 6. Bestimmung des Druckes, welchen das ganze Gefäfs leidet.
55. Wie dieser Druck sich ändert, wenn das Gefäfs eine mit einem Kolben verschlossene Oefnung hat?

## Vierter Abschnitt.

*Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, auf welche blos die Schwere wirkt. S. 45—69.*

56. Probl. 7. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn blos die Schwere auf den flüssigen Körper wirkt.
57. Allgemeine Bedingung für die Dichtigkeit, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.
59. Probl. 8. Bestimmung des Drucks, welchen ein homogenes unelastisches Fluidum ausübt.
60. 61. Folgerungen.
63. Probl. 9. Bestimmung des Druckes für ein gemischtes unelastisches Fluidum.
64. Nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht.
65. 66. Unmöglichkeit des Gleichgewichts, wenn ein homogenes Fluidum an verschiedenen Stellen derselben horizontalen Schichte ungleich erwärmt ist.
67. Probl. 10. Den Druck zu bestimmen, welchen ein homogenes, überall gleich erwärmtes elastisches Fluidum ausübt.
68. Wie hoch die Atmosphäre sich nach diesen Voraussetzungen erstreckt.
70. Probl. 11. Das vorige Problem unter der Voraussetzung einer ungleichen Temperatur aufgelöst, wenn die Wärme eine gegebene Function der Höhe ist.
71. Wie die Wärme auch bei einer gleichförmigen Temperatur in den Formeln vorkommt (B.).
72. Auflösung des Falles, da die Wärmescale eine gerade Linie ist. Erläuterung einiger auffallend scheinender Folgerungen (B.).
73. Der Fall, dafs wenigstens ein Theil der Wärmescale als beinahe gerade kann betrachtet werden (B.).
74. Formeln für eine logarithmische Wärmescale.

75. Anwendung auf die barometrischen Höhenmessungen. Wie die Formel Deluc's mit den Resultaten dieser Untersuchungen übereinstimmt (B.).

(Hier sind einige Untersuchungen, welche Euler anstellt, weggelassen, wo er nämlich Formeln für die Dichtigkeit der Luft annimmt, welche endliche Gränzen der Dichtigkeit angeben, und zugleich von der Wärme abhängen. Man hat im 67. und 68. §. gesehen, daſs diese Voraussetzungen zu keinen sichern Resultaten führen.)

76. Probl. 12. Ungefähre Bestimmung der Bewegung, welche entsteht, wenn die Wärme in einerlei Höhe ungleich ist.

77 — 79. Erklärung einiger bekannten Erscheinungen aus dieser ungleichen Erwärmung der Luft.

## Fünfter Abschnitt.

*Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, worauf Centralkräfte wirken. S. 69 — 95.*

80. Probl. 13. Bedingungen des Gleichgewichts, wenn das Fluidum durch beschleunigende Kräfte gegen einen Mittelpunkt zu getrieben wird.

81. Figur der äquilibrirenden Schichten.

82. Vergleichung des Druckes, den jedes Theilchen leidet, mit dem Gewichte der darüber stehenden Säule des Flüssigen.

83. Ueber den Druck, welchen eingetauchte Körper leiden.

84. Bestimmung der Bewegung, welche entsteht, wenn in derselben concentrischen Schichte die Dichtigkeit ungleich ist.

86. Probl. 14. Bedingungen des Gleichgewichts, wenn mehrere Centralkräfte gegen verschiedene Mittelpunkte zu wirken.

87. 88. Bestimmung der äquilibrirenden Schichten.

89. Ueber die Wirkung der Kräfte.

91. Was für beschleunigende Kräfte auf die flüssigen Körper auf der Erde wirken.

92. Probl. 15. Auſser der Centripetalkraft wirkt auf jedes Theilchen eine von einer festen Axe senkrecht zurückstoſsende Kraft, man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts.

93. 94. Bestimmung der Figur der Erde.

94 b. Ob diese Bestimmung anders ausfällt, wenn man auf die Abnahme der Schwere in gröſsern Entfernungen vom Centro Rücksicht nimmt? (B.)

95. 95 b. Bestimmung des Druckes der Luft in verschiedenen Höhen (B.).

95 c. 95 d. Ob die barometrischen Höhenmessungen wegen der sphäroidischen Gestalt der Luftschichten eine Correction erfordern? (B.)
96. Gründe, warum die hier mitgetheilte Bestimmung der Figur der Erde nicht genau ist.
97. Probl. 16. Bedingungen des Gleichgewichts des Meers und der Atmosphäre, wenn ein anderer Weltkörper anziehend auf dieselben wirkt.
98. Berechnung der aus der Attraction des Mondes und der Sonne entspringenden Fluthen des Oceans.
99. Einflufs der Sonne und des Mondes auf den Druck, welchen die Luft ausübt.
100. Einfluls auf den Barometerstand, wenn man die Verminderung der Schwere des Quecksilbers durch jene Attraction in Betrachtung zieht (B.).

## Sechster Abschnitt.

*Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, deren Theilchen sich gegenseitig anziehen, und auf welche aufserdem andere beschleunigende Kräfte wirken. S. 95—114.*

[Gröfstentheils nach Laplace (B.)].

104. 105. Differentialformeln für die Attraction eines solchen Körpers.
106—108. Umformung und erste Integration derselben.
109. Anwendung auf ein durch Umdrehung entstandnes Sphäroid.
110. 111. 112. Fernere Integration der auf das Sphäroid angewandten Gleichungen.
113. Gröfse der Attraction am Pole des Sphäroids.
114. Anwendung auf die Kugel.
115. Probl. 17. Ein flüssiges Sphäroid dreht sich mit gegebner Geschwindigkeit um seine geometrische Umdrehungsaxe, man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht bestehen kann.
116. Bestimmung der Abplattung der Erde nach dieser Hypothese.
117. In welchem Falle die Kugelgestalt bestehen kann.
118. Form der übrigen äquilibrirenden Schichten.
119. Bestimmung des Druckes.
120. 121. Ob dieser Druck sich mit dem Gewichte der oberhalb stehenden Säule vergleichen läfst?
122. Gleichung für die Trajectorie aller elliptischen Schichten.
123. Der Druck in jedem Punkte ist gleich dem Gewichte der darüber stehenden, nach der Richtung der Trajectorie gekrümmten Säule.
124. Wie weit die wirkliche Gestalt der Erde diesen Theorien gemäfs ist.

# Zweiter Theil.

## Die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

### *Erste Abtheilung.*

### Allgemeine Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

### Erster Abschnitt.

*Betrachtung der Bewegung flüssiger Körper im Allgemeinen. S. 114 — 134.*

125. Probl. 18. Man soll diejenigen Gröſsen angeben, welche zur Kenntniſs des Zustandes eines bewegten flüssigen Körpers für jeden Zeitpunkt nothwendig sind.
126. Die beschleunigenden Kräfte und das Gesetz, wie Dichtigkeit und Druck von einander abhängen, sind gewöhnlich gegeben.
127. Bedeutung der partiellen Differentiale jener Gröſsen.
128. Bedingung, welche bei der Bewegung flüssiger Körper Statt findet.
129. Wiefern es wahr ist, daſs die angegebnen Gröſsen zur Bestimmung der Bewegung hinreichen?
130. Probl. 19. Allgemeine Ausdrücke für das Fortrücken eines kleinen Theilchens des Flüssigen.
131. 132. Nähere Bestimmung der Figur, welche dieses Theilchen während der Bewegung erlangt hat, in allgemeinen Formeln.
133. Anwendung der Differentialformeln auf feste Körper.
134. Probl. 20. Bestimmung der Dichtigkeit aus der Aenderung des Volumens jedes Theilchens.
136. Probl. 21. Formeln für die Beschleunigung jedes Theilchens.
138. Warum die Formeln hier weniger einfach sind, als bei festen Körpern.
139. Probl. 22. Eine Gleichung zwischen der Dichtigkeit und den drei Geschwindigkeiten zu finden.
141 — 143. Integrale, welche jener Differentialgleichung Genüge thun.

### Zweiter Abschnitt.

*Allgemeine Gesetze der Bewegung flüssiger Körper, auf welche beschleunigende Kräfte wirken. S. 134 — 149.*

144. Probl. 23. Aus den beschleunigenden Kräften, welche auf das Fluidum wirken, und dem Drucke, den jedes Theilchen leidet, die Kraft zu finden, welche dasselbe zur Bewegung antreibt.

146. Ob die Betrachtung eines parallelepipedischen Theilchens hier zureichend sey?
147. Probl. 24. Die Hauptgleichungen für die Bewegung flüssiger Körper.
148—150. Ob diese Gleichungen hinreichen, um alle unbekannten Gröfsen zu bestimmen? u. s. w.
151. Probl. 25. Einfachere Darstellung jener Gleichungen.
152. Die beiden Hauptgleichungen, welche die ganze Theorie der Hydraulik in sich fassen.
154. 155. Bedingungen, welche jene Gleichungen beschränken.
156. Probl. 26. Integration der ersten Hauptgleichung.
157. Beweis für die Richtigkeit dieses Integrals.

## Dritter Abschnitt.

*Anwendung der Formeln auf den Fall, da die Dichtigkeit eine beständige Gröfse ist. S. 149 — 165.*

159. Probl. 27. Bestimmung der allgemeinen Formeln für diesen Fall.
161. Ein besonderer Fall, wo die Gleichungen integrabel sind.
162. Probl. 28. Wenn die Geschwindigkeit jedes Theilchens = o ist, den Druck zu bestimmen.
163. Warum hier eine unbestimmte Function der Zeit vorkommt?
164. Diese Function ist nicht an das Gesetz der Stetigkeit gebunden.
166. Anwendung dieses Problems auf Fluida, deren Dichtigkeit nicht überall und immer gleich ist (B.).
168. Probl. 29. Alle Theilchen des flüssigen Körpers gehen nach parallelen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort, man sucht den Druck, den jedes Theilchen leidet.
169. Wann eine solche Bewegung möglich ist.
170. Probl. 30. Die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ sind blos von der Zeit abhängig, man soll den Druck bestimmen.
172. Der Druck ist hier wegen der Ungleichförmigkeit der Bewegung veränderlich, wenn auch die beschleunigenden Kräfte und der Druck von aufsen derselbe bleibt.
174. Probl. 31. Wenn die drei Geschwindigkeiten immerfort für jedes Theilchen ein beständiges Verhältnifs haben, die Bedingungen der Bewegung zu bestimmen, wenn zugleich beschleunigende Kräfte auf das Fluidum wirken
175. 176. Ueber die Bewegung der Flüsse.
177. Probl. 32. Wenn $u = \alpha s + \Gamma : t$, $v = \beta s + \Delta : t$ und $w = \gamma s + \Sigma : t$ die Bedingungen der Bewegung anzugeben etc.
179. Anwendung auf horizontal fortströmende Flüsse.
179 b. Anmerkungen (B.)

## Vierter Abschnitt.

*Von der Umdrehungsbewegung flüssiger Körper, deren Dichtigkeit unveränderlich ist.* S. 165 — 179.

180. Probl. 33. Ein flüssiger Körper dreht sich um eine feste Axe, so daſs die Bewegung jedes Theilchens gleichförmig und die Geschwindigkeit eine Function des Abstandes von der Axe ist, man fragt, ob diese Bewegung bestehen könne.

181. Anwendung auf bestimmte Fälle.

185. Nähere Betrachtung einzelner Fälle, wenn blos die Schwere wirkt, und die Umdrehungsaxe vertical ist. — — §. 186. wenn die Axe horizontal ist.

186 b. Bestimmung der beständigen Gröſse, und der Gestalt der Schichten, in welchen der Druck gleich groſs ist (B.).

187. Anwendung auf den Fall, daſs gar keine beschleunigende Kräfte auf den flüssigen Körper wirken. Bestimmung der beständigen Gröſse (B.).

188. Probl. 34. Allgemeinere Darstellung des vorigen Problems.

## Fünfter Abschnitt.

*Von denjenigen Fällen der Bewegung flüssiger Körper, wo die Formel* $udx + vdy + wdz$ *integrabel ist.*

S. 179 — 235.

191. Vorerinnerungen.

192. Probl. 35. Die Gleichung für den Druck anzugeben, wenn die Formel $udx + vdy + wdz$ für sich integrabel ist.

194. Ob die Voraussetzung nothwendig ist, daſs $udx + vdy + wdz$ für sich integrabel sey?

195. Probl. 36. Die Fälle zu bestimmen, da bei der Integrabilität jener Formel auch der ersten Gleichung für die Bewegung flüssiger Körper Genüge geschieht.

196. Eine Integralformel, welche beiden Gleichungen Genüge thut, aber von sehr beschränktem Umfange ist.

197. Auffallende Resultate, auf welche die Anwendung dieser Formel führen kann. – Ob dieses der Formel zum Vorwurf gereicht? (B.)

199. Lehrs. Probl. Das vollständige Integral der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right) = 0$$

zu bestimmen (B.); (nach d'Alembert und Cousin).

200. Probl. 37. Formeln für die Bewegung eines flüssigen Körpers, wenn $V = 0$ ist (B.).
201. Anwendung dieser Formeln auf den Fall, da zugleich $u\,dx + w\,dz$ ein vollständiges Differential ist (B.).
202. Probl. 38. Integration der Gleichung des vorigen Problems, wenn zugleich $u\,dx + w\,dz$ ein vollständiges Differential ist (B.).
203. Vervollständigung dieser Integralwerthe (B.).
205. Probl. 39. Aus der Gestalt des Gefäſses zu bestimmen, wie die beiden unbestimmten Functionen, durch welche $u$ und $w$ ausgedrückt sind, von einander abhängen (B.).
206. 1. Exemp. Das Fluidum bewegt sich über einen ebenen horizontalen Boden (B.).
208. 2. Exemp. Der Boden ist eben und gegen den Horizont geneigt (B.).
209. 3. Exemp. Der flüssige Körper bewegt sich in einem horizontalen cylindrischen Canale, so daſs jedes Theilchen in einer mit der Axe parallelen Ebene fortrückt (B.).
210. 4. Exemp. Der flüssige bewegt sich in einem cylindrischen Gefäſse; jedes Theilchen bewegt sich in einer auf die Axe senkrechten Ebene (B.).
211. Verwandlung der Functionen in Reihen (B.).
212. Probl. 40. Die Gleichungen für die Bewegung eines Fluidi zu bestimmen, welches in einem cylindrischen Gefäſse eingeschlossen ist, wenn die Theilchen in Ebenen fortgehen, die auf des Cylinders Axe senkrecht sind, und zugleich jedes Theilchen immer in einerlei Entfernung von der Axe bleibt (B.).
213. Probl. 41. Wenn das Fluidum über einen ebenen horizontalen Boden hinflieſst, aus der Gestalt der Oberfläche die Form der unbestimmten Functionen zu bestimmen (B.).
213b. Wenn die Oberfläche eine freie Oberfläche seyn kann? (B.)
213c. Eine Reihe, welche ausdrückt, wie die Function $F:x$ von $x$ abhängt (B.).
213d. 1tes Exemp. Die Oberfläche sey eine horizontale Ebene (B.).
213e. f. 2tes Exemp. Die Oberfläche sey eine gleichseitige Hyperbel (B.).
213g. Wie auch andre Umstände zu näherer, wenn auch nicht völliger Bestimmung der Function $F$ dienen (B.).
213h. Einleitung zum Folgenden.
214. Probl. 42. Die Umstände der Bewegung zu bestimmen, wenn alle Theilchen auf denjenigen Linien fortrücken, in welchen der Druck gleich groſs ist (B.).
214b. c. Erläuterungen. — Die cycloidische Bewegung ist die einzige, wo diese Voraussetzung Statt findet (B.).

214 d. Bestimmung der Zeit, in welcher die Wassertheilchen über eine Welle hinfliefsen etc. (B.).

214 e. Ob diese Theorie der Wellen völlig befriedigend ist?

215 — 215 d. Ueber die Integration der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 I}{d x^2}\right)+\left(\frac{d^2 I}{d y^2}\right)+\left(\frac{d^2 I}{d z^2}\right) = 0 \text{ (B.)}.$$

215 e. Die Formel $u dx + v dy + w dz$ ist während der ganzen Bewegung für sich integrabel, wenn sie es in einem gegebnen Augenblicke ist (B.).

## Sechster Abschnitt.

### *Von der Bestimmung der Bewegung flüssiger Körper aus ihrem anfänglichen Zustande. S. 235 — 259.*

216. Probl. 43. Die veränderlichen Gröfsen anzugeben, von denen hier die Bestimmung der Bewegung abhängt.

218. Probl. 44. Aus der anfänglichen Dichtigkeit zu bestimmen, welche Dichtigkeit dasselbe Theilchen erlangt hat, wenn es bis zu einem gegebnen Punkte fortgerückt ist.

223. Probl. 45. Die Lage zweier sehr nahe bei einander befindlicher Theilchen ist für das Ende der Zeit $t$ gegeben, nebst der anfänglichen Lage des einen — zu bestimmen, wo das andre sich anfangs befand.

225. Probl. 46. Wenn beschleunigende Kräfte auf das Fluidum wirken, eine Gleichung für den Druck zu finden.

227. Leichtere Auflösung.

(Die §. 218 — 227. sind anders geordnet, als bei Euler, wozu Euler selbst Anleitung gibt.)

228. Probl. 47. Der anfängliche Zustand des flüssigen Körpers und die auf ihn wirkenden Kräfte sind gegeben: man sucht alle Umstände der Bewegung zu bestimmen.

232. Anwendung auf die parallele Bewegung.

232 b. In welchen Fällen die parallele Bewegung, auch wenn $\varrho$ veränderlich ist, bestehen kann? (B.)

233. Anwendung auf den Fall, da die drei Geschwindigkeiten ein beständiges Verhältnifs haben (B.).

234. Anwendung auf die drehende Bewegung. — Wie hier bei heterogenen Fluidis die Schichten sich ordnen (B.).

## *Zweite Abtheilung.*

## Anwendung der allgemeinen Formeln auf die linearische Bewegung flüssiger Körper, besonders des Wassers.

### Erster Abschnitt.

### *Von den Principien der linearischen Bewegung flüssiger Körper. S. 259 — 278.*

236. 237. Was man unter linearischer Bewegung versteht.

241. Probl. 48. Die Gleichungen für die Bewegung in einer geraden Röhre nach der ersten Methode der vorigen Abtheilung anzugeben.

244. Vergleichung mit den allgemeinen Formeln.

245. Probl. 49. In eben dem Falle die Bewegung aus dem anfänglichen Zustande zu bestimmen.

247. Probl. 50. Die Bewegung des flüssigen Körpers in einer einfach gekrümmten Röhre nach der ersten Methode bestimmt.

248. Erläuterungen (B.).

252. Probl. 51. Das vorige Problem nach der zweiten Methode aufgelöst.

254. 255. Probl. 52. 53. Bestimmung der Bewegung in einer doppelt gekrümmten Röhre nach beiden Methoden.

### Zweiter Abschnitt.

### *Von der Bewegung des Wassers in Röhren, welche überall gleich weit sind. S. 278 — 309.*

257. Probl. 54. Allgemeine Formeln für die Bewegung des Wassers in Röhren, die überall gleich weit sind.

261. Probl. 55. Nähere Bestimmung dieser Gleichungen durch die Kräfte, welche auf beide Enden der Wassermasse drücken, wenn diese, ohne auszufliefsen, in der Röhre fortrückt.

262. Wenn diese Kräfte verschwinden, oder beide gleich sind.

263. 1tes Exemp. Bewegung in einer geraden Röhre, wenn die Atmosphäre auf die Wassermasse drückt.

264. 2tes Exemp. Das Wasser bewegt sich oscillirend in einer Röhre mit geraden cylindrischen Schenkeln, und der Druck $M$, $N$ ist unveränderlich.

(Die §§. 264 — 268. sind etwas verändert, weil die beiden Exempel, die Euler angibt, sich in diesem allgemeinern vereinigen lassen: bei Eulers Beispielen ist auch das unangenehm, daſs er Röhren mit winklichten Beugungen annimmt, da man doch alle Differentialformeln nur da anwenden kann, wo das Gesetz der Stetigkeit Statt findet.)

268 b. 3tes Exemp. Das Wasser bewegt sich in einer Röhre mit geraden verticalen Schenkeln, der äuſsere Druck ist veränderlich (B.).

268 c. 4tes Exemp. Bestimmung der Oscillationen in einer cycloidischen Röhre (B.).

269. Problem 56. Bestimmung der Bewegung, wenn das Wasser an einem Ende ausflieſst, und kein neuer Zufluſs Statt findet.

271. 272. Beispiele an einer geraden Röhre. 273. an einer rechtwinklicht gebogenen Röhre. 274. an einer geraden, oben luftleeren Röhre.

275. Probl. 57. Bestimmung der Bewegung, wenn das ausflieſsende Wasser durch immer neuen Zufluſs ersetzt wird.

277. Wie hier die Kraft, welche das Wasser in die Röhre treibt, aus andern Umständen bestimmt wird.

278. 279. Bestimmung des Effects und des gröſsten Effects einer bewegenden Kraft.

280. Probl. 58. Wie eine Maschine eingerichtet seyn muſs, um die gröſste Quantität Wasser zu heben? — die Wirkungsart der angebrachten Kraft wird als bekannt angenommen.

## Dritter Abschnitt.

*Von der Bewegung des Wassers in Röhren von ungleicher Weite.* S. 309 — 349.

283. Probl. 59. Gesetze dieser Bewegung, wenn das Wasser blos in der Röhre fortflieſst, ohne auszuflieſsen, und auf beide Enden gegebne Kräfte drücken.

285. Integralformel für $v$.

286. Wie dieser Ausdruck mit der lebendigen Kraft der Wassermasse zusammenhängt.

287. 1tes Exemp. Das Wasser bewegt sich in einer verticalen conischen Röhre: auf beide Enden drückt die Atmosphäre.

288. 2tes Exemp. Die Bewegung findet in eben der Röhre Statt, aber der obere Raum ist luftleer (mit einigen Zus. B.).

289. 3tes Exemp. Das Wasser bewegt sich oscillirend in einer Röhre mit verticalen Schenkeln (Zus. B.).

290. Probl. 60. Gesetze der Bewegung, wenn die Röhre sich ausleert.

294. 1tes Exemp. Die Richtungslinie der Röhre ist vertical.

295. Formeln für den Ausflufs des Wassers aus einem cylindrischen Gefäfse.

296. Verbesserung dieser Formeln, wenn man auf den Strudel Rücksicht nimmt (B.).

297. 2tes Exemp. Das Wasser fliefst aus einem verticalen Cylinder durch eine willkürlich gekrümmte Röhre aus.

298. 299. Betrachtung des Falles, da die Oeffnung sehr klein ist.

301. Ueber die Vergleichung der Theorie mit Versuchen. — Contraction des Strahls.

302. Probl. 61. Bewegung des Wassers, wenn es aus einem Gefäfse, das immer voll erhalten wird, ausfliefst.

304. Woher hier die paradoxen Resultate entspringen?

306. Anm. Widerlegung der Baaderschen Grundformel für die Bewegung des aus Gefäfsen ausfliefsenden Wassers (B.).

308. Probl. 62. Die Einrichtung der Maschine zu bestimmen, vermittelst welcher eine mit gegebner Geschwindigkeit wirkende Kraft das Wasser auf eine bestimmte Höhe heben kann etc.

## Vierter Abschnitt.

*Von Erhebung des Wassers durch Saug- und Druckwerke.*

*S. 349 — 369.*

311. Probl. 63. Die Bewegung des Wassers in einer verticalen Saugröhre zu bestimmen, wenn die den Kolben bewegende Kraft gegeben ist.

312 — 315. Erläuterungen und Folgerungen.

316. Probl. 64. Die Bewegung des Wassers in einem Druckwerke, wenn die Steigröhre schon ganz angefüllt ist, zu bestimmen.

320. Probl. 65. Aus der gegebenen Kraft, welche ein vereinigtes Saug- und Druckwerk treibt, die Bewegung des Wassers in demselben zu bestimmen.

323. Probl. 66. Der Hebel, welcher die Kolben des vereinigten Saug- und Druckwerks treibt, wird durch die gleichförmige Umdrehung eines Krummzapfens bewegt, man sucht die Kraft, welche zur Bewegung des Krummzapfens erforderlich ist.

326. Es ist vortheilhaft, mehrere Krummzapfen an einer Axe anzubringen.

327 b. Anmerk. Ein Zweifel gegen die Formeln des letzten Problems (B.).

## Fünfter Abschnitt.

*Von der Bewegung des Wassers in Röhren, wenn es einigen Widerstand an den Röhrenwänden leidet.* *S. 369 — 406.*

(Der ganze Abschnitt ist neu hinzu gekommen. B.)

328. Probl. 67. Allgemeine Formeln für die Bewegung des Wassers in gleich weiten Röhren, wenn der Widerstand irgend eine Function der Geschwindigkeit oder des Druckes ist.

329 — 331. Hypothese für das Gesetz des Widerstandes. — Exponent des Widerstandes.

332. Probl. 68. Allgemeine Formeln für die Bewegung, wenn das Gesetz des Widerstandes nach §. 331. angenommen wird, und die Röhre überall gleich weit ist.

334 — 336. 1tes Exemp. Das Wasser bewegt sich in einer geraden Röhre, und der Widerstand verhält sich wie die Potenz *k* der Geschwindigkeit.

337. 2tes Exemp. Dieselbe Röhre wird beständig gleich voll erhalten, während das Wasser an einem Ende ausfliefst.

339. 3tes Exemp. Alle Umstände sind wie im 1ten Exempel, aber der Widerstand ist $= \frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}$.

340. 4tes Exemp. Das Wasser bewegt sich oscillirend in einer Röhre mit verticalen Schenkeln, der Widerstand ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.

345. 346. Regeln für die Gröfse der Oscillation und für die Zeit der Oscillation.

347. Bestimmung der Oscillationszeit.

349. 5tes Exemp. Alles bleibt wie im 4ten Exempel, aber der Widerstand ist der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional.

352. Auffallende Erscheinung bei diesem Gesetze des Widerstandes.

353. Probl. 69. Formeln für die Gesetze der Bewegung, wenn das Wasser aus einer nicht überall gleich weiten Röhre ausfliefst, und das Gesetz des Widerstandes wie im vorigen Problem ist.

354. Exempel. Das Wasser fliefst aus einem sehr weiten Gefäfse durch eine Röhre aus, welche überall gleich weit ist.

356. 357. Vergleichung der Theorie mit Versuchen.

## Sechster Abschnitt.

### *Von der Bewegung des Wassers in Röhren, wenn die Wärme nicht überall gleich ist. S. 406 — 445.*

360. Probl. 70. Allgemeine Gesetze dieser Bewegung, wenn die Dichtigkeit (oder Wärme) blos eine Function des Orts ist.

364. Probl. 71. Formeln für die Bewegung in einer kreisförmigen, überall gleich weiten Röhre, welche ganz mit Wasser gefüllt ist, und wo der wärmste und kälteste Punkt im Horizontaldurchmesser einander gegenüber liegen.

365. Nach welcher Richtung das Fluidum sich bewegt? (B.)

369. Probl. 72. Das vorige Problem auf Röhren von ungleichen Querschnitten angewandt.

373. Probl. 73. Formeln für die Bewegung, wenn die kreisförmige Röhre überall gleich weit ist, aber die gröfste Wärme und Kälte an den Endpunkten eines gegen den Horizont geneigten Durchmessers Statt findet, und die Röhre ganz gefüllt ist.

374. Wie man die Richtung der Bewegung bestimmen kann? (B.)

377. Probl. 74. Wenn die Röhre nicht ganz mit Wasser gefüllt, aber sonst alles wie §. 364. ist, zu bestimmen, ob eine Bewegung entstehen werde?

380. Probl. 75. Allgemeine Formeln für eine in sich zurückkehrende Röhre von willkürlicher Gestalt.

381. Exempel. Die Röhre sey kreisförmig etc.

384. Probl. 76. Eine gerade Röhre ist vertical in ein großes, mit Wasser gefülltes Gefäſs untergetaucht, das in der Röhre enthaltne Wasser ist wärmer, als das umgebende: man sucht Formeln für die entstehende Bewegung, wenn der Druck an beiden Enden der Röhre bekannt ist (B.).

385. Exempel. Die Röhre sey prismatisch (B.).

387. Probl. 77. Das vorige Problem so aufgelöst, daſs man nur einen Theil der Röhre als erwärmt betrachtet (B.).

388. 1tes Exemp. Die Röhre sey überall gleich weit (B.).

390. 2tes Exemp. Der erwärmte Theil der Röhre sey cylindrisch, aber es sey unten oder oben ein conischer Theil angesetzt (B.).

393. Wie die Bewegung in geneigten Röhren bestimmt wird (B.).

## *Dritte Abtheilung.*

## Von der Bewegung der Luft in Röhren.

### Erster Abschnitt.

### *Von den kleinen Schwingungen der Luft in Röhren, welche überall gleich weit sind.* S. 445 — 475.

394. Probl. 78. Allgemeine Formeln für die Bewegung der Luft in einer horizontalen, überall gleich weiten Röhre.

397. Auflösung dieses Problems nach der ersten Methode.

398. Probl. 79. Anwendung des vorigen Problems auf solche Bewegungen, wo jedes Lufttheilchen seine Lage nur unendlich wenig ändert.

400. Daſs es nicht nothwendig ist, $z$ sehr klein anzunehmen.

401. Ueber die Bestimmung der willkürlichen Functionen in der Integralgleichung.

402. Probl. 80. Allgemeine Bestimmung dieser Functionen durch den gegebenen anfänglichen Zustand.

404. Erläuterungen über die Bedeutung der durch Linien und Flächen ausgedrückten Gröſsen.

406. Schwierigkeit bei Röhren, die nicht unendlich lang sind.

407. Probl. 81. Regeln für die Fortsetzung der Scalen über das Ende der Röhre hinaus, wenn die Röhre offen ist.

410. Bemerkungen über die Anwendbarkeit solcher Functionen, die dem Gesetze der Stetigkeit nicht unterworfen sind.

411. Probl. 82. Regeln für die Fortsetzung der Scalen, wenn die Röhre geschlossen ist.

414. Probl. 83. Wie die Fortsetzung der Scalen bei einer in sich zurückkehrenden Röhre bestimmt wird?

416. 417. Probl. 84. Formeln für Vibrationen, welche nicht unendlich klein sind (B.).

419. Beweis, daſs die unbestimmten Functionen nur da reelle Werthe erhalten, wo eine anfängliche Geschwindigkeit und Aenderung der Dichtigkeit Statt fand (B.).

## Zweiter Abschnitt.

### *Von der Fortpflanzung der Schwingungen in der Luft.*

### *S.* 475 — 511.

420. Probl. 85. Fortpflanzung einer in einem kleinen Raume erregten Schwingung in einer unendlich langen Röhre.

424. Beschaffenheit der fortgepflanzten Schwingungen — worin diese sich von den anfänglichen unterscheiden?

426. Probl. 86. Zu bestimmen, ob Schwingungen, wobei die anfängliche Geschwindigkeit nicht unendlich klein, die Aenderung der Dichtigkeit aber = 0 ist, schneller fortgepflanzt werden, als unendlich kleine Schwingungen (B.).

427. Wie die Geschwindigkeit des Schalles sich ändert, wenn das Mariottische Gesetz nicht genau richtig ist (B.).

429. Eine Erfahrung, welche zeigt, daſs im ersten Momente der Compression dieses Gesetz nicht gelten könne (B.).

431. Probl. 87. Formeln für die Geschwindigkeit des Schalles, wenn man auf die bei der Compression frei werdende Wärme Rücksicht nimmt (B.).

432. 433. Bestimmung des Coefficienten $\gamma$ (B.).

434. Ueber die Aenderungen der Temperatur bei erheblichern Aenderungen der Dichtigkeit läfst sich hieraus nichts schliefsen (B.).

435. Wie hier die Bedeutung der Scalen geändert wird (B.).

436. Mehrere zugleich erregte Schwingungen vermischen sich nicht.

438 b. Probl. 88. Fortpflanzung einer Schwingung in einer Röhre, welche an einem Ende offen ist.

438 c. Wie Resonanz und Echo entstehen kann.

438 d. Bemerkung über Sprachröhre.

438 e. Probl. 89. Fortpflanzung der Schwingungen in einer an einem Ende verschlossenen Röhre.

438 f. Wie man sich die Entstehung des Echo vorstellen mufs (B.).

438 g. Verschiedenheit des ursprünglichen Schalls und seines Wiederhalls (mit Berichtigungen B.).

438 h. Ob die gefundene ungleiche Beschaffenheit des nach verschiedenen Seiten fortgepflanzten Schalles der Erfahrung gemäfs sey.

438 i. Probl. 90. Bestimmung der Fortpflanaung des Schalles in Röhren, die an beiden Enden offen sind.

441. Erklärung vielfacher Echo. — Bemerkung über die Töne der Pauke.

442. Probl. 91. Fortpflanzung der Schwingungen in Röhren, die an einem Ende offen, am andern geschlossen sind.

446. Wie die Scalen beschaffen seyn müssen, wenn die Lufttheilchen nach der Schwingung zu ihrer anfänglichen Stelle zurückkehren sollen.

## Dritter Abschnitt.

### *Von den Oscillationen der Luft in gleich weiten Röhren.*

*S.* 511 — 523.

447. Probl. 92. Wenn in einer an beiden Enden offenen Röhre das Gleichgewicht der Luft gestört ist, die entstehenden Oscillationen zu bestimmen.

449. Grundton einer Flöte, und Bestimmung der übrigen Töne, welche sie angeben kann.

450. 451. Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung.

453. Probl. 93. Bestimmung der Oscillationen der Luft in einer Röhre welche an einem Ende offen ist.

455. Was für Töne eine solche Röhre angeben kann?

456. Vergleichung mit der Erfahrung.

457. Probl. 94. Bestimmung der Oscillationen in einer ganz geschlossenen Röhre.

## Vierter Abschnitt.

*Von den Schwingungen der Luft in Röhren von ungleicher Weite.* S. 523 — 546.

461. Probl. 95. Allgemeine Formeln für die Bewegung in solchen Röhren.

463. Probl. 96. Anwendung auf unendlich kleine Schwingungen.

465. Vorläufige Bemerkungen über die Integration der Hauptgleichung.

466. Probl. 97. Bestimmung der Fälle, wo die Integralformel nur ein einziges Glied enthält.

467 — 469. Dieses Problem umfaſst die cylindrischen und die hyperbolisch-conoidischen Röhren.

470. Probl. 98. Die Fälle zu bestimmen, wo zwei Glieder der Integralformel vorkommen.

471. 472. Die einfachsten Fälle, welche hier vorkommen.

476. Probl. 99. Bestimmung der Fälle, wo *v* durch drei Glieder ausgedrückt wird.

477. Einfachste Fälle.

478. Allgemeine Bemerkung über die einfachsten Formen, wobei die Auflösung möglich ist.

## Fünfter Abschnitt.

*Von den Schwingungen der Luft in hyperbolisch-conoidischen Röhren.* S. 546 — 568.

481. Probl. 100. Allgemeine Formeln für die Fortsetzung einer in solchen Röhren erregten Schwingung.

483—485. Abänderungen der Formeln und Scalen.

486. Probl. 101. Die Fortsetzung der Scalen über das gegen den Mittelpunkt der Hyperbel gekehrte Ende der Röhre hinaus zu bestimmen.

489. Probl. 102. Bestimmung der Fortsetzung der Scalen über den andern Endpunkt hinaus.

491. Ein sehr beschränkter Fall, für welchen die Fortsetzung der Scalen einfacher wird.

492. Probl. 103. Zu bestimmen, wie eine in einer conoidischen Röhre erregte Schwingung sich in derselben fortpflanzt.

493. Die Schnelligkeit der Fortpflanzung hängt nicht von der Gestalt der Röhre ab.

495. Erklärung der Wirkung des Sprachrohrs.

496. Bemerkungen über die Töne der Trompete.

497. Probl. 104. Die oscillirende Bewegung zu bestimmen, welche die in Schwingung gesetzte Luft in einer an beiden Enden offenen hyperbolischen Röhre annimmt, wenn anfangs blos die Dichtigkeit eine Aenderung litt.

499. Unter welchen Umständen alle Schwingungen isochronisch sind?

500. Probl. 105. Die Oscillationen der Luft in einer hyperbolischen Röhre zu bestimmen, wenn bei der anfänglichen Schwingung die Dichtigkeit ungeändert blieb.

502. 503. Die Oscillationen fallen hier ganz unregelmäfsig aus, und der Ton wird daher nicht wohlklingend.

## Sechster Abschnitt.

### *Von den kleinen Schwingungen der Luft in conischen Röhren.*

S. 568 — 588.

504. Probl. 106. Wenn in einer conischen Röhre in der Luft eine Schwingung erregt wird, die Scalen anzugeben, welche zur Bestimmung des Zustandes der Luft im Fortgange der Zeit dienen.

505. Anwendung auf cylindrische Röhren.

506. 507. Bequemere Einrichtung der Scalen.

508. Probl. 107. Die Fortpflanzung einer kleinen Schwingung in einer conischen Röhre zu bestimmen.

511. Probl. 108. Wenn die Röhre conisch ist, aber nicht bis an die Spitze des Kegels vollständig, die Fortsetzungen der Scalen zu bestimmen.

512. 513. Ueber die Töne, welche eine conische Röhre gibt.

514. Anwendung auf cylindrische Röhren.

515. Probl. 109. Vollständige Bestimmung der Fortpflanzung einer an der Spitze des Kegels erregten Schwingung.

516. Abnahme der Stärke des Schalles in gröfsern Entfernungen.

(Die letzten Probleme sind etwas anders vorgetragen, als bei Euler.)

## Siebenter Abschnitt.

*Darstellung von Lagrange's Methode, diese Untersuchungen über die Natur und Fortpflanzung des Schalles so anzustellen, daſs dabei das Gesetz der Stetigkeit für den anfänglichen Zustand nicht vorausgesetzt wird.* S. 588 — 638.

(Dieser Abschnitt ist neu hinzugekommen, und nach Lagrange's erster Abhandlung in den Miscellaneis societ. Taurinensis bearbeitet. B.)

520. Probl. 110. Eine gegebene Anzahl von Körpern, welche mit abstoſsender Kraft auf einander wirken, befindet sich auf einer geraden Linie: einige derselben oder alle (blos die beiden äuſsersten ausgenommen) werden in Bewegung gesetzt, man sucht die Differentialformeln für die Bewegung irgend eines dieser Körper.

523. Probl. 111. Die Integralgleichungen zu finden, welche die Bewegung dieser Körper bestimmen.

524. 525. Veränderungen der Ausdrücke.

526. 527. Erläuterungen.

529. Probl. 112. Aus den gefundenen Gleichungen zu bestimmen, wie jeder Körper sich am Ende der Zeit $= t$ bewegt.

530. 531. Vollständigere Darstellung der Formeln.

533. Beweis für die Gültigkeit des bei der Auflösung des Problems angewandten Verfahrens.

535. Probl. 113. Anwendung dieser Lehren auf den Fall, da die Anzahl der Körper unendlich ist.

536. Beweis für die gegebne Auflösung.

538. Einfachere Fälle.

539. Vorerinnerungen zum Folgenden.

540. Probl. 114. Vollständige Bestimmung des Werthes von $y$ für den Fall, daſs $V = 0$ ist.

542. 543. Nähere Erläuterung, wie hieraus die Bewegung jedes Theilchens bestimmt wird.

545. Probl. 115. Wenn anfangs nur ein einziges Lufttheilchen in Bewegung gesetzt ist, die Fortpflanzung dieser Schwingung zu bestimmen.

547. Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalles, Entstehung der Echo etc.

# Erster Theil.

## Die Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper.

## Erster Abschnitt.

### *Von den wesentlichen Eigenschaften flüssiger Körper, und den besondern Eigenschaften der beiden Hauptarten.*

#### 1. Erfahrungssatz.

Wenn ein flüssiger Körper bei dem Drucke einer auf ihn wirkenden Kraft im Gleichgewichte bleibt, so verbreitet sich der Druck gleichförmig durch die ganze flüssige Masse, so daſs jedes Theilchen einen gleichen Druck leidet.

Dieser Satz bedarf noch einer etwas umständlichern Erläuterung. Er beruht auf der Voraussetzung, daſs, während jener Druck wirkt, das Gleichgewicht fortdaure, oder der flüssige Körper in Ruhe bleibe, und wir stellen uns daher am bequemsten die Sache so vor, als ob der flüssige Körper in das Gefäſs *ABCDEF* (Fig. 1.) eingeschlossen wäre, und durch eine auf den Kolben *pO* wirkende Kraft einen gewissen Drúck litte, dessen Richtung auf seine Oberfläche in *O* senkrecht ist. Dem Einwurfe, ob der flüssige Körper alsdann im Gleichgewichte bleiben, und nicht etwa eine Zusammendrückung zulassen werde, brauche ich hier nicht zu begegnen, denn, gesetzt dieses wäre der Fall, so würde diese Zusammendrückung doch ihre Gränzen haben, und wenn der Kolben bis zu einer gewissen Tiefe in der Röhre *ABba* fortgerückt wäre, so würde er zur Ruhe kommen, und nur von diesem Zustande der Ruhe ist hier die Rede.

Die Behauptung, daſs sich der Druck durch die ganze flüssige Masse gleichförmig verbreite, läſst sich nun theils auf den Druck, welchen die Wände des Gefäſses leiden, theils auf den, welchen irgend ein andres Theilchen des flüssigen Körpers aushält, anwenden. In Rücksicht der Wände nämlich ist dieselbe so zu verstehen, daſs jedes Stück der Wand, dessen Fläche so groſs ist, als die Grundfläche des Kolbens, einen eben so groſsen Druck leidet, als der ist, welcher auf den Kolben wirkt; oder, wenn irgendwo das Gefäſs eine Oefnung hätte, die der Grundfläche des Kolbens an Gröſse gleich und mit dem Deckel *CD* verschlossen wäre, so würde, um den Deckel gegen den Druck des flüssigen Körpers zu erhalten, eine Kraft nach der Richtung *qn* erfordert, die eben so groſs seyn müſste, als die auf den Kolben wirkende. Wäre *cd* ein ähnlicher Deckel, aber gröſser oder kleiner als die Grundfläche des Kolbens *O*, so würde auch der senkrechte Druck, den derselbe leidet, in eben dem Verhältnisse gröſser oder kleiner seyn, als die auf den Kolben wirkende Kraft. Dieser Druck ist immer auf diejenige Stelle der Wand des Gefäſses, auf welche er wirkt, senkrecht, wie auch schon der Begriff des Druckes es mit sich bringt.

Aber nicht blos die Wände des Gefäſses sind diesem Drucke unterworfen, sondern, wenn z. B. *fgh* ein in der Mitte befindliches Theilchen bedeutet, so wird auch dieses von allen Seiten gleich stark gedrückt, und da das Gleichgewicht fortdauern soll, so muſs das Theilchen *fgh* diesen Druck aushalten können, ohne sich in einen engern Raum pressen zu lassen. Uebrigens ist auch hier der Druck immer auf diejenige Stelle der Oberfläche, wo er wirkt, senkrecht, und es ist einerlei, ob *fgh* ein fremder Körper oder ein Theil des flüssigen selbst ist.

2. Diese Sätze lassen sich nun auch so darstellen. Des Kolbens *O* Grundfläche sey $= ff$, die auf ihn drückende Kraft $= p$; so wird, wenn auch der Raum $CD = ff$ ist,

dieses Stück der Wand mit einer Kraft $= p$ nach aufsen gedrückt. Nimmt man hingegen ein andres Stück $cd$ der Wand des Gefäfses, dessen Gröfse $= gg$ ist, so leidet dieses einen Druck $= \frac{gg}{ff} p$, indem derselbe sich zu $p$ verhalten mufs, wie $gg$ zu $ff$.

3. Da man die Gröfse eines Druckes am vortheilhaftesten durch Gewichte angibt, so ist es hier am bequemsten, den Druck, den eine gewisse Fläche leidet, durch das Gewicht einer Säule aus bekannter Materie, deren Basis diese Fläche ist, zu bestimmen; die Höhe der Säule wird dann der Gröfse des Druckes gemäfs bestimmt, und der Inhalt der Säule dient zur Abmessung des Druckes, da man die specifische Schwere der Materie, aus welcher die Säule bestehen soll, $= 1$ setzen kann. Stellt man sich so den Druck $= p$, den die Fläche $= ff$ leidet, als dem Gewichte einer Säule gleich vor, deren Basis $= ff$, ihre Höhe $= a$; so wird der Druck durch $= aff$ dargestellt, und eben so der Druck, den eine andre Fläche, oder z. B. ein andrer Theil $= gg$ der Wand des Gefäfses leidet, durch $= agg$, so dafs also diese Darstellungsart hier den Vortheil gewährt, dafs einerlei Höhe $= a$ hinreicht, um den Druck zu bezeichnen, den in dem hier betrachteten Falle irgend ein Theil der Wand des Gefäfses, oder irgend ein innerhalb abgesonderter Theil leidet; denn hier ist der Druck der gedrückten Fläche proportional, und also die Höhe jener Säule, deren Gewicht dem Drucke gleich ist, überall $= a$.

4. Offenbar wird hier vorausgesetzt, dafs keine andre Kraft, aufser der auf den Kolben drückenden, auf den flüssigen Körper wirke. Wir entfernen die Betrachtung der Schwere und andrer ähnlicher Kräfte, welche unmittelbar auf jedes Theilchen des Körpers wirken, oder sehen denselben so an, als ob er gar nicht der Schwere unterworfen wäre; denn nur unter dieser Bedingung sind die

aufgestellten Behauptungen wahr, indem, wie schon bei einer oberflächlichen Ueberlegung erhellt, in einem schweren Fluido das Gewicht der höher liegenden Theile auf die untern drücken, und mithin die Gleichheit des Drucks auf Stellen der Wand, die ungleich hoch liegen, nicht mehr Statt finden würde. Genauere Untersuchungen über die Wirkung solcher Kräfte kommen nachher vor, hier ist es genug, nur auf den Unterschied zwischen äufsern Kräften, wie die hier vermittelst des Kolbens auf den flüssigen Körper drückende ist, und den der Schwere ähnlichen, welche auf jedes Theilchen des flüssigen Körpers ihre Wirkung äufsern, aufmerksam zu machen.

5. Bei der Betrachtung der Wirkung dieser äufsern Kraft scheint es anfangs auffallend, dafs von einer einzigen Kraft, die noch dazu sehr klein seyn kann, gleichsam unzählige neue und grofse Kräfte entstehen. Denn sobald der Kolben auf die Oberfläche des flüssigen Körpers in *O* drückt, so leidet die ganze Oberfläche des Gefäfses, wenn sie auch noch so grofs ist, an jeder mit der Grundfläche des Kolbens gleich grofsen Stelle, einen eben so grofsen Druck, als der in *O* ist; und die Summe dieser drückenden Kräfte kann mit der Vergröfserung der innern Oberfläche des Gefäfses ins Unendliche vermehrt werden. Von der andern Seite kann auch der gesammte Druck, den die Wände des Gefäfses leiden, derselbe bleiben, während die auf den Kolben wirkende Kraft kleiner wird, wofern man nur die Grundfläche des Kolbens in eben dem Verhältnisse kleiner annimmt; denn die Kraft $= \frac{1}{1000} p$ bringt auf eine Fläche $= \frac{1}{1000} ff$ eben so grofse Wirkung hervor, als die Kraft $p$ auf die Fläche $= ff$. Indefs, so auffallend dies auch beim ersten Anblicke scheinen mag, so streitet es doch mit den Naturgesetzen eben so wenig als die Lehren der Statik, welche von einem durch Maschinen bewirkten Gleichgewichte ungleicher Kräfte reden; denn die eben betrachteten, ins Unendliche vermehrten Kräfte bringen während des Gleichgewichts gar keine Wirkung hervor; nach aufgehob-

nem Gleichgewichte aber ist die Wirkung aller jener Kräfte nicht gröſser, als es der einzigen am Kolben angebrachten Kraft gemäſs ist.

6. Eines Fehlschlusses, zu welchem der Satz, daſs eine doppelt so groſse Kraft auch doppelt so groſse Wirkung hervorbringe, verleiten könnte, brauche ich nach den bisherigen Erläuterungen wohl kaum zu erwähnen. Man könnte nämlich denken, der Druck auf die Wände des Gefäſses werde verdoppelt, wenn auſser der auf den Kolben *AB* wirkenden Kraft noch eine zweite gleich groſse auf einen anderswo angebrachten eben so groſsen Kolben wirkte. Aber es ist schon bemerkt, daſs eine doppelt so groſse Kraft auf eine doppelt so groſse Fläche keine gröſsere Wirkung hervorbringt, als die einfache Kraft bei dem Drucke auf eine in eben dem Verhältniſs kleinere Fläche. Auch ist es ja aus dem vorigen klar, daſs eine eben so groſse Kraft, als die auf den Kolben *AB* drückende nöthig ist, um den Deckel *CD*, oder einen statt dessen angebrachten Kolben, der dem *AB* gleich ist, gegen den Druck von innen im Gleichgewichte zu erhalten: diese kann also keinen neuen Druck in dem flüssigen Körper hervorbringen. Würde aber der zweite Kolben von einer gröſsern oder kleinern Kraft gedrückt, so könnte das Gleichgewicht nicht mehr bestehen — ein Fall, dessen Betrachtung nicht hieher gehört.

7. Diese eben erläuterte gleichförmige Verbreitung des Druckes durch die ganze Masse des flüssigen Körpers, vermöge welcher alle Theilchen, während das Gleichgewicht besteht, einen gleich groſsen Druck leiden, ist nun aber nicht blos eine bemerkenswerthe Erscheinung, sondern sie enthält die charakteristische Eigenschaft flüssiger Körper, welche bei vollkommen f l ü s s i g e n Körpern allemal Statt findet, und dagegen k e i n e m n i c h t f l ü s s i g e n Körper zukommt.

Festen Körpern fehlt diese Eigenschaft gänzlich, denn wenn man einen festen, harten Körper gegen eine Ebene drückt, so leidet diese nach derselben Richtung den ganzen Druck, und es entsteht in dem Körper gar kein Seitendruck. Wäre z. B. in dem vorhin betrachteten Gefäſse ein fester Körper enthalten gewesen, so würde der Druck in *O* nur auf den entgegengesetzten Boden des Gefäſses *Ed*, nicht aber auf die Wände bei *A* oder *B* wirken. Bei einer Sammlung fester Körper, z. B. wenn das Gefäſs mit Sand gefüllt wäre, würde der Erfolg etwas anders seyn, denn allerdings würden bei einem Drucke auf den Kolben in *O* alle Wände des Gefäſses einigen Druck leiden, aber doch keinen allenthalben gleich groſsen Druck, sondern der dem Kolben entgegengesetzte Boden würde mehr auszuhalten haben, als die Seitenwände des Gefäſses, und auch diese würden nicht an allen Stellen gleich stark gedrückt werden, sondern in der Nähe von *A* und *B* würde der Druck am schwächsten seyn, und aus einer in dieser Gegend angebrachten Oefnung möchte vielleicht nur wenig Sand hervordringen.

Ob diese gleichförmige Verbreitung des Drucks bei den flüssigen Körpern, die wir kennen, im vollkommensten Sinne Statt finde, läſst sich zwar nicht mit völliger Sicherheit behaupten, indeſs leidet es keinen Zweifel, daſs Wasser, Luft und andre Materien diese Eigenschaft in solcher Vollkommenheit besitzen, daſs die Schlüsse, welche ich aus derselben herleiten werde, ohne merklichen Irrthum auf sie können angewandt werden. Und gesetzt auch, es gäbe keinen Körper in der Natur, von dem sich eine ganz gleichförmige Verbreitung des Druckes behaupten lieſse, so wäre darum die Betrachtung der Eigenschaften solcher Körper, bei welchen sie Statt fände, nicht ohne Nutzen. Setzen wir in diese Eigenschaft das Wesen der Flüssigkeit, so könnten Untersuchungen, die aus derselben hergeleitet würden, als für vollkommen flüssige Körper geltend, eben so anwendbare Folgerungen geben, als die mechanischen Untersuchungen über den Stoſs voll-

kommen harter oder vollkommen elastischer Körper, die sich ebenfalls in der wirklichen Welt nicht finden.

8. Ein Hauptgrund aber, weswegen diese Eigenschaft uns so wichtig wird, ist der, dafs sich aus ihr alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper aufs überzeugendste ableiten lassen, so dafs man behaupten darf, jede Materie, welche jene Eigenschaft besitzt, müsse nothwendig bei ihrem Gleichgewichte und ihrer Bewegung diese Gesetze befolgen. Und eben dieses, dafs sich die ganze Statik und Mechanik flüssiger Körper so sicher auf jene Eigenschaft gründen läfst, berechtigt uns, in sie das Wesen der Flüssigkeit zu setzen.

Andre Erklärungen, die man über die Natur flüssiger Körper aufgestellt hat, z. B. dafs ihre Theilchen sehr fein wären, und wegen weniger Cohäsion einander leicht auswichen, waren doch immer nur Hypothesen, über deren Wahrheit, da sie das innere Wesen der Körper betreffen, keine Erfahrung entscheiden konnte; überdies leiteten sie nicht, wie die Eigenschaft, welche hier als Charakter der Flüssigkeit aufgestellt ist, zur Begründung der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper; und endlich ward jene äufserste Feinheit und Beweglichkeit der einzelnen Theilchen ja nur deswegen angenommen, um diese bisher betrachtete Haupteigenschaft flüssiger Körper begreiflich zu machen — ein Zweck, der gleichwohl nicht völlig dadurch erreicht ward.

Unsre folgenden Untersuchungen betreffen also solche Körper, bei denen es vollkommen wahr ist, dafs ein auf sie wirkender Druck sich, wenn das Gleichgewicht fortdauert, so durch die ganze Masse verbreitet, dafs alle Theilchen gleichen Druck leiden. — Und solcher Körper gibt es nun verschiedene Arten.

9. Erfahrungssatz. Einige flüssige Körper behalten bei jedem Drucke einerlei Volumen, andre hingegen haben die Eigenschaft, daſs sie durch einen gröſsern Druck in einen kleinern Raum gepreſst werden, ehe das Gleichgewicht wieder eintritt; aber dieser Verschiedenheit ungeachtet, findet die wesentliche Eigenschaft flüssiger Körper bei beiden Arten Statt.

Zu der ersten Art flüssiger Körper, welche ihr Volumen nicht ändern, gehört das Wasser und andre ähnliche Materien; zur zweiten gehören die Luftarten. Wenn nämlich das Gefäſs *ABCDEF* (Fig. 2.) Wasser enthält, welches vermittelst des Kolbens *O* gedrückt wird, so nimmt dieses fast genau denselben Raum ein, die auf den Kolben drückende Kraft mag groſs oder klein seyn. Neuere Versuche haben zwar gelehrt, daſs diese Gleichheit des Volumens nicht bei jedem Drucke in völliger Schärfe fortdauert, sondern daſs auch das Wasser und ähnliche Materien durch einen sehr groſsen Druck in einen etwas kleinern Raum gepreſst werden; aber dieses ist doch immer so wenig, daſs man darauf bei den folgenden Untersuchungen keine Rücksicht zu nehmen braucht, sondern das Wasser so betrachten darf, als ob selbst der gröſste Druck sein Volumen nicht änderte.

Ganz anders verhält es sich mit der Luft. Gesetzt, das Gefäſs sey mit Luft angefüllt, welche bei einem gewissen Drucke auf den Kolben, nachdem das Gleichgewicht hergestellt ist, den Raum bis an des Kolbens Grundfläche in *O* einnehme; so wird in diesem Zustande der Druck, den das Gefäſs, oder den jedes Lufttheilchen selbst leidet, dem Gesetze gemäſs seyn, mit dessen Betrachtung wir uns vorhin beschäftigt haben. Aber nun vermehre man den Druck auf den Kolben, so wird dieser nicht mehr an seiner vorigen Stelle in Ruhe bleiben, sondern weiter in das Gefäſs hineindringen, und erst, nachdem das Volumen der Luft um etwas vermindert ist, wird das Gleichgewicht wieder eintreten; und je mehr man den Druck auf den Kolben

vergröfsert, desto kleiner wird der Raum, in welchen die Luft sich zusammendrücken läfst, ehe das Gleichgewicht hergestellt wird. Wenn man hingegen den Druck auf den Kolben vermindert, so reicht der geringere Druck nicht mehr hin, um die Luft in dem bisherigen Zustande zu erhalten, sondern diese treibt den Kolben zurück, und breitet sich in einen gröfsern Raum aus, bis sie in einen Zustand kommt, wo dieser geringere Druck das Gleichgewicht erhalten kann.

10. Diese Verschiedenheit ist sehr merkwürdig, und läfst sich kurz unter den Begriff fassen, dafs das Wasser bei jedem Drucke einerlei Dichtigkeit behalte, nämlich dieselbe Dichtigkeit, welche es auch haben würde, wenn es gar keinen Druck litte; dafs hingegen die Dichtigkeit der Luft veränderlich sey und mit dem Drucke zunehme, so dafs jedem bestimmten Drucke eine bestimmte Dichtigkeit entspreche, und jeder gegebene Grad der Dichtigkeit eine bestimmte zusammendrückende Kraft voraussetze. Bezeichnet daher $p$ die Kraft, welche auf einen flüssigen Körper drückt, und $q$ die Dichtigkeit des flüssigen Körpers, bei welcher das Gleichgewicht mit dieser Kraft Statt findet: so ist beim Wasser $q$ eine von $p$ unabhängige Gröfse; bei der Luft hingegen ist $q$ eine Function von $p$, und eine dieser Gröfsen läfst sich aus dem Werthe der andern bestimmen.

11. Wegen dieser Eigenschaft der Luft, dafs sie eine Zusammendrückung zuläfst, und, bei vermindertem Drucke von aufsen, sich wieder ausdehnt, schreibt man ihr Elasticität zu; denn so grofs die Kraft ist, welche erfordert wird, um sie zu einer gewissen Dichtigkeit zu bringen, eben so grofs ist auch die Kraft, mit welcher sie sich wieder auszudehnen strebt, wie dieses die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung erfordert. Diese Wirkung der Elasticität der Luft ist also von dem durch die ganze flüssige Masse Statt findenden Drucke, welchen wir vorhin betrachtet haben, nicht unterschieden; denn vermöge die-

ses Druckes leiden die Wände des Gefäfses und jedes Theilchen des flüssigen Körpers selbst eben das, was man bei der Luft als Wirkung der Elasticität ansieht. Da aber dieser Druck auch beim Wasser eben so Statt findet, so kann man die verschiedene Natur der Luft und des Wassers am besten dadurch ausdrücken, dafs die Dichtigkeit der Luft vom Drucke abhängt, welches beim Wasser nicht der Fall ist.

12. Man pflegt durch Experimente zu beweisen, dafs die Dichtigkeit der Luft sehr nahe der drückenden Kraft proportional sey: indefs ist es einleuchtend, dafs dieses Verhältnifs nur bis zu gewissen Gränzen Statt finden kann. Denn, wenn das Gesetz allgemein richtig wäre, dafs die Dichtigkeit allemal dem Drucke proportional bliebe: so müfste, wenn gar kein Druck Statt findet, auch die Dichtigkeit = 0 werden, das heifst, eine noch so kleine Luftmasse müfste sich ins Unendliche ausdehnen, sobald keine Kraft da wäre, welche sie zusammenhielte, was sich doch nicht annehmen läfst. Und eben so wenig kann bei einem unendlich vermehrten Drucke auch die Dichtigkeit ins Unendliche zunehmen, denn daraus würde folgen, dafs eine Luftmasse von jeder Gröfse fähig sey, in einen unendlich kleinen Raum zusammengedrückt zu werden. Diesen der Natur der Sache unangemessenen Folgerungen weicht man aus, wenn man annimmt, dafs es für die Luft eine gröfste endliche Dichtigkeit gebe, zu welcher sie erst bei unendlich vermehrtem Drucke gelangt, und eben so eine kleinste gleichfalls endliche Dichtigkeit, die nur dann eintritt, wenn gar kein Druck auf dieselbe wirkt. Es läfst sich alsdann ein Gesetz denken, nach welchem Druck und Dichtigkeit so von einander abhängen, dafs in einem mittlern Zustande der Dichtigkeit diese beynahe im Verhältnifs des Druckes zu- oder abnimmt.

Drückt zum Beispiel (Fig. 3.) die Linie $AB$ die kleinste, $AC$ die gröfste Dichtigkeit, welche die Luft erlangen kann, aus, wo also die erste bei gar keinem Drucke, die

letzte aber bei einem ins Unendliche vermehrten Drucke Statt findet, so läſst sich das Verhältniſs des Druckes, welcher irgend einer mittlern Dichtigkeit $AP$ entspricht, durch die Ordinaten $PM$ einer Curve $BMV$ darstellen, welche in $B$ die Axe $AC$ berührt, und sich nicht weiter nach $A$ zu erstreckt, von $B$ an aber sich von der Axe entfernt, und die durch $C$ senkrecht auf die Axe gesetzte Linie $CD$ zur Asymtote hat, über welche hinaus sie sich ebenfalls nicht erstreckt. Um die Gestalt dieser Curve näher zu bestimmen, müſste man für sehr verschiedene Dichtigkeiten der Luft den zugehörigen Druck kennen, und dann die Abscissen $AP$ den Dichtigkeiten, die zugehörigen Ordinaten $PM$ aber dem Drucke proportional annehmen, welcher der durch die Abscisse ausgedrückten Dichtigkeit entspricht. Da aber die Versuche, die man über die Zusammendrükkung und Ausdehnung der Luft angestellt hat, nicht weit genug reichen, um das Gesetz, wodurch die Dichtigkeit aus dem Drucke bestimmt wird, anzugeben, oder um die Gestalt der Curve $BMV$ aus der Erfahrung zu bestimmen, so können wir zur Erläuterung nur eine willkürliche Formel für diese Linie annehmen, welche den angeführten Bedingungen Genüge leistet. Wird z. B. die kleinste Dichtigkeit $AB = b$, die gröſste $AC = c$ gesetzt, und man nimmt an, daſs mit dem Drucke $PM = y$, die Dichtigkeit $AP = x$ zusammen gehöre, so könnte die Gleichung

$$y^2 = n^2 \frac{(x-b)^3}{c-x} \text{ oder } y = n\,(x-b) \sqrt{\frac{x-b}{c-x}}$$

das Gesetz ausdrücken, wodurch der zu einer gegebenen Dichtigkeit gehörende Druck bestimmt wird. Denn diese Gleichung gibt für $x = b$, $y = 0$; und für $x = c$, $y = \infty$. Zugleich aber wird für Werthe von $x$, die auſserhalb dieser Gränzen liegen, der Werth von $y$ unmöglich, wie es den allgemeinen Bedingungen für dieses Gesetz gemäſs ist *).

*) Wenn $n = 1$, so ist die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie die Cissoide.

13. Obgleich nun diese Formel eben nicht als wirklicher Ausdruck des Gesetzes, welches die Luft bei den Zusammendrückungen, die sie leidet, befolgt, angesehen werden kann, so lassen sich doch noch verschiedene Erläuterungen auf dieselbe gründen, und sie ist um desto merkwürdiger, weil sie selbst auf Wasser Anwendung leidet. Setzen wir nämlich die gröfste und kleinste Dichtigkeit, deren der flüssige Körper fähig ist, gleich grofs, $b = c$, so fällt schon von selbst in die Augen, dafs auch $x$ keinen andern Werth haben könne, als $x = b$. Unsre Gleichung würde aber alsdann

$$y = n\,(x - b)\,\sqrt{\frac{x - b}{b - x}},$$

welche immer, wenn $x > b$ oder $x < b$ ist, unmögliche Werthe für $y$ gibt, in dem Falle aber, da $x = b$ ist, $y$ unbestimmt läfst, wodurch angezeigt wird, dafs die Dichtigkeit bei jedem Drucke ungeändert bleibe.

Man kann also hiernach auch sagen, die Luft unterscheide sich nur darin vom Wasser, dafs bei jener die gröfste und kleinste Dichtigkeit weit von einander ab liegen, statt dafs sie bei diesem nahe oder fast völlig zusammenfallen. Es könnte flüssige Körper geben, deren gröfste und kleinste Dichtigkeit weniger verschieden wäre, als es bei der Luft der Fall ist, oder für die man den Abstand $BC$ kleiner annehmen müfste: solche Körper würden der Natur des Wassers näher kommen, und da man sich mehrere Körper denken könnte, bei denen $BC$ immer kleinere Werthe erhielte, so erhellt, dafs man auch Luft und Wasser nicht als der Art, sondern nur als dem Grade nach verschieden, betrachten dürfe, und dafs Sätze, die von einem flüssigen Körper im Allgemeinen gelten, seine gröfste Dichtigkeit mag von der kleinsten um wenig oder um viel verschieden seyn, Anwendung auf beide zulassen.

14. Die Behauptung, dafs die oben angegebene Formel auch auf Wasser anwendbar sey, bedarf vielleicht noch einiger Erläuterung, da die Formel für $x = b$, $y = 0$ zu

geben scheint. Ich will daher den Fall noch etwas näher betrachten, wo $b$ und $c$ nur um ganz wenig verschieden sind, wenn z. B. $b = 1000000$ und $c = 1000010$ wäre. Unsre Formel wird dann

$$y = n\,(x - 1000000) \cdot \sqrt{\frac{x - 1000000}{1000010 - x}},$$

und wenn ich $n = 100$ setze, so gehören folgende Werthe von $x$ und $y$ zusammen:

| Dichtigkeit $x$. | Druck $y$. |
|---|---|
| 1000000 | 0 |
| 1000001 | $33\frac{1}{3}$ |
| 1000002 | 100 |
| 1000003 | 196 |
| 1000004 | 326 |
| 1000005 | 500 |
| 1000006 | 735 |
| 1000007 | 1069 |
| 1000008 | 1600 |
| 1000009 | 2700 |
| 1000010 | $\infty$ |

woraus erhellt, dafs bei dem verschiedensten Drucke die Dichtigkeit beinahe gleich bleiben kann: und man übersieht, dafs der Unterschied der Dichtigkeiten ganz verschwinden könnte.

15. Bei diesen Betrachtungen nimmt man den flüssigen Körper als gleichartig an, wo sich dann die Dichtigkeit aus dem Raume, den eine gewisse Masse einnimmt, bestimmen läfst, weil bei gleicher Masse die Dichtigkeit mit dem Volumen im umgekehrten Verhältnisse steht. Wäre das Fluidum aus verschiedenen Materien gemischt, so müfste man die Dichtigkeit jedes Theilchens, oder jedes verschiedenartigen Fluidi besonders beurtheilen, wenn z. B. die gemischten Fluida sich durch einerlei Druck nicht gleich stark comprimiren liefsen.

16. Um das Verhältniſs der gröſsten und kleinsten Dichtigkeit, deren ein homogener flüssiger Körper fähig ist, kennen zu lernen, müſste man also den Raum bestimmen können, in welchen er sich bei einem unendlich vermehrten Drucke zusammenpressen läſst, und den Raum, in welchen er sich ausdehnt, wenn gar keine Kraft auf ihn drückt; aber beides läſst sich, wenigstens bei der Luft, nicht bestimmen, und wir sind daher über die Gränzen der Dichtigkeit, welche sie erlangen kann, noch sehr wenig gewiſs. Indeſs darf man annehmen, daſs ihre kleinste Dichtigkeit wenigstens mehrere tausendmal kleiner sey, als die Dichtigkeit der freien Luft nahe an der Oberfläche der Erde, welche dem Drucke der Atmosphäre unterworfen ist. Von der gröſsten Dichtigkeit, welche sie erlangen kann, wissen wir noch weniger, da wirkliche Compressionen sich nicht sehr weit treiben lassen, und alles, was man sonst von ungeheuer groſsen Verdichtungen annimmt, nicht auf ganz sichern Schlüssen beruht *).

Da wir jetzt mehrere Luftarten kennen, so lieſse sich auch fragen, ob alle einer gleichen Verdichtung und Verdünnung fähig sind, und ob bei allen die Aenderungen der Dichtigkeit nach einerlei Gesetze vom Drucke abhängen?

17. Es ist nicht immer eine wirkliche Kraft, wie vorhin die auf den Kolben drückende nöthig, um Luft und

---

*) Karsten führt im 6. Bande seines Lehrbegrifs S. 571. an, daſs sich in Windbüchsen die Luft wohl 100 mal dichter als im gewöhnlichen Zustande machen lasse.

Euler sagt, die gröſste Dichtigkeit der Luft könne wohl der des Goldes gleich seyn; aber da die Gründe, welche man sonst in den Luftentwickelungen, der Explosion des Schieſspulvers und ähnlichen Phänomenen hiefür zu finden glaubte, nichts beweisen, weil im unentzündeten Schieſspulver nicht comprimirte Luft vorhanden ist, sondern blos Materie, aus welcher Luft werden kann, so läſst sich hierüber gar nichts mit Wahrscheinlichkeit sagen.

ähnliche Fluida in einem gewissen Zustande der Zusammenpressung zu erhalten. Denn wenn die Luft im Gefäſse *ABCDEF* vermittelst einer auf den Kolben *O* drückenden Kraft zum Gleichgewichte gebracht ist, so könnte nun der Kolben an das Gefäſs angelöthet werden, und die eingeschlossene Luft würde fortfahren, denselben Druck auf die Wände des Gefäſses auszuüben, den sie vorhin, der drükkenden Kraft gemäſs, ausübte, obgleich jetzt diese Kraft nicht mehr fort zu wirken braucht. In sofern also darf man nicht mehr sagen, die Luft übe auf die Wände des Gefäſses einen so groſsen Druck aus, als der ist, den sie fortdauernd durch eine äuſsere Kraft leidet, sondern einen so groſsen Druck, als nothwendig war, um sie zu der Dichtigkeit zu bringen, welche sie gegenwärtig besitzt.

Für Wasser scheint diese Behauptung nicht zu gelten; denn da würde der Druck auf die Wände des Gefäſses sogleich aufhören, wenn der Kolben mit dem Gefäſse verbunden würde. Indeſs sieht man, daſs auch für Wasser die Behauptung gelte, sobald man demselben nur die geringste Compressibilität zuschreibt — und so möchte sie wohl auch für die wahre Natur desselben passend gefunden werden, wenn nicht ein andrer Umstand den Druck auf die Wände aufhöbe. Dehnen sich nämlich, nach der Befestigung des Kolbens an das Gefäſs, die Wände auch nur im allermindesten aus, so hört sogleich aller Druck auf.

18. Erfahrungssatz. Alle flüssige Körper dehnen sich bei vermehrter Wärme aus, und ziehen sich bei verminderter Wärme in einen engern Raum zusammen, sofern nämlich die auf sie drückenden Kräfte dieses erlauben.

Die Erfahrung zeigt dieses an allen flüssigen Körpern. Diejenigen, deren Dichtigkeit bei jedem Drucke ungeändert bleibt, dehnen sich gleichwohl aus, wenn ihre Wärme zunimmt, und keine Kraft ist im Stande, diese Ausdehnung zu hindern: bei verminderter Wärme nimmt da-

gegen ihr Volumen wieder ab. Ihre Dichtigkeit nimmt also zu, wenn die Wärme abnimmt. Bei den der Luft ähnlichen Fluidis verhält es sich etwas anders. Auch sie zeigen bei zunehmender Wärme ein Bestreben, sich auszudehnen; aber diese Ausdehnung erfolgt nur dann wirklich, wenn die auf sie drückenden Kräfte es erlauben. Die vorige Behauptung, daſs bei der Luft jeder Grad der Dichtigkeit einem gewissen Drucke entspreche, ist also nur dann wahr, wenn man eine bestimmte, unveränderliche Temperatur voraussetzt; denn bei vermehrter Wärme nimmt der Druck zu, wenn die Dichtigkeit dieselbe bleibt; und dagegen müſste die Dichtigkeit abnehmen, wenn der Druck ungeändert bleiben sollte: eben so nimmt bei verminderter Wärme der Druck ab, wenn gleiche Dichtigkeit fortdauert, und wenn derselbe Druck bei verminderter Wärme fortdauern soll, so muſs die Dichtigkeit zunehmen.

Dieses stimmt mit den bekannten Lehren der Physik überein, nur daſs man gewöhnlich sagt, die Elasticität der Luft nehme bei vermehrter Wärme, so wie bei vermehrter Dichtigkeit, zu. Ich vermeide hier den Ausdruck Elasticität, weil sie mit in dem Begriffe des Druckes, wovon umständlich die Rede gewesen, enthalten ist, um, da dieser auch bei Wasser Statt findet, einerlei Grundsätze auf Wasser und Luft anzuwenden.

19. Als völlig unveränderlich kann also jetzt die Dichtigkeit des Wassers nicht mehr angesehen werden; denn, obgleich sie vom Drucke unabhängig ist, so ändert sie sich doch bei veränderter Temperatur. Die Dichtigkeit der Luft aber, die wir vorhin nur als Function des Druckes ansahen, muſs nun als von zwey veränderlichen Gröſsen, vom Drucke und von der Wärme, abhängig betrachtet werden; und so ist ebenfalls der Druck, den die Luft ausübt, eine Function ihrer Dichtigkeit und der Wärme, und zwar eine Function, die mit der Dichtigkeit und mit der Wärme zugleich wächst.

20. Es sey nämlich die Dichtigkeit der Luft $= q$, die Wärme $= r$, und $p$ bezeichne die Höhe einer Säule aus bekannter Materie, deren wir uns zur Abmessung des Druckes bedienen (§. 3.), so ist nun $p$ eine Function von $q$ und $r$, und so beschaffen, daſs sie mit diesen Gröſsen zugleich wächst und abnimmt. Sie läſst sich allemal, wie sie auch von $q$ und $r$ abhängen mag, als Ordinate einer Fläche vorstellen.

Man nehme nämlich auf der geraden Linie $AD$ (Fig. 4.) die Abscisse $AR = r$, und in der Ebene der Tafel die senkrechte Ordinate $RQ = q$; aus $Q$ aber ziehe man senkrecht auf diese Ebene die Linie $QP = p$, als Ordinate einer Fläche, welche, wenn ihre Natur bekannt wäre, für jede andre Wärme $Ar$ und Dichtigkeit $rq$, durch die bis an sie gezogene Ordinate $qp$ den zugehörigen Druck angeben würde. Für jede Wärme $AR = r$ kann man in der Ordinate $RQ$ eine kleinste Dichtigkeit $RM$ annehmen, welche die Luft erlangt, wenn sie gar keinen Druck leidet, und eine gröſste Dichtigkeit $RN$, welche sie erst bei unendlich vermehrtem Drucke erreichen würde: da würde dann bei $M$ die Ordinate $QP = p$ verschwinden und bei $N$ unendlich werden. Sind $m$ und $n$ ähnliche Punkte in der Ordinate $rq$, so wird die krumme Fläche in $Mm$ die Abscissenebene berühren, von da gegen $Nn$ sich immer mehr erheben und in $Nn$ eine unendliche Höhe erreichen: über $Mm$ und $Nn$ hinaus aber sich nicht erstrecken.

Ohne Zweifel gibt es auch in der Axe $AD$ zwei Gränzen, deren eine der kleinsten, die andere der gröſsten Wärme entspricht, welche die Luft anzunehmen fähig ist, und durch diese würde dann ein Raum begränzt, über welchem die ganze krumme Fläche läge.

21. Auch hier läſst sich eine Formel angeben, welche die Abhängigkeit der Gröſse $p$ von $q$ und $r$ einigermaſsen der Natur gemäſs ausdrückt, indem man

$$p = n\,(rq - A) \cdot \sqrt{\frac{qr - A}{B - qr}}$$

setzt, wo dann $A$, $B$, beständige Gröſsen sind, und $B > A$. Hier wird der Druck allemal $= 0$, wenn $q = \frac{A}{r}$ ist, und dieses wäre folglich die keinste Dichtigkeit, welche bei der Wärme $= r$ Statt finden kann. Hingegen wird $p = \infty$, wenn $q = \frac{B}{r}$, daher dieses die gröſste Dichtigkeit ist, welche die Luft bei der Wärme $= r$ annehmen kann. Diese Formel gibt gleich groſse Werthe für $p$, wenn die Dichtigkeit der Wärme umgekehrt proportional ist, oder wenn $qr$ einerlei Gröſse behält, und zwischen $A$ und $B$ fällt, und dieses scheint auch der Erfahrung gemäſs zu seyn.

Dieselbe Formel läſst sich auch auf Wasser anwenden, wenn man nur $B = A$, folglich auch $qr = A$ setzt. Da müſste also allemal die Dichtigkeit umgekehrt der Wärme proportional seyn, und der Druck bliebe unbestimmt. Eine ähnliche Anwendung leidet auch die allgemeine Betrachtung des vorigen §., wenn man für jede Wärme die Gränzen der Dichtigkeit $M$, $N$ zusammen fallen läſst: dann wird die krumme Fläche eine auf die Abscissenebene senkrechte cylindrische Fläche, und dadurch wird angezeigt, daſs jeder Wärme eine bestimmte Dichtigkeit zugehört, bei welcher jeder Druck vom kleinsten bis zum unendlichen Statt finden kann.

22. In den gewöhnlich nur vorkommenden Fällen, wo die Dichtigkeit der Luft weder sehr groſs, noch sehr klein ist, kann man $p = nqr$ setzen, oder annehmen, daſs der Druck im zusammengesetzten Verhältnisse der Dichtigkeit und der Wärme wachse, weil bekanntlich bei gleicher Wärme der Druck fast genau der Dichtigkeit proportional ist, und man bei gleicher Dichtigkeit wenigstens für jetzt, da uns ein eigentliches Wärmemaſs noch fehlt, den Druck als der Wärme proportional annehmen kann.

Um indeſs eine auch auf Wasser anwendbare Formel zu erhalten, würde man besser $p = A + m\ (nqr - A)$ setzen, woraus für $m = 1$, $p = nqr$ wird, als ein der Natur der Luft ziemlich angemessener Werth. Für Wasser müſste man $m = \backsim$ setzen, woraus dann erhellt, daſs, wofern nicht $p = \backsim$ seyn soll, $nqr = A$ seyn müsse, oder, wie vorhin, durch die Wärme blos die Dichtigkeit bestimmt werde, der Druck aber gänzlich unbestimmt bleibe *).

23. Aus allen diesen Betrachtungen erhellet, daſs man, so verschieden Luft und Wasser auch ihrer Natur nach sind, gleichwohl die Gesetze, welche für das Gleichgewicht und die Bewegung flüssiger Körper im Allgemeinen gelten, sehr wohl auf beide anwenden könne. Gäbe es flüssige Körper, die zwischen Luft und Wasser in der Mitte lägen, so lieſsen sich auch auf diese die folgenden Untersuchungen anwenden, wenn sie nur, wie hier überhaupt angenommen wird, vollkommen flüssige Körper wären, oder die oben erklärte gleichförmige Verbreitung des Druckes nach allen Seiten vollkommen bei ihnen Statt fände. Denn nur auf solche Körper ist die ganze

---

*) Da diese Formeln mehr zur Erläuterung der hier vorgekommenen Behauptungen bestimmt sind, als gerade, um auf sie Folgerungen zu gründen, so ist es hier von keiner groſsen Bedeutung, wenn sie, neuern Beobachtungen zufolge, auch nicht ganz der Natur gemäſs gefunden sind. Indeſs ist es immer mehr wahrscheinlich geworden, daſs die Elasticität der Luft bei gleicher Dichtigkeit wohl wirklich als Maſs der Wärme dienen kann; vom Wasser hingegen und andern tropfbar flüssigen Materien kann man nicht annehmen, daſs $q = \frac{A}{r}$ sey, denn, wäre dieses, so müſsten gleiche Aenderungen der Wärme auch gleiche Aenderungen des Thermometerstandes bewirken, das Thermometer möchte, aus welcher tropfbar flüssigen Materie man wollte, verfertigt seyn. Wenn z. B. bei der Wärme $= r$ das Fluidum den Raum $= a$ einnähme, und bei der Wärme $= r + \varrho$ den Raum $= a + \alpha$, so müſste der Wärme $r + 2\varrho$ der Raum $a + 2\alpha$ entsprechen, welches sich nicht genau richtig gefunden hat. (B.)

Untersuchung gerichtet, und, sofern etwa selbst Wasser und Luft nach dieser Erklärung nicht als vollkommen flüssige Körper zu betrachten wären, so würden auch auf sie die Gesetze, welche sich uns entdecken werden, nur mit Einschränkung anwendbar seyn.

---

## Zweiter Abschnitt.

### *Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, welche der Schwere und ähnlichen Kräften nicht unterworfen sind.*

---

24. Lehrsatz. Wenn auf eines Körpers Oberfläche allenthalben Kräfte nach der auf sie senkrechten Richtung wirken, und zwar so, daſs auf gleiche Stücke der Oberfläche gleiche Kräfte drücken; so heben alle diese Kräfte ihre Wirkung gegenseitig auf.

Beweis. Man bestimme (Fig. 5.) die Lage jedes Punktes der Oberfläche durch drei auf einander senkrechte Coordinaten, welche, z. B. für den Punkt $p$, die Linien $AM = x$, $MP = y$, $Pp = z$ seyn mögen, und nehme die Elemente $MN = PQ = dx$, $PR = QS = dy$; so bestimmen diese in der Abscissenebene $AMP$ ein Rechteck $PQRS$, über welchem sich das Element der Oberfläche $pqrs$ befindet. Die Gröſse dieses Recktecks ist $= dx \,.\, dy$. Auf das Stück der Oberfläche $pqrs$ sey die gerade Linie $pO$ senkrecht, und diese Linie schneide die Abscissenebene in $O$: sie bezeichnet die Richtung der auf $pqrs$ wirkenden Kraft, welche der Fläche, worauf sie drückt, proportional $= p \,.\, pqrs$ gesetzt worden ist. Aber die Fläche $pqrs$ verhält sich zu $PQRS$ wie $pO$ zu $pP$, das heiſst $pqrs : dx \,.\, dy = pO : z$, und folglich ist jene Kraft $= p \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{pO}{z}$.

Diese Kraft läfst sich nun in drei gleichgeltende nach der Richtung der drei Coordinaten zerlegen; und so findet man den aus derselben entspringenden Druck nach der Richtung $pP = \frac{pP}{pO} \cdot p \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{pO}{z}$, das ist $= p\,dx\,dy$. Man würde eben so den Druck nach der Richtung $AM = p\,dy\,dz$,
nach der Richtung $MP = p\,dx\,dz$
finden; aber da alles, was von der einen dieser drei Kräfte gilt, sich leicht auch auf die übrigen anwenden läfst, so bleibe ich bei der nach der Richtung $pP$ wirkenden Kraft stehen, welche $= p\,dx\,dy$ ist.

Da der Körper rund um begränzt ist, so treffen die Linien $pP$, $qQ$, $rR$, $sS$ seine Oberfläche nothwendig noch einmal, und schneiden ein zweites Stück der Oberfläche ab, auf welches Kräfte wirken, die nach der Richtung $Pp$ einen Druck $= p\,dx\,dy$ hervorbringen, welcher dem vorigen gerade entgegengesetzt ist. Diese Kräfte zerstören also einander gänzlich, und da, was hier von einem Stücke der Oberfläche erwiesen ist, von jedem andern auch gilt, so erhellt, dafs alle nach der Richtung der Ordinate $z$ wirkenden Kräfte einander aufheben.

Aber, so wie es ein zweites Stück der Oberfläche gab, das nach der Richtung $Pp$ einen eben so grofsen Druck leidet, als $pqrs$ nach der gerade entgegengesetzten Richtung; so gibt es auch eins, welches nach der Richtung $MA$ einen eben so grofsen Druck leidet, als das Stück $pqrs$, nach der Richtung $AM$, und folglich heben sich auch die nach der Richtung der Ordinaten $x$ wirkenden Kräfte auf, und es erhellt von selbst, dafs eben das von den nach der Richtung der Ordinaten $y$ wirkenden Kräften gilt, und dafs mithin alle Kräfte zusammengenommen, sich einander im Gleichgewichte erhalten.

25. Der Beweis dieses Satzes läfst sich kurz so übersehen. Man stelle sich die Projectionen des Stückes $pqrs$ auf die drei durch die Coordinaten gelegten Ebenen vor,

deren eine $PQRS$ in der Figur dargestellt ist; so gehört jede dieser Projectionen noch einem zweiten Stücke der Oberfläche an, weil der Körper ringsum begränzt ist. Nun aber läfst sich beweisen, dafs die auf das Stückchen $pqrs$ wirkenden Kräfte nach der Richtung $pP$ einen Druck hervorbringen, welcher der Gröfse der Projection $PQRS$ proportional ist, und dafs es dabei auf die Gröfse und Lage des Theilchens $pqrs$ weiter nicht ankomme, folglich bewirken die Kräfte, welche auf das zweite zu derselben Projection gehörende Stück der Oberfläche drücken, senkrecht auf die Ebene $PQRS$ einen eben so grofsen Druck, der aber dem ersten entgegengesetzt ist, weil alle Kräfte senkrecht auf die Oberfläche, und zwar entweder alle von innen, oder alle von aufsen drücken. — Offenbar gilt eben das auch für die Projectionen auf die beiden andern durch die Ordinaten gelegten Ebenen, und auch für jedes andre Stück der Oberfläche, und der Satz ist bewiesen.

26. Von solchen Kräften wird also ein Körper nicht in Bewegung gesetzt, er mag fest oder flüssig seyn; nur wird vorausgesetzt, dafs er sie auszuhalten im Stande sey, dafs nämlich diese Kräfte, wenn sie von aufsen auf seine Oberfläche drücken, ihn nicht in einen engern Raum zusammenpressen, und wenn sie von innen auf dieselbe wirken, ihn nicht in einen gröfsern Raum ausdehnen können. Wenn dies der Fall ist, so bringen diese Kräfte gar keine Wirkung hervor; und der Körper bleibt daher in Ruhe, ohne dafs eine neue Kraft, um ihn zu halten, erforderlich wäre.

27. Lehrsatz. Da ein äufserer Druck, welchen ein flüssiger Körper leidet, mit gleicher Kraft auf jedes Theilchen der ganzen Masse wirkt, so bleiben alle Theile des flüssigen Körpers, und, sofern man blos auf den Druck des flüssigen Körpers gegen die Wände des Gefäfses Rücksicht nimmt, auch das Gefäfs, worin sich derselbe befindet, in Ruhe.

Beweis. Da, vermöge der Natur des flüssigen Körpers, der Druck sich gleichförmig durch die ganze Masse verbreitet, so leiden die Wände des Gefäfses gerade einen solchen Druck, wie der im vorigen Lehrsatze betrachtete war; diese drückenden Kräfte heben also einander auf. Aber auf ähnliche Weise wird jedes Theilchen des flüssigen Körpers selbst von allen Seiten gedrückt, und es bleibt folglich in Ruhe, wenn es nur der Zusammendrückung zu widerstehen im Stande ist, und dieses findet Statt, wenn es diejenige Dichtigkeit besitzt, welche diesem Drucke und der Temperatur angemessen ist.

28. Ein in dieses Fluidum eingetauchter Körper wird eben so von allen Seiten gedrückt und bleibt in Ruhe, und dieses findet Statt, seine Dichtigkeit mag gröfser oder kleiner seyn, als die des umgebenden flüssigen Körpers.

29. Wenn der flüssige Körper in ein Gefäfs eingeschlossen ist, und vermittelst eines Kolbens gedrückt wird; so halten die von dem Drucke des flüssigen Körpers herrührenden Kräfte einander im Gleichgewichte; aber die auf den Kolben drückende Kraft bringt auf das ganze Gefäfs eine eben solche Wirkung hervor, wie auf einen festen Körper, und würde dasselbe mit dem eingeschlofsnen Fluido fortbewegen, wenn keine entgegengesetzte Kraft es unterstützte.

Aus diesem Grunde mufste auch in dem Lehrsatze, in Rücksicht des Druckes, den das Gefäfs leidet, bemerkt werden, dafs nur die Wirkung des Druckes, den das Fluidum selbst darauf ausübt, aufgehoben werde. Wäre, wie wir im 17. §. annahmen, das Gefäfs mit einem Fluido gefüllt, das der Zusammendrückung fähig ist, und das Gefäfs, nachdem der flüssige Körper zu einer gewissen Dichtigkeit gebracht worden, fest verschlossen, so würde der Druck auf die Wände des Gefäfses fortdauern, wenn auch die Kraft, welche vorhin, etwa vermittelst eines Kolbens, die Zusammendrückung bewirkte, zu wirken aufhörte. Und

dieser Druck ist es, von dem die Behauptung gilt, dafs er das Gefäfs nicht aus dem Zustande der Ruhe bringe. Wenn aber eine äufsere Kraft auf den Kolben fortwirkt, so ist diese allerdings im Stande, das Gefäfs mit dem darin enthaltenen Körper fortzurücken, und es ist eine besondre Kraft erforderlich, um diese Bewegung zu hindern.

30. Da wir hier den flüssigen Körper, als der Schwere und ähnlichen Kräften, welche die Körper mit ihrer Wirkung gleichsam durchdringen, nicht unterworfen ansehen, sondern blos die Wirkung äufserer Kräfte untersuchen, welche auf einen bestimmten Theil seiner Oberfläche drükken; so verdient die Verschiedenheit dieser Kräfte hier noch einmal bemerkt zu werden. Nämlich dafs jene innern Kräfte sich ganz so verhalten, als ob sie jedem Theilchen eigen wären, welches von den äufsern Kräften nicht gesagt werden kann. Indefs mufs man ja nicht den innern Druck, den jedes Theilchen wegen einer äufsern Kraft leidet, mit diesen der Schwere ähnlichen Kräften verwechseln, so wie denn auch die Art, wie wir diesen Druck in der Rechnung darstellen, von den aus der Mechanik bekannten Ausdrücken für die Wirkung der Schwere verschieden ist. Denn zur Abmessung des Druckes gebrauchen wir das Gewicht einer Säule aus bekannter Materie, deren Basis der Fläche, welche den Druck leidet, gleich ist — eine Vorstellungsart, welche für die Wirkung der Schwere nicht brauchbar ist.

31. Litte der flüssige Körper, auf den die Schwere nicht wirkt, auch keinen äufsern Druck; so würden seine Theile gar nicht auf einander drücken, und dieses Fluidum bliebe im Gleichgewichte, ohne einmal eines Gefäfses zu bedürfen, das seine Theile zusammenhielte.

In diesem Falle ist also der Druck $= 0$, oder wenn man ihn durch das Gewicht einer Säule darstellt, so ist die Höhe derselben $= 0$; und wenn ein Gefäfs den flüssigen Körper einschliefst, so leiden dessen Wände gar keinen Druck.

Dieses bleibt wahr, der flüssige Körper mag homogen oder aus ungleichartigen Materien gemischt, er mag einer Zusammendrückung fähig seyn oder nicht; nur findet in Rücksicht der letztern Eigenschaft die Verschiedenheit Statt, dafs Körper, welche sich nicht zusammendrücken lassen, die der Temperatur angemessene Dichtigkeit behalten, diejenigen aber, welche einer Compression fähig sind, die kleinste bei dieser Temperatur mögliche Dichtigkeit annehmen; und damit nichts sie hindere, diese zu erreichen, so ist es am besten, hier die Vorstellung eines einschliefsenden Gefäfses gänzlich zu entfernen.

Sobald aber der flüssige Körper einen Druck von aufsen leidet, so mufs er in ein Gefäfs eingeschlossen seyn, welches diesen Druck aushält, und das Zerfliefsen hindert. Wir wollen diesen Fall jetzt noch etwas näher betrachten.

32. Problem 1. Wenn auf einen flüssigen Körper, der sich nicht zusammendrücken läfst, aber in ein Gefäfs eingeschlossen ist, irgend eine äufsere Kraft wirkt, den Druck zu bestimmen, der daraus in jedem Theile der flüssigen Masse entsteht.

Auflösung. Die Grundfläche *O* (Fig. 1.) des Kolbens, auf welche senkrecht die Kraft drückt, sey $= ff$; die Kraft selbst sey einem Gewichte *P* gleich: denn jeder Druck läfst sich mit einem Gewichte vergleichen. Nimmt man nun eine homogene Materie an, deren Dichtigkeit $= 1$ ist, und stellt sich eine aus derselben bestehende Säule über der Grundfläche $= ff$ vor, so mufs, wenn ihre Masse oder Gewicht $= P$ seyn soll, die Höhe der Säule, welche ich $p$ nenne, $= \frac{P}{ff}$ seyn; oder man kann, um die Höhe $p$ in die Rechnung zu bringen, statt *P* seinen Werth $P = pff$ setzen. Nach den vorigen Sätzen bleibt der Druck, den die Theile des flüssigen Körpers leiden, einerlei, wenn die auf das Fluidum drückende Kraft in gleichem Verhältnifs mit der gedrückten Fläche zu- oder abnimmt, oder sie

bleibt allemal einerlei, so lange die Höhe $p$ denselben Werth behält, und diese dient also als Maſs des Druckes.

Sucht man nun den hieraus entstehenden Druck auf die Wände des Gefäſses; so muſs man sich diese in kleine Theile zerlegt denken, weil der Druck auf jede Stelle senkrecht ist, und man eine unrichtige Bestimmung erhielte, wenn man ein Stück der Wand so groſs nähme, daſs diese Richtungen nicht als parallel anzusehen wären. Es sey also in der innern Hölung des Gefäſses $cd$ ein solches Stück der Wand, das man als eben betrachten darf, und die Gröſse seiner Fläche $= kk$; so wird der senkrechte Druck, den es leidet, $= kk.p$, und man findet hieraus den Druck, welchen irgend ein gegebener Theil der Wand aushält.

Auch jedes Theilchen des flüssigen Körpers leidet einen Druck; aber da dieser von allen Seiten gleich groſs ist, und der flüssige Körper keine Zusammendrückung zuläſst, so bringt derselbe gar keine Wirkung hervor. Wäre ein andrer fester Körper in das Fluidum eingetaucht, so litte auch er diesen Druck, und bliebe in Ruhe.

Ob der flüssige Körper aus einerlei oder aus verschiedenen Materien besteht, darauf kommt hier nichts an, wenn nur alle diese Materien keine Zusammendrückung erlauben; denn alsdann behalten alle die Dichtigkeit, welche der Temperatur angemessen ist.

33. Wie auch immer die ungleichartigen Materien hier gemischt seyn mögen, so findet in jedem Falle das Gleichgewicht Statt, und es ist hier nichts, was die eine Materie von der andern abzusondern strebte, sondern die Mischung bleibt fortdauernd in dem Zustande, worin sie sich einmal befindet. Auch hängt der Druck, den die Wände des Gefäſses leiden, nicht von der Dichtigkeit des flüssigen ab, und ist gleich groſs, es mag eine dichtere oder dünnere Materie irgend eine Stelle der Wand berühren.

Eben dieses würde Statt finden, wenn die ungleiche Dichtigkeit eine Folge der ungleichen Temperatur wäre.

Befände sich in dem Gefäſse Wasser, das zum Theil warm, zum Theil kalt wäre; so würde jedes Theilchen die seiner Temperatur gemäſse Dichtigkeit haben; aber Bewegung würde nicht entstehen. — Denn, was etwa die Mittheilung der Wärme für Wirkungen hervorbringe, davon kann hier nicht die Rede seyn, weil blos der Druck des Kolbens in Betrachtung gezogen wird, und die Temperatur jedes Theilchens als unveränderlich betrachtet wird.

34. Die Erfahrung können wir zur Bestätigung dieses Satzes nicht zu Rathe ziehen. Bekanntlich lehrt sie, daſs bei einer solchen Mischung verschiedener Materien allerdings der dichtere sich von dem weniger dichten absondert, indem jener sich zu Boden senkt, dieser aber sich in die Höhe begibt; aber diese Erscheinung ist offenbar blos Wirkung der Schwere, deren Betrachtung wir hier bei Seite setzen. Aus unsrer gegenwärtigen Betrachtung erhellt also, daſs da, wo keine Schwere wirkt, jede willkürliche Mischung bestehen kann, und daſs kein äuſserer Druck die Ruhe stört.

Eben so wichtig ist die Bemerkung, daſs eingetauchte Körper ihre Lage ungeändert behalten, und daſs dabei nichts auf ihre Dichtigkeit ankomme. Nur dann findet hier eine Ausnahme Statt, wenn der Körper sich zusammendrücken oder zerdrücken läſst — ein Fall, dessen weitere Erörterung nicht hieher gehört.

35. Problem 2. Wenn ein der Zusammendrückung fähiger flüssiger Körper in einem Gefäſse vermittelst eines Kolbens gedrückt wird, auſser dem Drucke, welchen jedes Theilchen leidet, auch die Dichtigkeit an jeder Stelle für den Zustand des Gleichgewichts zu bestimmen.

Auflösung. Das Gefäſs *ABCDEF* (Fig. 2.) sey mit einem solchen, der Luft ähnlichen Fluido gefüllt, und dieses durch eine auf den Kolben drückende, dem Gewichte *P* gleiche Kraft in den Zustand des Gleichgewichts gebracht; so läſst sich der Druck ganz nach denselben Regeln bestim-

men, wie im vorigen Problem, indem es dabei auf die übrigen Eigenschaften des flüssigen Körpers nicht ankommt. Um aber die Dichtigkeit an jeder Stelle anzugeben, müſste man auch den Grad der Wärme für jede Stelle kennen; wäre diese z. B. in dem Punkte $Q = r$; so läſst sich, wenn aus der Erfahrung bekannt ist, wie, bei dieser Temperatur, die Dichtigkeit dieses flüssigen Körpers vom Drucke abhänge, die Dichtigkeit bestimmen, welche in dem Punkte $Q$ Statt findet. Eben so könnte man für jede andre Stelle die Dichtigkeit finden, und das selbst dann, wenn der flüssige Körper aus verschiedenen Materien gemischt wäre, wofern man nur das Gesetz kennt, nach welchem Druck und Dichtigkeit bei dem an einer bestimmten Stelle befindlichen Fluido von einander und von der Temperatur abhängen.

36. Damit bei dem gegebnen Drucke auf den Kolben das Gleichgewicht eintrete, muſs der Kolben so weit fortgerückt werden, bis die Dichtigkeit dem Drucke angemessen ist. Wann das geschehe, läſst sich bestimmen, wenn man weiſs, wie die Höhe $p$, welche den Druck abmiſst, von der Dichtigkeit abhängt.

Würde jetzt der Kolben mit dem Gefäſse vereinigt, so würde derselbe Druck auf die Wände und auf jeden Theil des flüssigen Körpers fortdauern, und aus dem bekannten Drucke, welcher die Zusammendrückung bewirkte, läſst sich auch dann noch, mit Rücksicht auf die während der Zusammendrückung Statt findende Temperatur, die Dichtigkeit bestimmen. Wäre hingegen die Kraft unbekannt, welche erfordert ward, um in einem fest verschlossenen Gefäſse den flüssigen Körper zu seiner jetzigen Dichtigkeit zu bringen; so kann man auch umgekehrt aus der Dichtigkeit und Wärme den Druck bestimmen, den der flüssige Körper ausübt, oder die Kraft, welche an einem beweglichen Kolben angebracht werden müſste, um das Fluidum in seinem gegenwärtigen Zustande zu erhalten.

37. Kennt man die Dichtigkeit jedes einzelnen Theilchens, so läſst sich auch die Masse des ganzen flüssigen Körpers bestimmen, wenn man für jedes Theilchen das Product aus dem Volumen in seine Dichtigkeit sucht, und alle diese Producte summirt, oder das Integral des Products aus der Dichtigkeit in das Volumen jedes Theilchens auf den ganzen Körper erstreckt. Diese Bestimmung der Masse kommt besonders bei der Bewegung in Betrachtung.

38. Da wir zur Bestimmung des Druckes die Vorstellung einer andern homogenen Materie von der Dichtigkeit $= 1$ zu Hülfe genommen haben, so muſs jede andre Dichtigkeit durch eine Zahl ausgedrückt werden, welche sich zur Einheit verhält, wie diese Dichtigkeit zu jener; nennt man also die Dichtigkeit des flüssigen Körpers allgemein $= q$, so zeigt diese Zahl $q$ an, um wie viel mal der flüssige Körper an der bestimmten Stelle dichter sey, als jener, dessen Dichtigkeit $= 1$ ist.

Für die Wärme fehlt es uns an einem bestimmten Maſse, da wenigstens die gewöhnlichen Thermometer nur Unterschiede, nicht Verhältnisse der Wärme angeben. Man kann indeſs als das wahrscheinlichste Maſs der Wärme den Druck annehmen, den einerlei Luft bei gleicher Dichtigkeit ausübt. Nennt man für eine bestimmte Dichtigkeit $= b$ und Wärme $= c$ den Druck $= a$, und bei derselben Dichtigkeit für die Wärme $r$ den Druck $= p$, so würde, nach dieser Art die Wärme abzumessen, $p = \frac{ar}{c}$ seyn. Bei einer andern Dichtigkeit $= q$ aber könnte man in den gewöhnlichen Fällen, da der Druck ziemlich genau der Dichtigkeit proportional ist, $p = \frac{aqr}{bc}$ setzen, und folglich verhielte sich $r$ direct wie die Elasticität, und umgekehrt wie die Dichtigkeit der Luft, wo dann jene durch das Barometer, diese durch das Luftthermometer angezeigt wird.

## Dritter Abschnitt.

### *Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper, welche der Wirkung beschleunigender Kräfte unterworfen sind.*

---

39. Problem 3. Wenn auf einen flüssigen Körper beschleunigende Kräfte wirken, die Bedingungen des Gleichgewichts anzugeben.

Auflösung. Man betrachte irgend ein Theilchen unter der parallelepipedischen Form $klmn\varkappa\lambda\mu\nu$ (Fig. 6.); die Lage desselben sey durch die auf einander senkrechten Coordinaten $AS = x$, $SK = y$, $Kk = z$ bestimmt, so daſs die Differentiale dieser Linien die Seiten des Parallelepipedi bilden, dessen Volumen mithin $= dx \cdot dy \cdot dz$ ist. Die Dichtigkeit des flüssigen Körpers in dem Punkte $k$ sey $= q$, also die Masse des parallelepipedischen Theilchens $= q\,dx\,dy\,dz$.

Was für Kräfte nun auch auf dieses Theilchen wirken mögen, so kann man sie immer nach der Richtung der Coordinaten, oder der auf einander senkrechten Hauptaxen $AP$, $AQ$, $AR$ zerlegen. Man nenne daher die Summe derjenigen Kräfte, welche auf $k$ nach der Richtung $kl$ wirken, $= P$, die nach der Richtung $km$ wirkenden, $= Q$, und die nach der Richtung $k\varkappa$ wirkenden, $= R$, wo $P$. $Q$ $R$ Zahlen bedeuten, welche das Verhältniſs dieser Kräfte zu der als Einheit angenommenen Kraft der Schwere ausdrükken; so entstehen nach Verhältniſs der Masse des Theilchens hieraus folgende bewegende Kräfte:

nach der Richtung $AP = Pq\,dx\,dy\,dz$,
nach der Richtung $AQ = Qq\,dx\,dy\,dz$.
nach der Richtung $AR = Rq\,dx\,dy\,dz$,

in welchen Ausdrücken $P$, $Q$, $R$ als bekannte Functionen von $x$, $y$, $z$ betrachtet werden.

Da das Gleichgewicht fortdauert, so mufs die Wirkung dieser Kräfte durch den Druck, welchen eben dieses Parallelepipedum von allen Seiten leidet, aufgehoben werden. Dieser Druck sey in $k$ durch die Höhe $=p$ bestimmt, welche ebenfalls als Function von $x$, $y$ und $z$ zu betrachten ist, deren Differential daher allgemein durch

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$$

ausgedrückt werden kann *); so läſst sich der Druck, den jede Seitenfläche des Parallelepipedi leidet, in allgemeinen Ausdrücken darstellen. Denn es ist klar, daſs der Druck auf jeden Punkt der Fläche $ln\lambda\nu$ den Druck auf einen ähnlich liegenden der Fläche $km\varkappa\mu$ um $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ übertrift, weil der Ausdruck $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ nichts anders bedeutet, als den Unterschied des Druckes, welcher in zwei Punkten Statt findet, für welche $y$ und $z$ einerlei Werth haben, die aber nach der Richtung der Ordinate $x$ um $dx$ von einander abstehen. Die Gröſse jeder dieser Seitenflächen ist $= dydz$, und folglich der ganze Druck, welchen das parallelepipedische Theilchen nach der Richtung $PA$ leidet,

$$= \left(\frac{dp}{dx}\right) dx\,dy\,dz.$$

Eben so übertrift der Druck auf jeden Punkt der Seite $mn\mu\nu$ den auf jeden ähnlich liegenden in $kl\varkappa\lambda$ um $\left(\frac{dp}{dy}\right) dy$, und der Druck, den das ganze Parallelepipedum nach der

---

*) Bekanntlich bezeichnet $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ denjenigen Theil des Differentials von $p$, welchen man erhält, wenn blos $x$ als veränderlich, $y$ und $z$ aber als beständig betrachtet werden. — Und eben so erhält man das partielle Differential $\left(\frac{dp}{dy}\right) dy$, wenn man blos $y$ als veränderlich ansieht.

Richtung $QA$ leidet, ist $= \left(\frac{dp}{dy}\right) dx . dy . dz$, und endlich aus ähnlichen Gründen der Druck, den es nach der Richtung $RA$ leidet, $= \left(\frac{dp}{dz}\right) dx . dy . dz$.

Dieser Druck wirkt den bewegenden Kräften gerade entgegen, welche wir eben als Wirkung der beschleunigenden Kräfte kennen gelernt haben; und da er diesen das Gleichgewicht halten soll, so muſs

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = Pq, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = Qq, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = Rq$$

seyn, und der vorige unbestimmte Ausdruck für $dp$ wird nun in eine bestimmte Gleichung, welche $dp$ durch $P$, $Q$, $R$ und $q$ ausdrückt, veswandelt, indem

$$dp = q . (Pdx + Qdy + Rdz)$$

wird.

In dieser Gleichung ist $q$ eine Function des Druckes $= p$ und des Grades der Wärme $= r$, welcher als bekannt angenommen wird. Da man aber das Gesetz, nach welchem $q$ von $p$ und $r$ abhängt, ebenfalls als bekannt voraussetzt, so erhält man aus dieser Gleichung $p$ durch die beschleunigenden Kräfte und durch $r$ bestimmt, woraus sich alsdann auch der Werth, den $q$ an jeder Stelle für den Zustand des Gleichgewichts haben muſs, ergibt.

40. Wenn gar keine beschleunigenden Kräfte auf den flüssigen Körper wirken, also $P = Q = R = 0$, so wird $dp = 0$, oder $p$ eine beständige Gröſse, das heiſst, im Zustande des Gleichgewichts ist alsdann der Druck allenthalben gleich groſs, so wie die Sätze des vorigen Abschnitts es angaben.

Durch die Wirkung der beschleunigenden Kräfte aber wird der Druck ungleich, und es kann Stellen geben, wo er ganz verschwindet, ja vielleicht sogar Fälle, wo er negativ wird.

41. Ueberhaupt aber kann das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn die Integration der Gleichung

$$dp = q\,(Pdx + Qdy + Rdz)$$

möglich ist, und dieses findet, da sie mehrere veränderliche Gröfsen enthält, nur unter gewissen Bedingungen Statt. In denjenigen Fällen hingegen, wo sie keine Integration zuläfst, kann das Gleichgewicht nicht bestehen, wie die folgenden Untersuchungen näher zeigen werden.

42. Ich habe hier den flüssigen Körper als unbegränzt betrachtet, weil die Bedingung, dafs er in ein Gefäfs eingeschlossen sey, auf die Bestimmung des Druckes keinen Einflufs hat. Betrachtet man ihn aber nun als von einem Gefäfse umgeben, so ergibt sich aus den Formeln auch der Druck, den die Wände des Gefäfses leiden. Dieser Druck kann an einigen Stellen ganz verschwinden, und wenn das der Fall ist; so braucht das Gefäfs sich über diese Stellen gar nicht zu erstrecken, indem hier kein Zerfliefsen Statt finden kann, sondern der flüssige Körper von selbst in seinem Zustande bleibt, wenn auch das Gefäfs hier offen ist. An einer solchen Stelle nennt man die Oberfläche wagerecht, und betrachtet sie als die äufserste, weil Theile des flüssigen Körpers, die sich jenseits derselben befänden, wegen Mangel des Drucks gar nicht mit der übrigen Masse zusammenhängen würden, und in Rücksicht auf diese so gut als gar nicht vorhanden anzusehen wären. Man kann auch die Oberfläche an solchen Stellen eine freie Oberfläche nennen, weil keine andre Kräfte erfordert werden, um sie zu erhalten, oder kein Gefäfs, welches sie nöthigte, diese Gestalt zu behalten, und das Zerfliefsen hinderte. Befände sich an irgend einer andern Stelle des Gefäfses eine Oefnung, so müfste eine Kraft, etwa vermittelst eines Kolbens, entgegenwirken, um das Ausfliefsen zu hindern; aber diese Kraft ist = o, wenn die Oefnung auf die freie oder äufserste Oberfläche trift.

43. Wenn auf den flüssigen Körper keine andern beschleunigenden Kräfte wirken, als die Schwere, so ist die

freie Oberfläche zugleich die höchste und horizontal; wirkten auf denselben beschleunigende Kräfte, die gegen einen Mittelpunkt gerichtet sind, so ist die freie Oberfläche zwar ebenfalls die höchste, aber sphärisch.

44. Wie aber beim Gleichgewichte der Druck negativ werden könne, läfst sich nicht wohl einsehen. Denn da der positive Druck bei den Theilchen des flüssigen Körpers gleichsam ein Bestreben, sich gegenseitig zu durchdringen, hervorbringt, welches wegen des Widerstands, den der flüssige Körper der Compression entgegensetzt, und wegen der Undurchdringlichkeit seiner Theile ohne Wirkung bleibt; so müfste der negative Druck darin bestehen, dafs die Theilchen sich gleichsam einander abstiefsen. Wäre ein solches Fluidum nicht in ein Gefäfs eingeschlossen, so würde nichts dieses Bestreben der Theilchen, sich von einander zu entfernen, hindern, und das Gleichgewicht könnte erst entstehen, wenn die Verbindung der Theilchen aufgehoben wäre, und jedes für sich allein zur Ruhe käme. Aber bei dieser Zertrennung hört der Körper auf, ein zusammenhängendes Fluidum zu seyn, und die Bewegung der einzelnen Tröpfchen würde so erfolgen, als ob sie feste Körper wären. In einem Gefäfse kann noch weniger ein negativer Druck Statt finden, da es unmöglich ist, dafs die Wände des Gefäfses einwärts gedrückt würden. Wenn also die Rechnung einen negativen Druck angibt, so mufs man allemal annehmen, dafs eine Zerstreuung in Tropfen Statt finde, und folglich die Betrachtung des Zustandes, in welchen der flüssige Körper alsdann kommt, nicht mehr zu den Untersuchungen gehöre, wovon hier die Rede ist, weil alle hier angestellte Untersuchungen auf der Voraussetzung beruhen, dafs der flüssige Körper ein Continuum ist.

Auch bei der Bewegung flüssiger Körper bleibt es noch wahr, dafs ein negativer Druck nur dann Statt finden kann, wenn der Zusammenhang aufhört. Einige Schriftsteller haben zwar bei der Bewegung des Wassers in Röhren von einem negativen Drucke geredet, aber dieser vermeintlich

negative Druck ist blos geringer als der Druck der Atmosphäre, aber immer noch positiv. Ein wirklich negativer Druck läſst sich nur da annehmen, wo der flüssige Körper sich in Tropfen zertrennt, z. B. bei Springbrunnen, nachdem das Wasser seine gröſste Höhe erreicht hat, oder bei Wellen, die überstürzen und schäumen, wo ebenfalls die Spitze der Welle sich in Tropfen zertheilt.

45. Die beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$ darf man hier nicht willkürlich fingiren, sondern muſs sie so annehmen, wie sie in der Natur vorkommen. Daher gehört zuerst die Kraft der Schwere hieher, deren Gröſse und Richtung als einerlei in jedem Theile der ganzen Masse angenommen wird. Nur bei einer sehr groſsen Ausdehnung des flüssigen Körpers ist es nothwendig, die Richtungen der Schwere als convergirend zu betrachten, z. B. bei Untersuchungen über das Meer oder die Atmosphäre. Ferner gehören hieher die anziehenden Kräfte, wodurch die Himmelskörper auf einander, und alle Theilchen eines jeden unter sich auf einander wirken.

Alle diese Kräfte aber haben die für uns sehr merkwürdige Eigenschaft, daſs für sie die Differentialformel $Pdx + Qdy + Rdz$ immer ein wahres Differential ist, oder daſs

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

ist, daſs es also allemal eine Function von $x$, $y$ und $z$ gibt, aus deren Differentiation jene Formel entsteht.

45. *b*) Die Integrabilität der Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ findet nämlich im Allgemeinen Statt, wenn die auf den Punkt $k$ wirkende beschleunigende Kraft eine Function der Entfernung von einem in der Richtung der Kraft liegenden Punkte ist, oder auch die Summe mehrerer solcher Kräfte. Wenn z. B. auf $k$ (Fig. 6.) eine beschleunigende Kraft nach der Richtung $Ak$ wirkt, und diese Kraft $= S$ ist eine Function der Entfernung $kA = s$, so überzeugt

man sich leicht, daſs aus der Zerlegung derselben nach der Richtung der drei Axen die Kräfte

$$P = \frac{Sx}{s},\quad Q = \frac{Sy}{s},\quad R = \frac{Sz}{s}$$

entstehen, also

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{S}{s}(xdx + ydy + zdz)$$

wird. Aber da $s = Ak = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ ist, so hat man $\frac{xdx + ydy + zdz}{s} = ds$, folglich $Pdx + Qdy + Rdz = Sds$, wo das letzte Glied offenbar integrabel ist, wenn $S$ eine Function der Gröſse $s$ ist.

Wirkte auſser dieser eine zweite Kraft nach der Richtung $ak$ auf den Punkt $k$, und wäre diese Kraft $S'$ eine Function der Entfernung $ak = S'$, so würden ähnliche Schlüsse gelten. Es sey nämlich für die Lage des Punktes $a$ $Ac = a$, $cb = b$, $ba = c$, so ist die Entfernung

$$ak = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]},$$

und aus der Zerlegung der Kraft $S'$ entstehen nach der Richtung der Axen die Kräfte

$$P' = \frac{S'(x-a)}{s'},\quad Q' = \frac{S'(y-b)}{s'},\quad R' = \frac{S'(z-c)}{s'}.$$

Die gesammte Kraft, welche nun nach der Richtung der Coordinate $x$ wirkt, ist also jetzt

$$= P + P' = \frac{Sx}{s} + \frac{S'(x-a)}{s'},$$

die nach der Richtung der Coordinate $y$ wirkende

$$= Q + Q' = \frac{Sy}{s} + \frac{S'(y-b)}{s'},$$

die nach der Richtung der Coordinate $z$ wirkende

$$= R + R' = \frac{Sz}{s} + \frac{S'(z-c)}{s'}.$$

Man hat also nun statt der obigen Differentialformel

$$(P+P')dx + (Q+Q')dy + (R+R')dz$$

$$= \frac{S}{s}(xdx + ydy + zdz) + \frac{S'}{s'}[(x-a)dx + (y-b)dy$$
$$+ (z-c)dz)] = Sds + S'ds',$$

wo jedes Glied integrabel ist, weil $S$ blos von $s$, $S'$ blos von $s'$ abhängt. Es erhellet also leicht, daſs man eine Summe mehrerer ähnlichen Ausdrücke $= Sds + S'ds' + S''ds'' +$ etc. erhielte, wenn noch mehrere Kräfte auf $k$ wirkten, deren jede eine Function der Entfernung des Punktes $k$ von einem in der Richtung der Kraft liegenden festen Punkte wäre, und daſs die ganze Summe dieser Differentialformel integrabel ist, was für eine Function der Entfernung von jenen in der Directionslinie jeder Kraft liegenden Punkten jede Kraft auch sey.

Dieser Fall aber ist gerade der in der Natur vorkommende, wo nämlich jedes Theilchen entweder gegen einen oder gegen mehrere Mittelpunkte durch Kräfte angezogen wird, deren jede eine Function der Entfernung des angezognen Theilchens von diesem Mittelpunkte ist.

45 *c*). Diese Function oder das Integral der Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ ist desto merkwürdiger, weil sie einerlei mit dem ist, was Maupertuis bei seinen Untersuchungen über das Princip der kleinsten Wirkung die Gröſse der Wirkung nennt. Bezeichnet man nämlich die Gröſse der Wirkung mit $V$, so ist

$dV = Pdx + Qdy + Rdz$, und folglich $dp = qdV$.

Da nun $q$ durch $p$ und $r$ bestimmt ist, so muſs $r$ so beschaffen seyn, daſs die Integration möglich ist, in jedem andern Falle könnte das Gleichgewicht nicht bestehen.

Nähme man dagegen die Kräfte $P$, $Q$, $R$ anders an, so daſs die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ nicht integrabel wäre, so würde gar kein Gleichgewicht für den flüssigen Körper Statt finden, wenn nicht etwa $r$ so beschaffen wäre, daſs durch den Werth von $q$ die Integration möglich würde.

46. Problem 4. Wenn ein der Wirkung beschleunigender Kräfte unterworfener flüssiger Körper in Ruhe ist,

den Druck zu bestimmen, welchen ein in demselben untergetauchter fester Körper von dem umgebenden Fluido leidet.

Auflösung. *BCDE* (Fig. 7.) sey der feste Körper, der in dem flüssigen untergetaucht ist. Dieser Körper leidet eben den Druck, welchen die flüssige Masse, deren Raum er einnimmt, leiden würde; man kann sich daher statt des festen Körpers den ganzen Raum mit einem Fluido ausgefüllt vorstellen. Da nun der flüssige Körper in Ruhe seyn soll, so mufs der Druck, welchen diese statt des festen Körpers substituirte Masse leidet, der Wirkung der beschleunigenden Kräfte auf sie gleich und entgegengesetzt seyn. Die Wirkung der beschleunigenden Kräfte aber läfst sich nur bestimmen, wenn auch die Dichtigkeit bekannt ist, welche der flüssige Körper an jeder Stelle im Zustande des Gleichgewichts haben müfste; und wenn man diese kennt, und die Wirkung der Kräfte auf die substituirte flüssige Masse gefunden hat, so ist der Druck, den der feste Körper leidet, ebenfalls gefunden, weil er jener Wirkung der beschleunigenden Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

47. Die Kenntnifs der auf den flüssigen Körper wirkenden Kräfte reicht also zur Bestimmung des Druckes, den der feste Körper leidet, nicht hin, sondern auch die Dichtigkeit, welche das Fluidum an dieser Stelle annehmen würde, kommt in Betracht, und jener Druck kann also selbst von der Temperatur abhängen. Hieraus folgt auch, dafs in demselben Fluido der feste Körper vielleicht einen andern Druck leiden kann, wenn er sich an einer andern Stelle, oder auch nur in einer andern Lage befindet, denn theils können die beschleunigenden Kräfte an verschiedenen Stellen ungleich seyn, theils kann bei der veränderten Lage der Körper an Stellen kommen, wo die Dichtigkeit des flüssigen Körpers gröfser oder kleiner ist, als sie da, wo er sich vorhin befand, Statt finden kann.

Wirken aber auf jedes Theilchen des flüssigen Körpers einerlei beschleunigende Kräfte, und ist die Dichtigkeit allenthalben gleich grofs, so ändert der Druck auf den festen Körper sich nicht, wenn auch seine Lage verändert wird; denn der Druck hängt alsdann blos vom Volumen des festen Körpers ab.

48. In denjenigen Fällen, wo die beschleunigenden Kräfte und die Dichtigkeit nicht allenthalben gleich grofs sind, würde die Berechnung des Druckes auf den festen Körper sehr viele Schwierigkeit haben, denn man müfste, wenn z. B. das Parallelepipedum (Fig. 6.) sich in dem Raume, den der Körper einnimmt, befände, die Integrale der Formeln $Pq\,dx\,dy\,dz$, $Qq\,dx\,dy\,dz$, $Rq\,dx\,dy\,dz$ auf das ganze Volumen des festen Körpers erstreckt, suchen, wo noch überdies $q$ erst als Function von $x$, $y$, $z$ ausgedrückt werden müfste. Diese Schwierigkeiten vermindern sich in den Fällen, welche in der Natur vorkommen, wovon bald die Rede seyn wird.

49. Der Druck auf den festen Körper läfst sich noch auf einem andern, freilich im Allgemeinen nicht minder schwierigen, Wege finden. Man könnte nämlich für jede Stelle der Oberfläche des Körpers den Werth von $p$ suchen, diesen nach der Richtung der drei Coordinaten zerlegen, und den Druck nach jeder dieser drei Richtungen für den ganzen Körper in eine Summe bringen. Aber auch hier wird die Integration der Gleichung für $dp$ vorausgesetzt, und die Rechnung würde sehr oft allzuverwickelt werden. Nur das wäre hiebei vortheilhaft, dafs man die bei der Integration vorkommende beständige Gröfse nicht in Betrachtung zu ziehen brauchte, weil gleicher Druck von allen Seiten sich aufhebt, und der feste Körper nur in sofern von dem Drucke des flüssigen zur Bewegung angetrieben wird, als dieser an verschiedenen Stellen ungleich ist.

Aus der so gefundenen Kraft würde sich dann, wenn man die übrigen auf den festen Körper wirkenden Kräfte

damit vergliche, bestimmen lassen, ob der feste Körper in Ruhe bleiben könne; oder, da hier nur von dem Zustande der Ruhe die Rede ist, so würde die Kraft bestimmt werden, welche erforderlich wäre, um ihn im Gleichgewichte zu erhalten.

50. Problem 5. Der feste Körper sey nur zum Theil in den flüssigen eingetaucht, man soll den Druck bestimmen, den er an seinem eingetauchten Theile leidet, wenn, wie vorhin, auf den flüssigen Körper beschleunigende Kräfte wirken und derselbe sich im Gleichgewichte befindet.

Auflösung. Dieser Fall kann nur bei einem Fluido vorkommen, welches irgendwo eine freie Oberfläche hat, die nicht mit einem Gefäſse überdeckt ist. *FCGE* (Fig. 8.) sey diese freie Oberfläche des flüssigen Körpers, der sonst in ein Gefäſs eingeschlossen seyn kann: der feste Körper *BCDE* sey so eingetaucht, daſs nur ein Theil desselben sich innerhalb des flüssigen befinde. Offenbar kann der Druck des flüssigen Körpers auf die Oberfläche des eingetauchten festen sich nicht ändern, wenn man den hervorragenden Theil *CBE* nach der Richtung der freien Oberfläche wegnimmt, das übrige Stück aber kann man dann als ganz untergetaucht betrachten, oder sich als mit einer unendlich dünnen Schichte des flüssigen Körpers überdeckt denken, welche keinen Druck ausübt, weil in der freien Oberfläche *FCGE* der Druck verschwindet. Bei der Bestimmung des Druckes findet also alles das Anwendung, was bei Gelegenheit des vorigen Problems angeführt ist, blos mit dem Unterschiede, daſs man nur auf den eingetauchten Theil des Körpers beziehen muſs, was dort von dem ganzen Körper galt.

51. Wird dieser Druck, den der eingetauchte Körper leidet, von den übrigen auf denselben wirkenden Kräften ganz aufgehoben, so bleibt er in diesem Zustande und ruhet; im entgegengesetzten Falle aber würde er sich mehr

oder weniger eintauchen, oder eine andre Lage annehmen, wenn nicht eine neue Kraft hinzugefügt wird, um das Gleichgewicht zu erhalten.

52. Die Elementarkräfte, welche aus der Wirkung der beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$ auf einen bestimmten Theil des flüssigen Körpers entstehen, lassen sich nicht immer auf eine einzige Kraft bringen, die allen äquipollent ist, sondern man muſs sie oft auf zwei oder drei Kräfte bringen, weil wenigere nicht eben das zu leisten im Stande sind. Diese Kräfte werden eben so, wie bei festen Körpern, bestimmt. Man müſste z. B. für die flüssige Masse, die man an die Stelle eines eingetauchten festen Körpers substituirt, zuerst den Mittelpunkt der Masse suchen; alsdann drei durch denselben gehende, auf einander senkrechte Axen annehmen, und alle Elementarkräfte auf den Mittelpunkt der Masse übertragen, wo sich dann allemal eine einzige Kraft angeben läſst, welche diesen allen äquipollent ist. Ferner muſs man die Momente der Elementarkräfte in Rücksicht der drei Axen suchen, um das Moment aller Kräfte gegen diese Axen für den ganzen Körper zu finden. Denkt man sich dann an dem festen Körper, den wir jetzt wieder anstatt des flüssigen substituiren, jene Kräfte mit diesen Momenten nach entgegengesetzter Richtung angebracht, so ergibt sich leicht die Wirkung, welche sie auf denselben hervorbringen, und was für Kräfte zur Erhaltung des Gleichgewichts nothwendig sind.

53. Problem 6. Der flüssige Körper, auf welchen beschleunigende Kräfte wirken, ist in ein Gefäſs eingeschlossen, man sucht den Druck, den, im Zustande des Gleichgewichts, das ganze Gefäſs leidet, oder die Kraft, welche nöthig ist, um das ganze Gefäſs im Gleichgewichte zu erhalten.

Auflösung. Wenn der Druck auf jede Stelle des Gefäſses gleich groſs wäre, so würde das Gefäſs ohne Beihülfe einer andern Kraft im Gleichgewichte bleiben. Aber

dieser Druck wird ungleich, wenn beschleunigende Kräfte, wie hier die mit *P*, *Q*, *R* bezeichneten, auf den flüssigen Körper wirken; und man übersieht leicht, daſs der Druck, den das ganze Gefäſs leidet, aus der gesammten Wirkung aller beschleunigenden Kräfte auf jedes Theilchen des flüssigen Körpers zusammengesetzt, oder der Summe derselben gleich ist. Denn wenn die ganze Masse, ohne ihre Dichtigkeit zu ändern, und während die Wirkung der beschleunigenden Kräfte fortdauert, sich in einen festen Körper verwandelte, so könnte man offenbar alle diese Kräfte als unmittelbar auf das Gefäſs wirkend betrachten.

Die Richtigkeit dieser Behauptung läſst sich auch aus den bisherigen Schlüssen herleiten. Man betrachte nämlich das Gefäſs als in ein unbegränztes Fluidum eingetaucht, und seine Wände als so dünne, daſs der Druck des äuſsern flüssigen Körpers sich dem im Gefäſse enthaltenen mittheilen könne; so muſs, wenn das Gleichgewicht fortdauern soll, der Druck von auſsen dem von innen (welcher von dem im Gefäſse enthaltenen Fluido herrührt) gleich seyn. In Rücksicht des Druckes, den das Gefäſs von auſsen leidet, ist es aber völlig wie ein eingetauchter fester Körper zu betrachten, und es ist erwiesen, daſs der Druck, den ein solcher leidet, der Wirkung aller beschleunigenden Kräfte, denen dieser Theil des flüssigen Körpers unterworfen ist, gleich sey, folglich ist der Druck des eingeschlossenen Fluidi auf das Gefäſs eben so groſs, und es wird hiedurch die Kraft bestimmt, welche nothwendig ist, um das Gefäſs zu unterstützen, oder im Gleichgewichte zu erhalten.

54. Der gesammte Druck auf das ganze Gefäſs ist also eben so groſs, als wenn die flüssige Masse mit dem Gefäſse einen festen Körper ausmachte; aber der Druck, den jede einzelne Stelle der Wände leidet, ist ganz verschieden von dem Drucke eines festen Körpers.

55. Es ist bisher angenommen, der flüssige Körper sey ganz in ein Gefäſs eingeschlossen, auſser daſs an Stel-

len, wo der Druck verschwindet, die Oberfläche unbedeckt seyn kann. Wäre aber anderswo eine Oefnung im Gefäſse, die, um das Ausflieſsen zu verhindern, durch einen mit einer gewissen Kraft gegen den Druck von innen wirkenden Kolben geschlossen würde; so hätte das Gefäſs auſser dem Drucke des flüssigen Körpers nun auch noch diesen Druck auszuhalten; und da diese äuſsere Kraft sehr ungleich seyn kann, je nachdem des Kolbens Grundfläche gröſser oder kleiner ist, so kann auch der ganze Druck, den das Gefäſs leidet, sehr verschieden werden. Sobald aber der Kolben mit dem Gefäſse vereinigt wird, und die äuſsere Kraft, welche ihn vorhin gegen den Druck von innen erhalten muſste, zu wirken aufhört, so wird das Gefäſs blos von dem vorhin aus der Wirkung der beschleunigenden Kräfte bestimmten Drucke zur Bewegung angetrieben, und die Kraft, welche dasselbe im Gleichgewichte erhalten soll, wird blos aus dieser bestimmt.

---

## Vierter Abschnitt.

### *Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, auf welche blos die Schwere wirkt.*

---

56. Problem 7. Wenn auf einen flüssigen Körper blos die Schwere nach verticaler Richtung wirkt, alle Bedingungen des Gleichgewichts anzugeben.

Auflösung. Wir betrachten hier die Schwere als eine beständige Kraft, und ihre Richtungen als unter sich parallel. Ihre Gröſse sey $= g$, um allgemein zu übersehen, wie die Erscheinungen sich bei einer gröſsern oder geringern Schwerkraft, als die an der Oberfläche der Erde Statt findende, welche wir $= 1$ setzen, verhalten würden.

Die Ebene $AXY$ (Fig. 9.) sey horizontal, also die Richtung der Schwere senkrecht auf dieselbe; $Z$ sey ein Theilchen des flüssigen Körpers, dessen Lage durch die auf einander senkrechten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt wird. In dem Punkte $Z$ sey der Grad der Wärme $= r$, die Dichtigkeit des flüssigen Körpers $= q$, und die Höhe, welche den Druck abmifst, $= p$; auch sey aus der Natur des flüssigen Körpers, wenn nämlich derselbe homogen ist, das Gesetz bekannt, nach welchem $q$ von $p$ und $r$ abhängt; oder, wenn er nicht homogen ist, so sey $q$ als Function der übrigen Gröfsen gegeben. Da nun das Theilchen $Z$ von der beschleunigenden Kraft $= g$ nach der Richtung $ZY$ niederwärts getrieben wird, und keine andre Kräfte auf dasselbe wirken, so ist in den allgemeinen Ausdrücken des vorigen Abschnitts $P = 0$, $Q = 0$, $R = -g$, daher wird die Gleichung, welche die Bedingung des Gleichgewichts enthält (§. 39.), hier $dp = -gqdz$, und das Gleichgewicht kann nur dann bestehen, wenn sich diese Gleichung integriren läfst.

Hieraus lassen sich nun leicht auch die übrigen Probleme des vorigen Abschnitts ebenfalls auflösen. Wenn nämlich der feste Körper $BCDE$ (Fig. 7.) in dem Fluido untergetaucht ist; so ist die Kraft, welche ihn aufwärts treibt, so grofs, als das Gewicht der flüssigen Masse, welche beim Zustande des Gleichgewichts seinen Raum einnehmen würde, und die Richtung dieser Kraft geht durch den Schwerpunkt derselben flüssigen Masse. Es sey also, innerhalb des Körpers $BCDE$, $G$ der Punkt, wo der Schwerpunkt der substituirten flüssigen Masse liegen würde, und das Gewicht dieser Masse sey $= G$, so ist auch die Kraft, welche den untergetauchten Körper aufwärts treibt, $= G$, und ihre Richtung geht durch den Punkt $G$.

Eben so findet man den Druck, den ein zum Theil eingetauchter Körper leidet, wenn man das eben gesagte blos auf den eingetauchten Theil desselben bezieht.

Der Druck endlich, welchen das ganze Gefäſs leidet, ist dem Gewichte der flüssigen Masse gleich, und die Richtung des Druckes geht durch den Schwerpunkt der im Gefäſse enthaltenen flüssigen Masse.

57. Die Möglichkeit des Gleichgewichts beruht also hier darauf, daſs $q$ eine Function sey, welche die Gleichung integrabel macht. Da nun bei einem homogenen Fluido die Dichtigkeit $q$ als Function von $p$ und $r$ zu betrachten ist; so kann das Gleichgewicht bei einem solchen nicht bestehen, wenn nicht der Grad der Wärme $= r$, welchen man als eine Function des Orts betrachten kann, blos von der Höhe $YZ = z$ abhängt, oder in allen Punkten, für welche $z$ denselben Werth hat, auch $r$ einerlei Werth erhält. In allen Fällen also, wo ein der Schwere unterworfenes homogenes Fluidum in verschiedenen Punkten derselben Horizontalschichte ungleich erwärmt ist, kann kein Gleichgewicht Statt finden. Allgemein aber kann, auch bei einem gemischten Fluido, das Gleichgewicht nicht bestehen, wenn nicht $q$ in jedem Punkte derselben horizontalen Schichte gleich groſs ist.

58. Die bisherigen Schlüsse gelten für jeden flüssigen Körper, er mag einer Compression fähig seyn oder nicht, und lassen sich auch auf eine Mischnng verschiedener Materien anwenden. Wir wollen jetzt zur Anwendung der Formeln auf die besondern Fälle übergehen.

*Anwendung auf flüssige Körper, welche sich nicht zusammendrücken lassen.*

59. Problem 8. Wenn der flüssige Körper homogen, und die Dichtigkeit $q$ eine beständige Gröſse ist, die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen, nebst dem Drucke, den sowohl das Gefäſs, als auch eingetauchte feste Körper leiden.

Auflösung. Da die Dichtigkeit allenthalben gleich ist, so sey $q = b$, mithin $dp = -g\,b\,dz$, und $p = g\,b\,(h - z)$,

wenn $h$ die bei der Integration hinzu kommende beständige Gröſse bedeutet.

Nach dieser Formel wird also der Druck $= 0$, wenn $z = h$ ist, oder in denjenigen Punkten, welche um die Höhe $z = h$ über der als Abscissenebene angenommenen horizontalen Ebene liegen. Hier entsteht also eine freie Oberfläche, die horizontal ist. Stellt $FEG$ (Fig. 10.) diese horizontale Oberfläche vor, und $CYD$ die Ebene, von welcher an die verticalen Ordinaten $z$ gerechnet wurden; so ist $EY = h$, und, wenn für irgend einen Punkt $Z$ die Höhe $YZ = z$ ist, so wird $p = gb\,(h - z) = gb\,.\,EZ$. In gleichen Höhen ist folglich der Druck gleich, und der Tiefe unter der freien Oberfläche proportional. Uebrigens ist der Druck auch der Schwerkraft $= g$ und der Dichtigkeit $= b$ proportional. Wenn man also annimmt, daſs der betrachtete flüssige Körper der natürlichen Schwere an der Oberfläche der Erde, die wir $= 1$ setzten, unterworfen ist, und daſs seine Dichtigkeit $= 1$, oder so groſs ist, als die Dichtigkeit derjenigen Materie, welche wir bei der Abmessung des Druckes zum Grunde legen; so wird $p = EZ$, oder die Höhe $p$, welche den Druck abmiſst, ist in diesem Falle der Tiefe unter der freien Oberfläche gleich $= h - z$.

Da das Fluidum homogen ist, so ist der Druck, den ein untergetauchter Körper leidet, so groſs, als das Gewicht eines gleichen Volumens der flüssigen Masse, und die mittlere Richtung dieses Druckes geht durch den Mittelpunkt der Gröſse des Körpers.

Der Druck auf das ganze Gefäſs endlich ist dem Gewichte der eingeschlossenen flüssigen Masse gleich.

60. Hieraus folgt nun von selbst, daſs bei jeder Gestalt des Gefäſses (Fig. 11.) auch die von einander getrennten Stücke $Ff$, $Ee$, $Gg$ der Oberfläche in derselben Horizontalebene liegen, in welcher der Formel zufolge der

Druck $= 0$ wird. In jedem tiefer liegenden Punkte $Z$ (Fig. 10.) aber ist der Druck so groſs, als das Gewicht einer aus diesem Fluido bestehenden Säule, welche die gedrückte Fläche zur Basis hat, und deren Höhe der Tiefe $EZ$ unter der Oberfläche gleich ist.

Dieses gilt auch für jede Stelle der Wände des Gefäſses, daſs nämlich der Druck in $T$ (Fig. 11.), welchen die Wand des Gefäſses nach senkrechter Richtung leidet, durch das Gewicht einer aus diesem Fluido gebildeten Säule, deren Höhe $= TV$ ist, ausgedrückt wird, wenn die Basis dieser Säule der gedrückten Fläche gleich ist.

61. Die Kraft, welche einen untergetauchten Körper aufwärts treibt, ist gleich groſs, an welcher Stelle sich auch dieser Körper befinden mag; denn, obgleich jeder Punkt seiner Oberfläche einen gröſsern Druck leidet, wenn der Körper sich tiefer unter der freien Oberfläche $GF$ befindet, so ist doch der hieraus für den ganzen Körper entstehende verticale Druck immer derselbe.

62. Aus diesen allgemeinen Sätzen läſst sich alles herleiten, was man gewöhnlich in der Hydrostatik vorzutragen pflegt; da aber diese Anwendungen der allgemeinen Gesetze bekannt genug sind, so übergehen wir sie hier, und wenden uns zu Betrachtung einiger Lehren, die man gewöhnlich nicht so sorgfältig aus einander setzt, nämlich zu Untersuchungen über das Gleichgewicht flüssiger Körper, welche aus ungleichartigen Theilen bestehen.

63. Problem 9. Wenn ein flüssiger Körper, der keiner Zusammendrückung fähig ist, aus verschiedenen Materien gemischt ist, die Bedingungen des Gleichgewichts und den Druck, den das Gefäſs und eingetauchte Körper leiden, anzugeben.

Auflösung. Alle gebrauchte Buchstaben behalten ihre bisherige Bedeutung, aber die Dichtigkeit, welche hier nicht überall gleich groſs ist, bezeichnen wir wieder, wie vorhin, mit $q$. Es ist also für den Zustand des Gleich-

gewichts $dp = - gq\,dz$ — eine Gleichung, welche nur dann sich integriren läſst, wenn $q$ von keiner andern Gröſse als von $z$ abhängt, oder wenn die Dichtigkeit in jeder horizontalen Schichte überall einerlei ist. Die verschiedenen Fluida werden also, wenn das Gleichgewicht besteht, in horizontalen Ebenen $IH$, $LK$ (Fig. 12.) einander berühren, daſs nämlich von der freien Oberfläche $FG$ bis zu einer andern horizontalen Ebene $HI$ sich ein Fluidum von gleicher Dichtigkeit befindet, und von $HI$ bis $LK$ eine andre gleichfalls homogene Materie u. s. w.

Wenn hier ein fester Körper in den flüssigen untergetaucht ist, so muſs man, um den Druck zu finden, den er leidet, das Gewicht der flüssigen Masse suchen, welche zu Erhaltung des Gleichgewichts die Stelle einnehmen müſste, in der sich jetzt der feste Körper befindet. Ist der Schwerpunkt dieser flüssigen Masse in $O$, so geht die mittlere Richtung des Druckes durch $O$, und dieser Druck ist dem Gewichte jener Masse gleich.

Um den Druck zu bestimmen, welchen irgend ein Punkt $Z$, z. B. in der Wand des Gefäſses leidet, muſs die Dichtigkeit der verschiedenen Materien bekannt seyn. Sie sey für die Schichte $FI = l$, für die Schichte $HL = m$, und für $KN = n$; so wird die Höhe, welche den Druck in $Z$ abmiſst, $= g\,[l\,.\,GI + m\,.\,IL + n\,.\,LZ]$.

64. Fluida von ungleicher Dichtigkeit gelangen also nicht eher zum Gleichgewichte, als bis sie sich in horizontale Schichten geordnet haben. Sobald aber jede horizontale Schichte durchaus von gleicher Dichtigkeit ist; so kann das Gleichgewicht bestehen, ohne daſs eben nothwendig die Schichten, deren Dichtigkeit am gröſsten ist, die untersten zu seyn brauchen. Indeſs, wenn sich ein Fluidum von gröſserer Dichtigkeit über einem weniger dichten befände, so würde das Gleichgewicht gar keine Stabilität haben, sondern bei der geringsten Erschütterung (sobald nämlich die Gränze, in welcher die beiden Fluida einander

berühren, aufhört, genau horizontal zu seyn) würde der schwerere sich zu Boden senken. Zur Stabilität des Gleichgewichts ist es also nothwendig, dafs die niedrigsten Schichten auch die schwersten sind.

Flüssige Körper, die sich mit einander vermischen, bilden nach der Mischung eine Masse, die man als homogen betrachten kann, und bei denen findet daher die Absonderung in Schichten nicht Statt.

65. Wenn auch der flüssige Körper nur aus einerlei Materie besteht, so kann doch die Dichtigkeit wegen Ungleichheit der Temperatur an verschiedenen Stellen verschieden seyn. Und hier gibt es Fälle, wo nicht blos kein Gleichgewicht Statt findet, sondern, wo sogar eine Herstellung des Gleichgewichts ganz unmöglich ist. Bei einer Mischung ungleich schwerer Materien stellt sich doch endlich das Gleichgewicht her, wenn sich die schwerern zu Boden senken; aber ein Fluidum gelangt nie zum Gleichgewichte, wenn fortdauernd die Wärme in verschiedenen Punkten derselben horizontalen Schichte ungleich bleibt. Wenn z. B. das mit Wasser gefüllte Gefäfs *FN* (Fig. 13.) durch eine äufsere Ursache fortdauernd an der Seite *GN* wärmer erhalten würde, als an der andern Seite; so würde die Dichtigkeit des Wassers in der Gegend *EN* geringer seyn, als desjenigen, welches den Raum *FL* ausfüllt. Um nun die hiedurch bewirkte Bewegung leichter zu beurtheilen, nehme man in *EL* eine verticale Wand an, welche das wärmere Wasser von dem kältern absondert; so mufs, wenn unten bei *Z* der Druck von beiden Seiten gleich seyn soll, die Höhe *EZ* des wärmern Wassers gröfser seyn, als die *eZ* des kältern. Wenn dieses der Fall ist, so kann zwar in der Oefnung *Z* keine Bewegung entstehen, aber an höhern Stellen ist jetzt der Druck des wärmern Wassers zu grofs *), und dieses würde, wenn sich im obern Theile der

*) Ist nämlich des kalten Wassers Dichtigkeit $= b$, des warmen $= B$; so müfste, um in *Z* das Gleichgewicht zu erhalten,

Wand Oefnungen befänden, in den Raum *eM* überfliefsen: dadurch aber nähme die Höhe des kalten Wassers und der Druck, den dasselbe in *Z* ausübt, zu, und folglich würde nunmehr das kalte Wasser in *Z* zu dem warmen überzufliefsen anfangen: dieser Zuflufs vermehrt die Höhe des warmen Wassers, und folglich dauert der Abflufs desselben durch die obere Oefnung, und der ganze Kreislauf fort. — Nur versteht sich, dafs man auf die Mittheilung der Wärme, welche endlich die Ungleichheit der Temperatur sehr vermindern und aufheben könnte, hier nicht Rücksicht nimmt.

Eine ähnliche Bewegung würde, auch wenn keine Wand da wäre, Statt finden; es würde nämlich oben ein Strom des warmen Wassers gegen das kalte zu, und unten ein entgegengesetzter Strom des kalten Wassers nach der erwärmten Seite zu Statt finden, und dieser würde unaufhörlich fortdauern, so lange die Temperatur an der einen Seite des Gefäfses von der an der andern Seite verschieden ist.

66. Diese Strömungen werden desto stärker seyn, je tiefer das Fluidum und je gröfser der Unterschied der Wärme ist. Wahrscheinlich rührt von dieser ungleichen Erwärmung der beständige Strom des Meeres von Osten nach Westen, welchen man zwischen den Tropicis bemerkt, her; denn das Meer ist in den östlichern Gegenden allemal mehr erwärmt, als in den westlichern. Das Fortrücken der Sonne von Osten nach Westen trägt zu Vermehrung dieser Wirkung bei.

---

$EZ = \frac{b}{B} . eZ$ seyn', also $Ee = \frac{b-B}{B} . eZ$. Dann ist aber in *Y* der Druck des wärmern Wassers $= EY . B = B . (eY + eE)$; und der Druck des kältern $= b . eY$. Sollten diese beiden Ausdrücke gleich seyn, so müfste $eE = \frac{b-B}{b} . eY$ seyn, welches nicht Statt finden kann, wenn *Y* ein von *Z* verschiedener Punkt seyn soll.

*Anwendung auf flüssige Körper, welche einer Verdichtung und Verdünnung fähig sind.*

67. Problem 10. Wenn auf einen der Luft ähnlichen homogenen Körper, dessen Temperatur allenthalben gleich ist, die Schwere wirkt, die Bedingungen des Gleichgewichts und den Druck an jeder Stelle anzugeben.

Auflösung. In dem Punkte $Z$ (Fig. 9.), dessen Höhe durch die verticale Ordinate $YZ = z$ bestimmt ist, sey wieder die Dichtigkeit $= q$, die Höhe, welche den Druck abmifst, $= p$, und die Kraft der Schwere sey, wie vorhin, $= g$; so bestimmt die Gleichung $dp = - gq dz$ die Bedingungen des Gleichgewichts. Da die Wärme als allenthalben gleich angenommen ist, so hängt $q$ blos vom Drucke $p$ ab, und die Gleichung $\frac{dp}{q} = - g dz$ ist allemal integrabel, daher kann das Gleichgewicht hier immer bestehen, und die Integralgleichung $\int \frac{dp}{q} = g\ (h - z)$ bestimmt den Druck, wenn man statt $q$ seinen durch $p$ ausgedrückten Werth setzt, und die Formel $\frac{dp}{q}$ wirklich integrirt. Wir wollen diese Integration bei verschiednen für $q$ angenommenen Werthen wirklich ausführen.

I. Es sey zuerst der Druck der Dichtigkeit proportional, also $p = \frac{aq}{b}$, wo $b$ eine bestimmte Dichtigkeit ist, bei welcher für die gegenwärtige Temperatur der Druck $= a$ Statt findet; so ist $q = \frac{bp}{a}$, und folglich

$$\frac{a}{b} \int \frac{dp}{p} = g\ (h - z), \text{ das ist } \frac{a}{b} \log. p = g\ (h - z).$$

Ist $b$ die Dichtigkeit, welche in der horizontalen Ebene $AXY$, von welcher an die Ordinaten $z$ gerechnet werden, Statt findet; so wird für $z = o$, $p = a$, also $\frac{a}{b} \log. a = gh$,

und wenn man hieraus den Werth der beständigen Gröſse $h$ in die allgemeine Gleichung setzt, so ergibt sich

$$\frac{gbz}{a} = \log. \frac{a}{p}.$$

II. Als ein zweites Gesetz der Abhängigkeit der Gröſse $q$ von $p$ wollen wir folgende, den Phänomenen ganz angemessene, annehmen, welches wegen der Integrationen vortheilhafter ist, als das oben im ersten Abschnitte angegebene. — Es sey $m$ die kleinste, $n$ die gröſste Dichtigkeit, welche der flüssige Körper anzunehmen fähig ist, und für jede andere Dichtigkeit $= q$ finde die Gleichung $q = \frac{mk + np}{k + p}$ Statt, in welcher $k$ einen sehr groſsen Druck bezeichnet, welchen wir in unsern Experimenten nicht erreichen, der indeſs ein solches Verhältniſs gegen die übrigen Gröſsen hat, daſs schon bei mäſsigen Werthen von $p$, $mk$ gegen $np$ als unbedeutend kann angesehen werden, und dieses ist bei der Kleinheit von $m$ sehr wohl möglich. Wegen der letztern Voraussetzung wird bei einem mittlern Werthe von $p$, $q = \frac{np}{k}$ beinahe, oder die Dichtigkeit dem Drucke beinahe proportional.

Dieser Werth von $q$ in die Differentialgleichung gesetzt, gibt $\frac{kdp}{mk + np} + \frac{pdp}{mk + np} = -gdz$, oder

$$\frac{kdp}{mk + np} + \frac{1}{n} dp - \frac{mk}{n} \cdot \frac{dp}{(mk + np)} = -gdz, \text{ folglich}$$

$$\frac{k}{nn}(n - m) \log. (mk + np) + \frac{p}{n} = \text{Const.} - gz,$$

daher, wenn für $z = 0$, $p = a$ werden soll,

$$\frac{k}{n^2}(n - m) \log. \left[\frac{mk + na}{mk + np}\right] + \frac{a - p}{n} = gz.$$

Gehört nun mit dem Drucke $= a$ die Dichtigkeit $= b$ zu-

sammen, so ist $b = \frac{mk + na}{k + a}$, also $k = \frac{(n - b)\, a}{b - m}$, und

$$q = \frac{m\,(n - b)\; a + n\,(b - m)\,p}{(n - b)\,a \; + (b - m)\,p},$$

und, wenn man auch in die Integralgleichung für $k$ seinen Werth setzt, so wird

$$gz = \frac{a - p}{n} + \frac{(n - b)(n - m)\,a}{n^2\,(b - m)} \log. \frac{b\,a\,(n - m)}{m\,a\,(n - b) + n\,p\,(b - m)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daſs der Druck $= 0$ wird, wenn

$$z = \frac{a}{ng} + \frac{a\,(n - b)\,(n - m)}{n^2 g\,(b - m)} \log. \frac{(n - m)\,b}{m\,(n - b)},$$

und so hoch würde sich folglich die Atmosphäre erstrecken, wenn das hier angenommene Gesetz, nach welchem Dichtigkeit und Druck von einander abhängen, für unsre atmosphärische Luft richtig wäre.

68. Da wir den Druck der Atmosphäre durch die Höhe einer Quecksilbersäule abzumessen pflegen, so sey hier die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 1$. Die unbekannte gröſste Dichtigkeit, welche die Luft zu erlangen fähig ist, wollen wir ebenfalls der Dichtigkeit des Quecksilbers gleich, $n = 1$ annehmen; für $b$ aber die natürliche Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche der Erde, also etwa $b = \frac{1}{10000}$ setzen. Ferner nehmen wir $g = 1$ an, so wird in der vorigen allgemeinen Formel

$$z = a - p + \frac{9999\,(1 - m)\,a}{1 - 10000\,.\,m} \log. \frac{(1 - m)\,a}{9999\,.\,m\,a + (1 - 10000\,m)\,p},$$

und die Höhe der ganzen Atmosphäre

$$= a + \frac{9999\,(1 - m)\,a}{1 - 10000\,.\,m} \log. \frac{1 - m}{9999\,.\,m}.$$

Setzt man hier $m = 10^{-\mu}$, so wird, weil $\mu$ eine ziemlich groſse Zahl ist, beinahe

$$z = a - p + 10000\,.\,a \log. \frac{10^{\mu - 4}\,.\,a}{a + 10^{\mu - 4}\,.\,p},$$

und die Höhe der Atmosphäre

$$= a + 10000 \,.\, a \,.\, (\mu - 4) \,.\, \log.\,\text{nat.}\, 10.$$

Da nun log. nat. 10 = 2,30258, so wird, wenn man $\mu = 6$ setzt, und die Meile zu 23026 Fuſs rechnet, $a$ aber $= 2\frac{1}{2}$ Fuſs annimmt, die Höhe der Atmosphäre ungefähr = 5 Meilen; setzt man hingegen $\mu = 8$, so erhält man eben diese Höhe = 10 Meilen.

Da es aber sehr zweifelhaft ist, ob die Luft einer solchen Verdichtung, wie hier angenommen, fähig sey; so könnte man noch die Voraussetzung $n = \frac{1}{50}$ versuchen, wobei noch immer die gröſste Dichtigkeit 200 mal gröſser als $b$ ist, dann würde

$$z = 50\,(a - p) + \frac{50 \,.\, 199 \,.\, (1 - 50 \,.\, m)\, a}{1 - 10000 \,.\, m}$$

$$\log. \frac{(1 - 50 \,.\, m)\, a}{50 \,.\, 199 \,.\, m a + p\,(1 - 10000 \,.\, m)},$$

und die Höhe der Atmosphäre

$$= 50 \,.\, a + \frac{50 \,.\, 199 \,.\, (1 - 50 \,.\, m)\, a}{1 - 10000 \,.\, m} \log. \frac{1 - 50 \,.\, m}{50 \,.\, 199 \,.\, m}.$$

Setzt man hier $m = 10^{-8}$, so wird die Höhe der Atmosphäre, wenn $a = 2\frac{1}{2}$ Fuſs (welches nahe richtig ist, wenn man nach englischen Fuſsen rechnet), ungefähr 229000 Fuſs, oder ebenfalls beinahe = 10 Meilen, weil die Aenderung des Werths von $n$ auf den Werth von $z$ wenig Einfluſs hat. — Für $m$ aber kann man wohl keinen gröſsern Werth als $m = 10^{-8}$ setzen, oder $m = \frac{1}{10000} \,.\, b$.

69. Indeſs läſst sich von dieser ganzen Rechnung kein sicheres Resultat erwarten, da wir über das Gesetz, nach welchem Druck und Dichtigkeit von einander abhängen, wenn die Dichtigkeit sich ihren Gränzen merklich nähert, durchaus nichts wissen, und diese Gränzen selbst uns unbekannt sind. Bei den in der Erfahrung vorkommenden Fällen, man mag sich über die Oberfläche der Erde erheben, oder unter sie hinabsteigen, sind die Resultate der beiden

angenommenen Hypothesen völlig einerlei, und nur, wenn man sich bis zu sehr grofsen Höhen erheben könnte, würde der Unterschied merklich werden, da nach der ersten Hypothese erst in einer unendlichen Höhe der Druck verschwindet, nach der zweiten aber schon in einer Höhe von einigen Meilen.

Nach diesen Formeln hat man Tabellen für die Dichtigkeit und den Druck der Luft in verschiedenen Höhen berechnet, welche aber nur unter der Voraussetzung gelten, dafs die Temperatur des Luftkreises in allen Höhen einerlei ist. Da nun dieses nicht der Fall ist, sondern in den höhern Luftschichten eine viel gröfsere Kälte herrscht, als unten; so bedürfen die Formeln des vorigen Problems, wenn sie anwendbar seyn sollen, noch einer Verbesserung, die wir jetzt im Allgemeinen betrachten wollen.

70. Problem 11. Es ist eine Scale der Wärme gegeben, welche den Grad der Wärme für jede Höhe $= z$ ausdrückt: es soll der Druck und die Dichtigkeit der Luft in jeder Höhe für den Zustand des Gleichgewichts bestimmt werden.

Auflösung. In der Höhe $AZ = z$ (Fig. 14.) über der horizontalen Ebene $CAD$ sey der Grad der Wärme $= r$ durch die Ordinate $ZR$ einer als bekannt vorausgesetzten Curve $CRr$ ausgedrückt, welche daher die Scale der Wärme heifst. Hier sey die Dichtigkeit $= q$, die Barometerhöhe $= p$ (also die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 1$); dagegen aber sey in der Horizontalebene $CAD$, oder für $z = 0$ die Wärme $AC = c$, die Dichtigkeit der Luft $= b$, die Barometerhöhe $= a$; so nehmen wir, nach §. 38., $p = \frac{aqr}{bc}$ an, Daher wird für den Zustand des Gleichgewichts, wenn wir in der Gleichung $\frac{dp}{q} = - gdz$, $g = 1$ setzen, jetzt $\frac{dp}{p} = - \frac{bc.dz}{ar}$, deren Integral log. $p = \text{Const.} - \frac{bc}{a}\int\frac{dz}{r}$

allemal möglich ist, weil $r$ blos von $z$ abhängt. Das Gleichgewicht kann also bei diesen Voraussetzungen immer bestehen.

Um aber das Integral $\int \frac{dz}{r}$ aus der gegebnen Scale der Wärme herzuleiten, zeichne man eine zweite Curve $DSs$ so, daſs immer $ZS = \frac{c}{r} = \frac{AC}{ZR}$ sey; die Quadratur dieser Linie gibt dann das Integral $\int \frac{c}{r} dz$, und man erhält $\log. \frac{a}{p} = \frac{b}{a} . ADZS$, oder, wenn man die Fläche $ADZS = s$ setzt, $\log. \frac{a}{p} = \frac{b}{a} . s$, folglich $p = a . e^{\frac{-bs}{a}}$; wenn $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Aus diesem Werthe von $p$ erhält man

$$q = \frac{b\,ds}{dz} . e^{\frac{-bs}{a}}, \text{ weil } \frac{c}{r} = \frac{ds}{dz} \text{ ist.}$$

Die Function $s$ verschwindet, wenn $z = 0$ ist, und das Differentialverhältniſs $\frac{ds}{dz}$ wird dann $= 1$. In dem Falle einer allenthalben gleich groſsen Wärme $r = c$ wird $s = z$ und $\log. \frac{a}{p} = \frac{bz}{a}$, wie vorhin, wenn hingegen die Wärme abnimmt bei gröſsern Werthen von $z$, so wächst $s$ in gröſserm Verhältniſs als $z$, und der hier gefundene Werth von $\log. \frac{a}{p}$ übertrift den im vorigen Probleme angegebnen, für die gleichförmige Wärme geltenden Werth.

71. Bei einer gleichförmigen Wärme, oder wenn die Wärmescale $CR$ eine gerade, mit der Axe parallele Linie ist, fällt der Ausdruck für die Wärme zwar ganz aus der Formel weg, indem $\log. \frac{a}{p} = \frac{bz}{a}$ ist; aber man übersieht

leicht, daſs darum der Werth von $\frac{a}{p}$ doch nicht derselbe bleibt, wenn die Wärme sich ändert. Wir haben nämlich angenommen, daſs $b$ diejenige Dichtigkeit bezeichne, welche bei der gerade jetzt Statt findenden Temperatur mit der Barometerhöhe $= a$ zusammengehört, und $b$ ist also bei verschiedenen Temperaturen nicht mehr einerlei Gröſse. Um daher den Einfluſs der Wärme auf den Werth von $p$ in dem Falle, wo die Temperatur gleichförmig ist, besser zu übersehen, will ich $c$ als eine bestimmte Wärme annehmen, bei welcher dem Barometerstande $= a$ die Dichtigkeit $= b$ entspricht: will man alsdann bei einer andern Wärme $= c'$ die mit demselben Barometerstande $= a$ zusammengehörige Dichtigkeit, welche ich nun $= b'$ nennen will, bestimmen, so ist $b' = \frac{bc}{c'}$, und wenn in der Luftsäule $AZ$ die Temperatur $= c'$ wäre, so würde nun $\log. \frac{a}{p} = \frac{bc}{ac'} z$, oder $z = \frac{ac'}{bc} \log. \frac{a}{p}$, und hier ist $\frac{a}{bc}$ ein für jeden Fall unveränderlicher Coefficient.

Wenn man auf alle Umstände Rücksicht nehmen will, so darf man bei verschiedenen Temperaturen auch die Höhe $= p$, welche den Druck abmiſst, nicht immer der Barometerhöhe gleich setzen. Der Druck soll allemal durch das Gewicht einer Säule, deren Höhe $= p$ und Dichtigkeit $= 1$ ist, und auf welche unsre natürliche Schwere wirkt, ausgedrückt werden; aber des Quecksilbers Dichtigkeit ist nicht bei allen Temperaturen dieselbe. Nimmt man also an, bei der Wärme $= c$ sey des Quecksilbers Dichtigkeit $= 1$, bei der Wärme $= c'$ aber dieselbe $= 1 + \mu$, so müſste man statt der wahren Barometerhöhe $= a'$ jetzt den Druck $a = a'(1 + \mu)$ setzen. Man könnte diese corrigirte Barometerhöhe auch in die Formeln bringen, aber da sich leicht übersehen läſst, wie dieses geschieht, so werde ich die Höhen $a$, $p$, welche den Druck abmessen, in den Formeln

beibehalten, und hier nur bemerken, daſs man jene corrigirten Barometerhöhen verstehen muſs, wenn ich Höhe des Drucks und Barometerhöhe als gleichbedeutende Ausdrücke gebrauche *).

72. Wäre die Wärmescale eine gerade Linie, welche $AZ$ in der Höhe $z = h$ schneidet, so würde in jeder andern Höhe $= z$ die Wärme $r = c\left[1 - \frac{z}{h}\right]$, wenn sie in $A = c$ ist, folglich wird nun

$$\log.\frac{p}{a} = \frac{bh}{a}\log.\left[1 - \frac{z}{h}\right], \text{ und } p = a\left[1 - \frac{z}{h}\right]^{\frac{bh}{a}},$$

weil für $z = 0$ $p = a$ werden soll. Die Dichtigkeit in $z$ aber wird $q = b\left[1 - \frac{z}{h}\right]^{\frac{bh}{a} - 1}$. Für $z = h$ wird $p = 0$ und $r = 0$; $q$ aber kann in eben dieser Höhe entweder $= 0$ oder $= b$, oder $= \infty$ seyn, je nachdem $h > \frac{a}{b}$, oder $= \frac{a}{b}$, oder $< \frac{a}{b}$ ist.

Dieses auffallende Resultat bedarf wohl einer kurzen Erläuterung, obgleich in der Natur der Fall nicht vorkommt, daſs $h =$ oder $< \frac{a}{b}$ wäre. Die Gröſse $\frac{a}{b}$ bezeichnet hier die Höhe einer durchaus gleich dichten Luftsäule, deren Druck dem Quecksilber im Barometer das Gleichgewicht hielte, und deren Dichtigkeit $= b$ ist. Wäre nun $h$ dieser Höhe gleich, oder wäre in der Höhe $= \frac{a}{b}$ die Wärme $= 0$, so

*) In den nachher vorkommenden Formeln Deluc's für die barometrischen Höhenmessungen sind die Barometerhöhen dieser Regel gemäſs corrigirt und auf eine feste Temperatur gebracht, so daſs sie wirklich dem Drucke proportional sind.

würde in irgend einer Höhe $= z$, der Druck $p = \frac{a}{h} (h - z)$ der Tiefe unter jenem Punkte, wo die Wärme verschwindet, proportional: weil aber auch $r = \frac{c}{h} (h - z)$ ist, so bleibt $q$ bei jedem Werthe von $z$ ungeändert $= b$, indem $\frac{cp}{ar} = 1$ ist. Es würde nämlich bei dieser schnellen Abnahme der Wärme in der Höhe die Luft, ihrer Compressibilität ungeachtet, unten nicht dichter seyn als oben, weil, wegen der Wärme, ihre specifische Elasticität (oder der Druck, welchen sie bei gleicher Dichtigkeit ausübt) in eben dem Verhältnisse wächst, wie die zusammendrückende Kraft $p$, daher keine Compression Statt finden kann. Ist dagegen $h > \frac{a}{b}$, so widersteht zwar ebenfalls die untere Luft bei derselben Dichtigkeit der Zusammendrückung mehr als die obere, aber diese Zunahme der specifischen Elasticität hebt nun nicht mehr alle Compression auf, weil die drückende Kraft in gröſserm Verhältniſs wächst, als die Wärme: die Luft ist also unten dichter als oben, und für $r = 0$ und $p = 0$ wird auch $q = 0$. Im dritten Falle endlich, wenn nämlich $h < \frac{a}{b}$ ist, sollte, wenn man aufwärts steigt, die Dichtigkeit $q$ zwar wegen des verminderten Druckes abnehmen, aber da $r$ schneller abnimmt, als $p$, so ist der Coefficient $\frac{cp}{ar}$ in Punkten, die höher als $A$ liegen, gröſser als 1, daher nimmt die Dichtigkeit in gröſsern Höhen zu, weil die obere Luft wegen der gröſsern Kälte von dem geringern Drucke mehr comprimirt wird, als die untere Luft von dem gröſsern Drucke.

73. Wenn (Fig. 14.) auch die Scale der Wärme nicht ganz eine gerade Linie ist, so könnte es doch seyn, daſs bis zu so geringen Höhen, als wir bei unsern Beobachtun-

gen erreichen, der zu $AZ$ gehörige Bogen $CR$ der Scale als gerade könnte angesehen werden, und in diesem Falle würde man, da der obere Theil der Scale $Rr$ gar nicht in der Rechnung vorkommt, die Rechnung so führen dürfen, als ob die ganze Scale eine gerade Linie wäre. Da nun alle Grade der Wärme, welche wir beobachten können, noch sehr weit vom absoluten Nullpunkt der Wärme entfernt sind, so darf man annehmen, daſs $h$ in Vergleichung der Höhen $z$, welche wir erreichen, sehr groſs ist. Bei dieser Voraussetzung kann man der im vorigen §. zwischen $p$ und $z$ gefundenen Gleichung eine bequemere Form geben, wenn man log. $\left[1 - \frac{z}{h}\right]$ in eine Reihe verwandelt, von der man die Glieder, welche höhere Potenzen von $h$ im Nenner enthalten, wegläſst; man erhält dann

$$\log. \frac{a}{p} = \frac{bz}{a} \left[1 + \tfrac{1}{2} \frac{z}{h} + \tfrac{1}{3} \frac{z^2}{h^2}\right],$$

wo $b$ die im untern Punkte $A$ wirklich Statt findende Dichtigkeit bezeichnet, welche also bei verschiedenen Beobachtungen verschieden seyn kann. Weil es aber besser ist, alles auf eine gewisse Normaltemperatur zu beziehen, so sey diese $= c$, und zum Unterschiede nun die Temperatur in $A = c'$: bezeichnet also $b$ jetzt die mit der Normaltemperatur zusammengehörende, dem Drucke $= a$ entsprechende Dichtigkeit, so ist

$$\log. \frac{a}{p} = \frac{bc \,.\, z}{ac'} \left[1 + \tfrac{1}{2} \frac{z}{h} + \tfrac{1}{3} \frac{z^2}{h^2}\right].$$

In dieser Gleichung kann man $\frac{z}{h}$ durch die in $A$ und $Z$ beobachteten Temperaturen ausdrücken, weil $\frac{c' - r}{c'} = \frac{z}{h}$ ist,

also ist $\log. \frac{a}{p} = \frac{bc \,.\, z}{ac'} \left[1 + \tfrac{1}{2} \frac{(c' - r)}{c'} + \tfrac{1}{3} \frac{(c' - r)^2}{c'^2}\right]$ eine hinlänglich genaue Gleichung, wenn $\frac{z}{h}$ sehr klein ist.

74. Wir wollen jetzt für die Scale der Wärme eine logarithmische, oben mit der Verticallinie convergirende Curve annehmen, für welche die Gleichung

$$z = h \,.\, \log. \frac{c'}{r}, \text{ oder } r = c' \,.\, e^{\frac{-z}{h}}$$

gegeben ist. In diesem Falle wird

$$q = \frac{bcp}{ar} = \frac{bcp}{ac'} \,.\, e^{\frac{z}{h}},$$

wenn $b$ die der unveränderlichen Wärme $= c$ entsprechende, dem Barometerstande $= a$ zugehörige Dichtigkeit ist: es wird also

$$\frac{dp}{p} = - \frac{bc}{ac'}\, dz \,.\, e^{\frac{z}{h}}, \qquad \log. \frac{a}{p} = \frac{bch}{ac'} \left(e^{\frac{z}{h}} - 1\right),$$

woraus, wenn $h$ sehr groſs gegen $z$ ist, folgt

$$\log. \frac{a}{p} = \frac{bcz}{ac'} \left[1 + \tfrac{1}{2} \frac{z}{h} + \frac{1}{2.3} \frac{z^2}{h^2} + \frac{1}{2.3.4} \frac{z^3}{h^3}\right],$$

in welcher Reihe man auch für $\frac{z}{h}$ seinen Werth $= \log. \frac{c'}{r}$ setzen kann.

75. Man könnte auch hier, wie im vorigen Problem, eine Gleichung zwischen $p$, $q$ und $r$ annehmen, welche noch endliche Werthe für $q$ gäbe, wenn auch $p = \infty$ oder $p = 0$ wäre; aber wir haben dort gesehen, daſs diese Hypothesen zu keinen sichern oder belehrenden Resultaten führen; und es scheint daher unnöthig, dabei zu verweilen. Statt dessen will ich noch einiges von der Anwendung der eben gefundenen Formeln auf die barometrischen Höhenmessungen anführen.

Wäre in allen Fällen die Wärme in der ganzen Höhe, bis zu welcher man steigt, gleich groſs, und kennte man für diesen Grad der Wärme den Coefficienten $\frac{a}{b}$, so würde man aus den Barometerständen $a$ und $p$ sogleich die Höhe $z$

durch die Gleichung $z = \frac{a}{b}$ log. nat. $\frac{a}{p}$ erhalten. Auch wenn die specifische Elasticität der Luft $= \frac{a}{b}$ für eine Normaltemperatur $= c$ bekannt ist, findet man für jede andre Temperatur $= c'$, zufolge §. 71. die Höhe

$$z = \frac{ac'}{bc} \text{ log. nat. } \frac{a}{p} = \frac{a}{b}\left[1 + \frac{c' - c}{c}\right] \text{ log. nat. } \frac{a}{p},$$

wo der letzte Ausdruck demjenigen ganz ähnlich ist, welchen Deluc zur Berechnung der Berghöhen aus Barometerständen angegeben hat. Drückt man nämlich den Unterschied der Temperaturen $c' - c$ in Graden des Reaumürischen Quecksilberthermometers aus, und nimmt zur Normaltemperatur diejenige an, wobei dasselbe Thermometer $+ 16\frac{3}{4}$ Gr. zeigt, so wird, wenn in einem andern Falle dieses Thermometer auf $\varrho$ Gr. steht, die Höhe $z$, nach Deluc, durch die Formel

$$z = 4342 \cdot \left[1 + \frac{\varrho - 16\frac{3}{4}}{215}\right] \text{ log. nat. } \frac{a}{p},$$

$$\text{oder } z = 10000 \left[1 + \frac{\varrho - 16\frac{3}{4}}{215}\right] \text{ log. brigg. } \frac{a}{p}$$

in Toisen ausgedrückt.

Diese Formel ist also, wofern die beständigen Gröfsen richtig bestimmt sind, in dem Falle genau richtig, wenn die Wärme in jeder Höhe gleich grofs ist — doch setzt sie auch voraus, dafs keine andre Umstände, als allein die Wärme, die specifische Elasticität der Luft ändern, und dafs gleiche Aenderungen des Thermometerstandes gleichen Aenderungen der Wärme, oder gleichen Aenderungen der specifischen Elasticität der Luft entsprechen, welches wohl etwas zweifelhaft ist, hier aber nicht weiter hergehört. — Aber Deluc wendet diese Formel auch da an, wo im höhern Standpunkte die Temperatur von der unten Statt findenden merklich verschieden war, und setzt dann statt $\varrho$ den mittlern Thermometerstand zwischen den oben und unten beobach-

teten: es ist daher der Mühe werth, die Richtigkeit dieses Verfahrens etwas näher zu untersuchen, und ich werde deswegen das Resultat mit der Voraussetzung einer geradlinigten und einer logarithmischen Wärmescale vergleichen. Hiebei setze ich die Wärme im Punkte $A = c'$ (Fig. 14.), in $Z$ aber $= r$, so ist die mittlere Temperatur $= \frac{1}{2}(c' + r)$, folglich würde, wenn diese in jedem Punkte der Höhe $AZ$ Statt fände, die Höhe $z = \frac{\frac{1}{2}(c'+r)}{c} \cdot \frac{a}{b} \log. \frac{a}{p}$ seyn, und dieses ist der allgemeine Ausdruck, welchen ich statt des von Deluc zur Berechnung angewandten setze; wir werden nun sehen, wie hiemit die Ausdrücke für eine oberwärts mit der Verticallinie convergirenden Wärmescale übereinstimmen.

Für eine geradlinigte Wärmescale war, wenn $c' - r$ sehr klein gegen $c$ ist (§. 73.),

$$z = \frac{ac'}{bc} \frac{\log. \frac{a}{p}}{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{c' - r}{c'}\right] + \frac{1}{3}\frac{(c' - r)^2}{c'^2}},$$

$$\text{oder } z = \frac{a}{b}\left[\frac{c'}{c} - \frac{1}{2}\frac{(c' - r)}{c} - \frac{1}{12}\frac{(c' - r)^2}{c.c'}\right] . \log. \frac{a}{p},$$

es müſste also der Coefficient

$$c' - \frac{1}{2}(c' - r) - \frac{1}{12}\frac{(c' - r)^2}{c'}, \text{ oder } \frac{1}{2}(c' + r) - \frac{1}{12}\frac{(c' - r)^2}{c'}$$

einerlei mit dem vorigen Coefficienten $\frac{1}{2}(c' + r)$ seyn, wenn Deluc's Verfahren mit einer geradlinigten Wärmescale harmoniren sollte, das heiſst, der Bruch $\frac{1}{12}\frac{(c' - r)^2}{c.c'}$ müſste so klein seyn, daſs man ihn weglassen dürfte: dieses findet in den meisten Fällen Statt, indeſs kann, wenn die Temperaturen $c'$ und $r$ sehr verschieden sind, dieses Glied doch einen nicht ganz unerheblichen Werth erhalten, und alsdann würde, wenn $r < c'$ ist, Deluc's Regel die Höhe $z$

um etwas zu grofs geben, indefs würde der Fehler doch wohl nie über $\frac{1}{500}$ der ganzen Höhe gehen können.

Wäre hingegen die Wärmescale logarithmisch, so würde

$$z = \frac{ac'}{bc} \cdot \frac{\log. \frac{a}{p}}{1 + \frac{1}{2}\log. \frac{c'}{r} + \frac{1}{6}\left\{\log. \frac{c'}{r}\right\}^2 + \frac{1}{24}\left\{\log. \frac{c'}{r}\right\}^3},$$

oder, wenn man den Nenner gehörig entwickelt,

$$z = \frac{ac'}{bc} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(c'-r)}{r} + \frac{1}{3}\frac{(c'-r)^2}{r^2} - \frac{1}{4}\frac{(c'-r)^3}{r^3}\right\} \log. \frac{a}{p}.$$

Setzt man also $r = c' - \varrho$, so wird der eingeschlossene

$$\text{Factor} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\varrho}{c'-\varrho} + \frac{\frac{1}{3}\varrho^2}{(c'-\varrho)^2} - \frac{\frac{1}{4}\varrho^3}{(c'-\varrho)^3},$$

$$\text{oder} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{c'} - \frac{1}{6}\frac{\varrho^2}{c'^2} - \frac{1}{12}\frac{\varrho^3}{c'^3},$$

statt dafs nach Deluc's Regel, oder bei der mittlern Temperatur $= c' - \frac{1}{2}\varrho$, der Factor $\frac{ac'}{bc} \log. \frac{a}{p}$ in $\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{c'}\right\}$ multiplicirt ist; folglich gibt auch, wenn die Wärmescale logarithmisch ist, Deluc's Regel die Höhe $z$ zu grofs, und der Unterschied beträgt ungefähr doppelt so viel, als bei einer geradlinigten Scale.

Aber, da die Dichtigkeit der Luft bei gleichem Barometerstande wohl noch von sehr vielen andern Umständen, als von der Wärme abhängt, so läfst es sich erwarten, dafs diese weit erheblichere Abweichungen von der nach Delüc angestellten Berechnung bewirken mögen, als daraus, dafs die mittlere Wärme nicht durch die ganze Höhe *AZ* Statt findet, entspringen. Uebrigens setzen alle diese Rechnungen voraus, dafs die Luft im Gleichgewichte sey, dafs also kein Wind Statt finde, da auf den Einflufs, welchen eine Bewegung der Luft haben kann, hier keine Rücksicht genommen werden konnte.

76. **Problem 12.** Wenn die Wärme der Atmosphäre in gleicher Höhe in verschiedenen Gegenden sehr ungleich ist, so daſs das Gleichgewicht nicht bestehen kann, die hiedurch entstehende Bewegung der Luft ungefähr zu bestimmen.

**Auflösung.** Die Luft sey in der Gegend über $AB$ (Fig. 15.) mehr erwärmt, als über $CD$, und jene Gegend sey durch eine Scheidewand von dieser getrennt, zugleich aber sey nahe an der Erde eine Röhre $bc$, welche sich von der wärmern Gegend nach der kältern erstreckt. Nimmt man nun an, daſs die Luft in einem solchen Zustande ist, daſs der Druck in $b$ und in $c$ gleich groſs sey, so kann in der Röhre $bc$ keine Bewegung entstehen. Es sey aber $\beta\gamma$ eine zweite Röhre, so ist offenbar der Druck bei $\gamma$ geringer, als bei $\beta$; denn wenn der Druck in $b$ und in $c = a$ ist, und die Dichtigkeit der wärmern Luft $= b$, der kältern $= \beta$, so ist der Druck in $\gamma = a - c\gamma \,.\, \beta$, in $\beta$ aber $= a - c\gamma \,.\, b$, wo $\beta$ gröſser als $b$ ist. Es entsteht also oben ein Strom von wärmerer Luft gegen die kältere Gegend, und wegen der dadurch vermehrten Masse der Luft in der kältern Gegend nun auch unten ein Strom von kälterer Luft gegen die wärmere Gegend zu.

Es läſst sich leicht einsehen, daſs eben das geschähe, wenn anfangs der Druck bei $\beta$ und bei $\gamma$ gleich groſs gewesen wäre, weil er alsdann bei $c$ gröſser seyn würde, als bei $b$. Auch übersieht man, daſs ähnliche Ströme von Luft oben nach dem kalten, unten aber nach dem erwärmten Raume zu flieſsen würden, wenn auch keine Scheidewand und keine Röhren da wären. Und dieser so entstandene Wind wird desto stärker seyn, je gröſser der Unterschied der Wärme ist, je höher die Luftschichte $b\beta$ ist, in welcher diese ungleiche Wärme herrscht, und je näher die ungleich erwärmten Gegenden bei einander liegen, denn wenn man sich die Röhren $\beta\gamma$, $bc$ sehr lang denkt, so müſsten zu groſse Luftmassen in Bewegung gesetzt werden, wodurch der Wind geschwächt würde.

77. Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auch durch die Erfahrung überzeugen, wenn man auf den Luftzug achtet, welcher in der Thüre eines erwärmten Zimmers entsteht, wenn der Raum aufserhalb der Thüre kalt ist.

Auch in dem Zimmer selbst, wenn es durch einen Ofen erwärmt wird, findet ein beständiger Zuflufs der kalten Luft gegen den Ofen zu in der untern Gegend Statt, oben aber strömt die warme Luft vom Ofen weg: sie steigt also am Ofen aufwärts, wie man unter andern daraus bemerkt, dafs kleine Maschinen dadurch in Bewegung gesetzt werden können.

78. Aus eben diesen Gründen läfst sich der beständige Seewind erklären, welcher in den Küstenländern Africa's, die von der Sonne sehr erhitzt werden, in den untern Gegenden der Luft weht. In den höhern Gegenden des Luftkreises findet ohne Zweifel ein entgegengesetzter Wind Statt, welcher die warme Luft nach der See zu führt.

79. Ob der beständige Ostwind zwischen den Wendekreisen von eben dieser Ursache herrühre, läfst sich nicht so leicht übersehen, da in den westlichern Gegenden der Atmosphäre, wohin die Sonne erst kommt, die Wärme doch gewifs nicht gröfser ist, als in denen, worüber sie gerade steht. Vielmehr scheint eher ein Westwind erfolgen zu müssen, weil die gröfste Wärme erst Nachmittags eintritt. Um aber hierüber genauer zu urtheilen, sey *ABCD* (Fig. 16.) die Erdkugel, und *A* der Ort, an welchem die gröfste Wärme Statt findet, so dafs die Wärme in *B* und *C* merklich geringer als in *A* ist. Man übersieht leicht, dafs bei diesen Voraussetzungen die kalte Luft von *B* sowohl als von *C* nach *A* zu strömen würde, und dafs in höhern Gegenden ein Strom nach entgegengesetzter Richtung nach beiden Seiten zu Statt finden würde, wenn der Punkt *A* immer am meisten erwärmt bliebe. Nimmt man aber an, dafs die gröfste Wärme von *A* gegen Westen hin fortrückt,

so wird dadurch der Zuflufs von Osten her verstärkt, der von Westen her vermindert; denn die Bewegung von Westen her würde ja ganz aufgehoben werden, wenn die Wärme schnell genug fortrückte, und dann würde die ganze Atmosphäre sich fast gleichförmig von Osten nach Westen bewegen, wobei nicht einmal ein rückwärts fliefsender Strom in der obern Gegend nothwendig zu seyn scheint.

Der Ostwind in der heifsen Zone läfst sich also wohl ebenfalls aus diesen Gründen erklären, wenn man dabei auf die tägliche Bewegung der Erde Rücksicht nimmt.

---

## Fünfter Abschnitt.

### *Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, auf welche beschleunigende Kräfte, die gegen feste Mittelpunkte gerichtet sind, wirken.*

---

80. Problem 13. Wenn die beschleunigende Kraft, welche jedes Theilchen des flüssigen Körpers gegen den Mittelpunkt der Kräfte zu treibt, eine Function der Entfernung von diesem Mittelpunkte ist, die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen.

Auflösung. $A$ (Fig. 17.) sey der Mittelpunkt der Kräfte, und durch denselben die Abscissenebene $AXY$ gelegt, auf welche wir die Lage jedes Theilchens $Z$ des flüssigen Körpers beziehen, und dieselbe durch die drei auf einander senkrechten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmen, so wird $AZ = v = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, und vermöge der Voraussetzung ist die anziehende Kraft, welche auf z wirkt, eine Function von $v$, welche ich $= V$ setze. Diese Kraft gibt, nach der Richtung der drei Coordinaten zerlegt,

nach der Richtung $XA$ die Kraft $= \frac{Vx}{v}$; also $P = -\frac{Vx}{v}$,

nach der Richtung $YX$ die Kraft $= \frac{Vy}{v}$; also $Q = -\frac{Vy}{v}$,

nach der Richtung $ZY$ die Kraft $= \frac{Vz}{v}$; also $R = -\frac{Vz}{v}$.

Ist nun die Dichtigkeit in $z = q$, der Druck $= p$, so ist nach dem dritten Probleme für den Zustand des Gleichgewichts $dp = -\frac{qV}{v}(xdx + ydy + zdz)$, oder, weil $vdv = xdx + ydy + zdz$ ist, $dp = -qVdv$, das Gleichgewicht kann also bestehen, wenn die Integration dieser Gleichung möglich ist, und das geschieht, wenn $q$ eine Function von $v$ ist. Man kann zwar auch $q$ als Function von $v$ und $p$ betrachten, da aber nach der Integration $p$ durch $v$ ausgedrückt wird, so läſst sich auch jede Function von $p$ als durch $v$ bestimmbar ansehen, und man kann daher sagen, daſs das Gleichgewicht nicht bestehen kann, wenn $q$ nicht blos eine Function von $v$ ist.

81. Wenn sich also der flüssige Körper im Gleichgewichte befindet, so wird in gleichen Entfernungen von $A$, oder in der ganzen Oberfläche der mit dem Radius $AZ = v$ beschriebnen Kugel, der Druck $p$ und die Dichtigkeit $q$ gleich groſs seyn, oder das ganze Fluidum wird aus concentrischen Lagen von gleicher Dichtigkeit bestehen.

Ferner, wenn in der Entfernung $AC = h$ (Fig. 18.) der Druck $= 0$ wird, so muſs er auch in der ganzen Kugelfläche $CEGF$ verschwinden, oder diese ist die freie Oberfläche des flüssigen Körpers. Daher erhellt, daſs eine ruhende flüssige Masse bei der Wirkung solcher gegen $A$ zu gerichteten Kräfte nothwendig eine Kugelform annimmt, deren Mittelpunkt $A$ ist.

82. Die Entfernung des Punktes $C$, wo der Druck verschwindet, vom Mittelpunkte $A$ sey $= h$, und für ein

andres, dem Mittelpunkte näher liegendes Theilchen $Z$ sey $CZ = h - v = u$, so wird $p = \int q V du$, wenn man dieses Integral so annimmt, daſs es mit $u$ zugleich verschwindet. Dieses Integral drückt das Gewicht einer Säule des flüssigen Körpers aus, die sich von $C$ bis $Z$ erstreckt, und deren Theilchen von der beschleunigenden Kraft $= V$ nach $A$ zu getrieben werden. Der Druck nimmt also zu, je mehr man sich $A$ nähert.

Es ist nämlich klar, daſs $q du$ die Masse des Theilchens $Z$ ist, wenn wir den auf $AZ$ senkrechten Querschnitt dieses Theilchens $= 1$ setzen, und daſs man $q du$ als Differential der Masse der ganzen Säule anzusehen hat, welche sich von $C$ bis $Z$ erstreckt, wenn der Querschnitt dieser Säule $= 1$ ist; hätten wir den Querschnitt der Säule $= ff$ gesetzt, so würde ihre Masse um $ffq du$ wachsen, wenn ihre Höhe um $du$ zunimmt. Aber das Gewicht der Masse $ffq du$ ist $= ff \cdot q V du$, wenn eine beschleunigende Kraft $= V$ auf dasselbe wirkt, folglich ist das Gewicht der ganzen Säule $= ff \cdot \int q V du$, und wenn man dieses $= P$ setzt, $p = \frac{P}{ff}$ dem Gewichte jener Säule, welche darüber steht, proportional, folglich wächst der Druck $p$, wenn man sich $A$ nähert, genau so wie das Gewicht der darüber stehenden Säule des Flüssigen.

83. Der Druck, welchen ein in dieses Fluidum eingetauchter Körper leidet, wird hiedurch ebenfalls bestimmt, da derselbe dem Gewichte der flüssigen Masse gleich ist, welche zu Erhaltung des Gleichgewichts die Stelle einnehmen müſste, wo sich jetzt der feste Körper befindet.

84. Es ist schon erwähnt, daſs das Gleichgewicht nicht bestehen kann, wenn die Dichtigkeit in verschiedenen gleich weit vom Mittelpunkte der Kräfte entfernten Punkten ungleich ist. Wird diese Ungleichheit etwa durch die Wärme fortdauernd erhalten, so findet hier ein ähnlicher stets fortdauernder Strom Statt, wie wir vorhin bei

einem Fluido betrachteten, auf welches die Schwere wirkt, deren Richtungen wir als unter sich parallel ansahen. Denn wenn der Raum $\gamma c T$ (Fig. 18.) z. B. kältere Luft, $\beta b Z$ aber warme Luft enthält, und die Röhren $\beta\gamma$, $bc$ beide Räume mit einander verbinden, so kann nicht in beiden Röhren zugleich das Gleichgewicht Statt finden, sondern die kalte Luft strömt unten in $cb$ nach der warmen Gegend, und dagegen die warme Luft durch $\beta\gamma$ nach der kalten Gegend zu.

85. Wie also auch der flüssige Körper übrigens beschaffen seyn mag, so ist doch während des Gleichgewichts allemal der Druck und die Dichtigkeit in derselben concentrischen Kugelfläche überall gleich groſs, und wenn man sich das ganze Fluidum in solche concentrische Schichten eingetheilt denkt, so kann man diese Schichten äquilibrirend oder wagerecht nennen. Bei flüssigen Körpern, auf welche die Schwere wirkt, deren Richtungen wir als unter sich parallel ansehen, waren diese äquilibrirenden Schichten eben und horizontal, hier sind sie sphärisch.

86. Problem 14. Wenn (Fig. 19.) auf jedes Theilchen des flüssigen Körpers mehrere gegen verschiedene Mittelpunkte zu gerichtete beschleunigende Kräfte wirken, alle diese Kräfte aber Functionen der Entfernung des Theilchens vom Mittelpunkte der Kraft sind, die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen das Gleichgewicht bestehen kann.

Auflösung. $C$, $C'$, $C''$ sind die verschiedenen Mittelpunkte der Kräfte, die man sich in einer oder in verschiedenen Ebenen liegend denken kann; $Z$ ist ein Theilchen des flüssigen Körpers, dessen Dichtigkeit $= q$ ist, und welches den Druck $= p$ leidet. Ich setze die Entfernungen $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$ u. s. w., und die beschleunigenden Kräfte, welche das Theilchen $Z$ gegen jeden dieser Punkte treiben, $V$, $V'$ und $V''$: der Voraussetung zufolge ist also $V$ eine Funktion von $v$, $V'$ eine Function von

$v'$ u. s. w. Zerlegt man nun jede dieser Kräfte nach der Richtung der Coordinaten $x$, $y$, $z$, so erhält man die Werthe, welche man hier statt $P$, $Q$, $R$ in die allgemeine Gleichung $\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$ setzen mufs; wir haben aber vorhin (§. 80.) gesehen, dafs für eine Kraft $Pdx + Qdy + Rdz = -Vdv$ ward, man kann sich also leicht überzeugen, dafs man auch hier

$$\frac{dp}{q} = -Vdv - V'dv' - V''dv''$$

erhält; eine Gleichung, welche sich integriren läfst, wenn $q$ entweder beständig ist, oder wenn es eine bekannte Function von $p$ ist, und alsdann gibt

$$\int\frac{dp}{q} = \text{Const.} - \int Vdv - \int V'dv' - \int V''dv''.$$

Die Formel $\int Vdv$ drückt die Wirkung der Kraft $V$ aus, wenn wir daher die gesammte Wirkung aller Kräfte $= W$ setzen, so ist

$$\int\frac{dp}{q} = \text{Const.} - W,$$

weil $W = \int Vdv + \int V'dv' + \int V''dv''$ ist.

Da hier die Kräfte $V$, $V'$, $V''$ durch absolute Zahlen ausgedrückt werden, so ist das, was wir Wirkung der Kräfte $= W$ genannt haben, eine linearische Gröfse, und daher mit $p$ homogen. Man kann jetzt also auch die Differentialgleichung so ausdrücken: $dp = -qdW$, und es erhellt, dafs das Gleichgewicht auch bestehen könne, wenn die Dichtigkeit nicht blos vom Drucke, sondern auch von dem Orte abhängt (wenn z. B. jeder Stelle eine bestimmte Wärme zukäme), wofern nur $q$ eine solche Function des Orts ist, dafs man es als Function von $W$ betrachten kann, oder in allen denjenigen Punkten gleich ist, wo die gesammte Wirkung der Kräfte gleich grofs ist. In solchen Fällen wird auch, während des Gleichgewichts, der Druck an allen den Stellen gleich grofs seyn, für welche $W$ einerlei Werth erhält.

87. Es kommt also alles darauf an, die Punkte zu bestimmen, wo die gesammte Wirkung aller Kräfte gleich grofs ist: da diese Punkte für jede Gröfse der Wirkung eine gewisse Fläche bilden werden, so gibt diese Fläche eine äquilibrirende Schichte, in welcher in jedem Punkte einerlei Druck und Dichtigkeit Statt findet, wenn nämlich das Gleichgewicht besteht. Offenbar wird auch die äufserste oder freie Oberfläche des Körpers die Form dieser Flächen, oder einer äquilibrirenden Schichte annehmen, daher kann man diese Schichten auch wagerecht nennen.

88. Wenn nur ein Mittelpunkt der Kräfte vorhanden ist, so werden die äquilibrirenden Schichten Kugelflächen, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Kräfte einerlei ist; diese Schichten sind daher ähnlich, und man kann sie parallel nennen. Hingegen wird die Gestalt dieser äquilibrirenden Schichten, wenn es mehrere Mittelpunkte der Kräfte gibt, gewöhnlich sehr irregulär, und bei verschiedenen Schichten kann sie unähnlich, und die Dicke der Schichten an verschiedenen Stellen ungleich werden.

89. Wir sind hier auf zwei sehr merkwürdige Begriffe gekommen, nämlich auf den von der Wirkung der Kräfte, und auf den von äquilibrirenden Schichten. Von der Gröfse der Wirkung, welche eine Kraft in irgend einem Punkte ausübt, ist schon oben (§. 45.) erwähnt, dafs dieser Begriff in Maupertuis Untersuchungen über den Satz der kleinsten Wirkung vorkomme: einige Mathematiker haben ihn deswegen für zu metaphysisch oder leer gehalten; aber hier wird man seinen Nutzen nicht verkennen. Wenn nämlich ein bestimmter Punkt dem Einflusse beschleunigender Kräfte unterworfen ist, so üben diese in demselben eine gewisse Wirkung aus, welche am besten auf die Weise, wie oben geschehen ist, ausgedrückt wird, wenn man sie dem Integrale aus dem Producte der Kraft in das Differential ihrer Richtung gleich setzt, oder der Summe dieser verschiedenen Integrale, wenn mehrere Kräfte auf denselben Punkt wirken. So drückt also hier $W$, oder die

Summe der Integralformeln $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ die Gröſse der Wirkung der drei Kräfte $V$, $V'$, $V''$ auf das in dem Punkte $Z$ befindliche Theilchen des flüssigen Körpers aus. — Der Begriff von äquilibrirenden Schichten beruht nun, wie wir gesehen haben, auf diesem Begriffe von der Gröſse der Wirkung einer Kraft, weil diese Schichten dadurch bestimmt werden, daſs die Wirkung der Kräfte für jeden Punkt einer Gleichgewichtsschichte gleich groſs ist.

90. Die Bestimmung der Figur solcher wagerechten oder äquilibrirenden Schichten ist nun ein geometrisches Problem, dessen Auflösung aber meistens sehr verwickelt ist, und welches wir hier um so eher übergehen können, da es keine Anwendung in der Wirklichkeit findet. Wir wollen dagegen der Betrachtung derjenigen Kräfte, von welchen die Figur der Erde und das Phänomen der Ebbe und Fluth abhängt, unsre Aufmerksamkeit widmen.

91. Es wirkt nämlich auf die flüssigen Körper, die sich auf der Erde befinden, auſser der Schwere auch noch die Centrifugalkraft, welche aus der Umdrehung der Erde um ihre Axe entsteht, und man muſs daher auf diese Kraft Rücksicht nehmen, wenn man über das Gleichgewicht des ganzen Meeres, oder der Atmosphäre urtheilen will. Denn obgleich hier eine Bewegung Statt findet, also die Untersuchung nicht hieher zu gehören scheint; so kann man doch, weil die Wirkung jener Bewegung beständig ist, sobald die flüssigen Körper zu einem gewissen unveränderlichen Zustande gelangt sind, diesen als Zustand des Gleichgewichts betrachten, indem er völlig mit demjenigen übereinstimmt, in welchen diese Fluida würden versetzt werden, wenn die Erde ruhte, aber auſser der Schwere beständig auf jedes Theilchen eine Kraft wirkte, welche dem Abstande desselben von der Axe proportional wäre, und es von der Axe zu entfernen strebte. Diese Untersuchung führt daher zu einer Bestimmung der Figur der Erde.

Ferner ist es bekannt, daſs die anziehende Kraft der Sonne und des Mondes auf das Meer wirkt, und die Abwechselung von Fluth und Ebbe hervorbringt. Hiebei findet nun zwar eine beständige Bewegung Statt, indeſs läſst sich hier wenigstens ein oberflächlicher Begriff von diesem Phänomen geben, wenn wir Mond und Sonne als immer über demselben Punkte der Erde stillstehend betrachten, und den Zustand des Gleichgewichts des Meeres und der Atmosphäre für diesen Fall suchen. Zu einer genauen Betrachtung der Ebbe und Fluth gehören freilich Untersuchungen, welche auf die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper gegründet sind, und von denen hier nichts gesagt werden kann.

92. Problem 15. Wenn (Fig. 20.) auſser der Centripetalkraft, welche jedes Theilchen des flüssigen Körpers gegen $C$ zu treibt, zugleich jedes Theilchen $Z$ von der durch den Mittelpunkt gehenden festen Axe $AB$ mit einer Kraft, welche der Entfernung von derselben $XZ$ proportional ist, abwärts getrieben wird, den Zustand des Gleichgewichts des flüssigen Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Des Theilchens $Z$ Dichtigkeit sey $= q$, der Druck in diesem Punkte $= p$, die Entfernung $CZ$ vom Mittelpunkte $= v$, die beschleunigende Kraft, welche das Theilchen gegen $C$ zu treibt, $= V$, sey eine Function von $v$, und folglich die Wirkung dieser Kraft $= \int V dv$. Ferner sey die auf die Axe $AB$ senkrechte Linie $ZX = x$, und die von der Axe zurücktreibende Kraft $= \frac{x}{f}$, nämlich dem Abstande von der Axe proportional. Hätte diese Kraft die entgegengesetzte Richtung, so könnte man sie als gegen einen Mittelpunkt zu wirkend betrachten, und erhielte ihre Wirkung $= \int \frac{x\,dx}{f} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{f}$, jetzt also muſs man ihre Wirkung $= -\frac{x^2}{2f}$ setzen, so daſs die Gröſse der Wirkung aller

Kräfte für das Theilchen $Z$ oder $W = \int V dv - \frac{x^2}{2f}$ ist. Man erhält also für das Gleichgewicht die Gleichung

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - \int V dv + \frac{x^2}{2f},$$

$$\text{oder auch } dp = q \left[ \frac{x\,dx}{f} - V dv \right],$$

wo die Integration wieder nur dann möglich ist, wenn $q$ entweder blos vom Drucke abhängt, oder auch eine Function von $W$ ist. Wenn also in einem homogenen Fluido die Wärme nicht allenthalben gleich ist, so mufs sie eine Function von $W$ oder in allen denjenigen Punkten gleich grofs seyn, für welche $W$ einerlei Werth erhält: und alsdann wird das Gleichgewicht bestehen, und auch die Werthe von $q$ sowohl als von $p$ in allen diesen Punkten gleich werden, woraus sich dann die Form der äquilibrirenden Schichten, folglich auch die Gestalt der freien Oberfläche bestimmen läfst. Nimmt man an, dafs $V$ für die ganze Oberfläche der Erde gleich grofs sey, was man wohl, wenn keine grofse Genauigkeit verlangt wird, voraussetzen darf, so ist $V = 1$ der natürlichen Schwere gleich, und

$$dp = q \left[ \frac{x\,dx}{f} - dv \right],$$

folglich für alle Punkte, wo der Druck $p$ einerlei Werth erhält, oder $dp = 0$ ist, das heifst, für die äquilibrirenden Schichten $V = \text{Const.} + \frac{x^2}{2f}$, eine Gleichung, welche die Figur aller dieser Schichten, mithin auch die Figur der freien Oberfläche bestimmt. Wenn also die halbe Axe dieser Fläche $CA = k$ ist, so wird Const. $= k$, weil für die in der Axe liegenden Punkte $x = 0$ ist, dagegen wird für den Aequatorealhalbmesser, wo $x = v$, $x^2 - 2fx + 2kf = 0$ oder $x = f \pm \sqrt{(f^2 - 2kf)}$, wo $f$ sehr grofs mufs angenommen werden, weil die Kraft $\frac{x}{f}$ sehr klein in Vergleichung der Schwere ist.

93. Wenn man also die Figur des Meeres bestimmen will, so wird, wenn man $q = 1$ setzt, für jeden Punkt $z$ der Druck $p = k - v + \frac{x^2}{2f}$, für die äufserste Oberfläche aber der Halbmesser des Aequators $= f - \sqrt{(f^2 - 2fk)} = k + \frac{k^2}{2f} + \frac{k^3}{2f^2}$, wenn $k$ die halbe Axe und $f$ sehr viel gröfser als $k$ ist.

94. Um $f$ zu bestimmen, wollen wir die Zeit, in welcher die Erde sich um ihre Axe dreht, $= \mu$ Secunden setzen, denn alsdann wird $f = \frac{\mu^2 g}{2\pi^2}$, wenn $g$ die Höhe des freien Falles in der ersten Secunde für Körper, auf welche blos die $= 1$ gesetzte Kraft der Schwere wirkt, ist. Setzt man hier $\mu = 86164''$, und die halbe Erdaxe $k = 19600000$ Fufs, so wird $f = \frac{1}{290}$, und der Halbmesser des Aequators ungefähr $= \frac{581 \cdot k}{580}$, und wenn verschiedene Fluida von ungleicher Dichtigkeit sich so nahe an der Oberfläche des Meeres befänden, dafs man auch für sie die Attraction der Erde (das ist die Schwere, sofern sie wegen der Schwungkraft nicht corrigirt ist) allenthalben $= 1$ setzen könnte, so würden alle diese Fluida Schichten von gleicher Dichtigkeit, deren Aequatorealhalbmesser zur halben Axe dasselbe Verhältnifs hätte, um die Erde bilden.

94 *b*). Es ist zwar einleuchtend, dafs die Supposition $V = 1$ nicht für jeden Punkt an der Oberfläche der Erde genau richtig ist, selbst dann nicht, wenn man den Mittelpunkt der Erde als den einzigen anziehenden Punkt, oder die Masse der Erde als im Mittelpunkte vereinigt betrachten dürfte, weil nämlich die verschiedenen Punkte der Oberfläche verschiedene Entfernungen vom Centro haben. Obgleich die Rücksicht auf diesen Umstand die Resultate nur wenig ändert, so will ich die Rechnung doch nach der Voraussetzung, dafs $V$ dem Quadrate des Abstandes $v$ vom Mittel-

punkte umgekehrt proportional sey, wiederholen. Ich setze wieder die halbe Axe der Erde $= k$, und die Schwerkraft am Pole an der Oberfläche der Erde oder des Meeres $= 1$, also für irgend einen andern Punkt $Z$ die Kraft $V = \frac{k^2}{v^2}$, so erhalte ich nun aus der Hauptgleichung

$$dp = q\left[\frac{x\,dx}{f} - V\,dv\right]$$

$$dp = q\left[\frac{x\,dx}{f} - \frac{k^2\,dv}{v^2}\right].$$

Soll also hier die Lage des Punktes $Z$ so geändert werden, daſs er auf derselben äquilibrirenden Schichte bleibt, oder daſs $dp = 0$ wird, so erhält man für die Figur dieser Schichten die Gleichung Const. $= \frac{x^2}{2f} + \frac{k^2}{v}$, oder weil am Pole für $v = k$ $x = 0$ ist, bestimmter $k = \frac{x^2}{2f} + \frac{k^2}{v}$ für diejenige Schichte, deren halbe Axe $AC = k$ ist, das ist für die Oberfläche des Meeres. Der Halbmesser des Aequators wird also hier durch die Gleichung $v^3 - 2fkv + 2fk^2 = 0$ bestimmt, woraus $v = k + \frac{k^2}{2f} + \frac{3}{4}\frac{k^3}{f^2}$ folgt — ein Werth, der von dem vorigen nur im dritten Gliede verschieden ist, wodurch das Verhältniſs $\frac{v}{k}$ wenig geändert wird.

Hätte man in die Gleichung $x^2 . v - 2fkv + 2fk^2 = 0$ für $x$ seinen allgemeinen Werth $x = v$ Cos. $\varphi$ gesetzt, wenn $\varphi$ die geographische Breite des Ortes $Z$ bezeichnet, so würde für den Radius $v$ der Oberfläche des Meeres die allgemeine Formel

$$v = k + \frac{k^2 \text{ Cos. } \varphi^2}{2f} + \frac{3}{4}\,\frac{k^3 \text{ Cos. } \varphi^4}{f^2}$$

gefunden, wenn man die mit höhern Potenzen von $f$ dividirten Glieder als unbedeutend wegläſst.

95. Die Gleichung für $p$ läſst sich nun zwar nicht auf die Bestimmung des Druckes, welchen ein im Innern der Erde liegendes Theilchen leidet, anwenden, weil da, wegen der Attraction der höhern Schichten, die Voraussetzung, daſs die ganze Masse der Erde im Centro vereinigt sey, gar zu weit von der Wahrheit abwiche. Auf die Atmosphäre aber können wir die vorigen Gleichungen eher anwenden, wenigstens um einige allgemeine Folgerungen zu ziehen, weil da die Voraussetzung $V = \frac{k^2}{v^2}$ nur in sofern unrichtig ist, als die Erde nicht genau eine Kugel ist.

Bezeichnet also hier $k$ die halbe Erdaxe, $v$ den Radius des Erdsphäroids für die geographische Breite $= \varphi$, und $v'$ den Abstand eines unter derselben Breite oder auf demselben Radio befindlichen Lufttheilchens vom Mittelpunkte der Erde, so ist auch für die Luft

$$\frac{dp}{q} = \frac{x\,dx}{f} - \frac{k^2\,dv'}{v'^2}.$$

Da wir hier die Temperatur als überall gleich voraussetzen, so hängt die Dichtigkeit der Luft blos vom Drucke ab: ich setze daher $q = \frac{bp}{a}$, und nehme an, daſs $b$ die Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche des Meeres unter dem Pole, und $a$ der Druck ist, welchen sie bei dieser Dichtigkeit ausübt, so wird

$$\frac{a}{b}\log.p = \text{Const.} + \frac{v'^2\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{2f} + \frac{k^2}{v'},$$

und Const. $= \frac{a}{b}\log.a - k$, weil an der Oberfläche des Meeres, unter dem Pole $v' = k$, $p = a$, Cos. $\varphi = 0$ wird. Es ist also allgemein

$$\frac{a}{b}\log.\frac{a}{p} = k - \frac{v'^2\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{2f} - \frac{k^2}{v'}.$$

Der letzte Theil der Gleichung verschwindet, wenn man für $v'$ den dieser Breite entsprechenden Radius des Erd-

sphäroids setzt; man hat daher an der ganzen Oberfläche des Meeres log. $\frac{a}{p} = 0$, also ist $p = a$, oder der Druck der Luft ist an der Oberfläche des Meeres überall gleich grofs, folglich auch die Dichtigkeit der Luft — welches auch schon daraus erhellte, weil wir oben die Figur der Oberfläche des Meeres durch die Voraussetzung $dp = 0$ bestimmten. Um nun auch für verschiedene Höhen $= u$ über der Oberfläche des Meeres den Druck der Luft zu bestimmen, setze ich

$$v' = v + u = k + u + \frac{k^2 \operatorname{Cos.} \varphi^2}{2f} + \frac{3}{4}\,\frac{k^3 \operatorname{Cos.} \varphi^4}{f^2},$$

und finde nun, wenn ich die mit $f^3$ dividirten Glieder, auch die in $\frac{u^3}{k^3}$ oder $\frac{u^2}{f^2}$ multiplicirten weglasse,

$$\log.\frac{a}{p} = \frac{bu}{a}\left\{1 - \frac{u}{k} - \frac{2k \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{u \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2} - \frac{5k^2 \operatorname{Cos.} \varphi^4}{4f^2}\right\}.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs in derselben Höhe $= u$ über der Oberfläche des Meeres der Druck der Luft $= p$ nicht unter allen Breiten gleich ist, sondern desto gröfser, je näher man dem Aequator ist; denn das positive Glied $\frac{u \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}$ wird bei allen Höhen, die wir erreichen können, äufserst unbedeutend gegen das negative Glied $\frac{2k \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}$. Es erhellet also, dafs die gleich dichten Luftschichten am Aequator der Erde weiter von der Oberfläche des Meeres entfernt sind, als unter dem Pole.

95 b). Hätte ich in der Hauptgleichung für das Gleichgewicht flüssiger Körper die Kraft $V = 1$ gesetzt, oder auf die Aenderung der Attraction in verschiedenen Entfernungen vom Centro der Erde nicht gesehen, so hätte ich, wenn alle Buchstaben ihre Bedeutung behalten,

$$\log.\frac{a}{p}=\frac{b}{a}\left[v'-k-\frac{v'^2\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{2f}\right]$$

gefunden, also, da hier der Radius des Erdsphäroids

$$=k+\frac{k^2\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{2f}+\frac{k^3\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^4}{2f^2}$$

ist, für die Höhe $= u$ über dem Meere

$$\log.\frac{a}{p}=\frac{bu}{a}\left[1-\frac{k\,\mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{f}-\frac{u\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{2f}-\frac{k^2\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^4}{2f^2}\right],$$

wo ebenfalls deutlich in die Augen fällt, dafs für einerlei Werth von $u$, der $\log.\frac{a}{p}$ kleiner wird, wenn Cos. $\varphi$ wächst, oder dafs in der Nähe des Aequators in derselben Höhe $= u$ der Druck der Luft gröfser ist, als unter dem Pole.

95 *c*). Beim ersten Anblicke scheint es, als ob diese Gleichungen unmittelbar eine Correction der aus barometrischen Messungen berechneten Höhen angäben; man darf aber dieses nicht so geradezu behaupten, ohne noch auf einen Umstand Rücksicht zu nehmen, nämlich darauf, dafs die Barometerhöhen nur unter gewissen Bedingungen dem Drucke proportional sind. Der Ausdruck, dafs $a$ und $p$ Höhen einer Säule sind, deren Gewicht dem Drucke $a$ und $p$ gleich ist, gilt nämlich nur dann, wenn die auf die Materie dieser Säule wirkende Schwere $= 1$, und auch ihre Dichtigkeit $= 1$ ist. Die Dichtigkeit des Quecksilbers können wir hier, wo von Unterschieden der Temperatur nicht die Rede ist, zwar immer $= 1$ setzen, aber die Kraft der Schwere ist wegen der Verminderung durch die Schwungkraft selbst an der Oberfläche der Erde nicht überall gleich grofs. Nenne ich also jetzt bestimmter die beschleunigende Kraft, welche am Pole der Erde, und zwar an der Oberfläche des Meeres, die Körper gegen die Erde treibt, $= 1$; so wird unter der Breite $= \varphi$ in der Entfernung $= v'$ vom Mittelpunkt der Erde diese Kraft

$$=\left[\frac{k^2}{v'^2}-\frac{x\ \mathrm{Cos.}\ \varphi}{f}\right]=\left[\frac{k^2}{v'^2}-\frac{v'\mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{f}\right],$$

wenn man auf die Abnahme der Attraction in gröſsern Entfernungen Rücksicht nimmt. Der Druck der Luft ist dem Gewichte der Quecksilbersäule im Barometer gleich, also hier, wo des Quecksilbers Dichtigkeit $= 1$ ist, dieser Druck

$$p = p' \left[\frac{k^2}{v'^2} - \frac{v' \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}\right],$$

wenn die Barometerhöhe $= p'$ ist, in dem durch den Abstand $= v'$ und die Breite $= \varphi$ bestimmten Punkte. Der Druck der Luft ist an der Oberfläche des Meeres $= a$, wenn also unter der Breite $= \varphi$ die Barometerhöhe am Meere $= a$ ist, so wird

$$a' \left[\frac{k^2}{v^2} - \frac{v \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}\right] = a,$$

wenn $v$ den Radius der Meeresfläche für diese Breite bezeichnet. Setze ich also jetzt wieder $v' = v + u$, und bringe in die zwischen $p$ und $u$ gefundene Gleichung statt $p$ und $a$ ihre durch $p'$ und $a'$ ausgedrückten Werthe, so ist

$$\log. \left\{ \frac{a'}{p'} \; \frac{\left[\frac{k^2}{v^2} - \frac{v \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}\right]}{\left[\frac{k^2}{(v+u)^2} - \frac{(v+u) \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}\right]} \right\} = \frac{b u w}{a' \left[\frac{k^2}{v^2} - \frac{v \operatorname{Cos} \varphi^2}{f}\right]};$$

$$\text{wo } w = 1 - \frac{u}{k} - \frac{2k \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{u \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2} - \frac{5k^2 \operatorname{Cos} \varphi^4}{4f^2}$$

ist. Nun aber ist, wenn man für $v$ seinen Werth setzt,

$$\frac{v^2}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^3 \operatorname{Cos.} \varphi^2}{k^2 f}} = 1 + \frac{2k \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{21}{4} \cdot \frac{k^2 \operatorname{Cos.} \varphi^4}{f^2},$$

$$\text{daher } \log. \frac{a'}{p'} = \frac{b u}{a'} \left[1 - \frac{u}{k} - \frac{u \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2}\right]$$

$$+ \log. \left[\frac{\frac{k^2}{(v+u)^2} - \frac{(v+u) \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}}{\frac{k^2}{v^2} - \frac{v \operatorname{Cos.} \varphi^2}{f}}\right],$$

wo im Coefficienten von $\frac{bu}{a'}$ blos die sehr kleinen Glieder, welche die Factoren $\frac{u^2}{kf}$ oder $\frac{u^3}{k^3}$ enthalten, weggelassen sind. Restituirt man auch in

$$\log. \left\{ \frac{\frac{k^2}{(v+u)^2} - \frac{(v+u)\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f}}{\frac{k^2}{v^2} - \frac{v\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f}} \right\}$$

für $v$ seinen Werth, so erhält man dafür

$$\log. \left[1 - \frac{2u}{k} - \frac{2u\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f} + \frac{3u^2}{k^2}\right],$$

welcher nahe genug

$$= - \frac{2u}{k} - \frac{2u\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2}$$

ist. Es wird also

$$\log. \frac{a'}{p'} = \frac{bu}{a'}\left[1 - \frac{u}{k} - \frac{u\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2}\right] - \frac{2u}{k} - \frac{2u\,\text{Cos.}\,\varphi^2}{f} + \frac{u^2}{k^2};$$

und folglich ist log. $\frac{a'}{p'}$ für gleiche Werthe von $u$ zwar unter dem Aequator etwas kleiner, als am Pole, aber dieses ist wegen der Kleinheit des Bruches $\frac{u}{f}$, der selbst in den höchsten Gegenden der Atmosphäre, wenn man z. B. $u = 8$ Meilen nimmt, nur $\frac{1}{30000}$ beträgt, gänzlich unbedeutend.

95 *d*). Da man bei den barometrischen Höhenmessungen gewöhnlich auf die Verminderung der Schwere in gröſsern Höhen nicht Rücksicht nimmt, so will ich noch kurz die Formeln des §. 95 *b*). so ausdrücken, daſs die Barometerhöhen statt des Druckes gesetzt werden. Bei der Voraussetzung $V = 1$ ist, wenn $a'$ und $p'$ die Barometerhöhen bedeuten, welche unter der geographischen Breite

$= \phi$ dem Drucke $a$ am Meere und dem Drucke $p$ in der Höhe $= u$ entsprechen,

$$a = a' \left[1 - \frac{v \,\text{Cos.}\, \phi^2}{f}\right]$$

$$\text{und } p = p' \left[1 - \frac{(v + u)\,\text{Cos.}\, \phi^2}{f}\right],$$

wofür ich sehr nahe richtig auch

$$p = p' \left[1 - \frac{v \,\text{Cos.}\, \phi^2}{f}\right]$$

annehmen kann. Setze ich diese Werthe in §. 95 *b*), so wird

$$\log. \frac{a'}{p'} = \frac{b u}{a'} \frac{\left[1 - \frac{k \,\text{Cos.}\, \phi^2}{f} - \frac{u \,\text{Cos.}\, \phi^2}{2f} - \frac{k^2 \,\text{Cos.}\, \phi^4}{2f^2}\right]}{1 - \frac{v \,\text{Cos.}\, \phi^2}{f}},$$

$$\text{oder } \log. \frac{a'}{p'} = \frac{b u}{a'} \left[1 - \frac{u \,\text{Cos.}\, \phi^2}{2f} - \frac{u k \,\text{Cos.}\, \phi^4}{2f^2}\right],$$

welches mit der gewöhnl. Rechnung, da man $\log. \frac{a'}{p'} = \frac{b u}{a'}$ setzt, fast völlig übereinstimmt, da der Bruch $\frac{u}{2f}$ selbst bei den höchsten Bergen noch kaum $\frac{1}{400000}$ beträgt.

Es erhellet also hieraus, daſs man bei den Höhenberechnungen aus barometrischen Beobachtungen nicht auf die sphäroidische Gestalt der äquilibrirenden Luftschichten Rücksicht zu nehmen braucht; denn ob es gleich wahr ist, daſs die Luftschichte, in welcher man sich am Aequator in der Höhe $= u$ über dem Meere befindet, dichter ist, und mehr Druck ausübt, als die Luft in der Höhe $= u$ unter dem Pole, so fällt doch dieser Unterschied des Druckes, wegen der Verminderung der Schwerkraft unter dem Aequator, ganz aus den Formeln für die Höhenmessung weg,

wenn man den Druck durch die zugehörigen Barometerhöhen ausdrückt *).

96. Die hier gefundenen Formeln für die Gestalt der Erde geben die Abplattung derselben viel zu geringe an, wovon der Grund in der unrichtigen Voraussetzung, daſs die anziehende Kraft blos dem Centro der Erde eigen sey, liegt. Wir wissen, daſs jedes Theilchen der Erde die übrigen anzieht, und dieses hätte bei der gegenwärtigen Untersuchung in Betrachtung gezogen werden sollen: wir werden daher auf diesen Gegenstand noch einmal zurückkommen, jetzt aber zu dem Probleme übergehen, auf dessen Auflösung

*) Ich habe diese Untersuchung hier ausführlich mitgetheilt, weil eine Aeuſserung von Laplace im 1ten Bande der Mechanik des Himmels, S. 141. (der deutschen Uebers.) verleiten könnte, zu glauben, daſs die Formel, welche die Gestalt der äquilibrirenden Luftschichten angibt, unmittelbar zu einer Correction der aus dem Barometerstande berechneten Berghöhen führe. Dieser Irrthum, (denn es scheint allerdings, als ob Laplace, welcher diese Correction nur im Vorbeigehen erwähnt, an den Umstand nicht gedacht habe, der sie unnöthig macht) — dieser Irrthum ist zwar von Hrn. Rohde in einer eignen kleinen Schrift: Ueber Laplace's neue Correction der aus barometrischen Beobachtungen berechneten Berghöhen — berichtigt, aber Hrn. Rohde's Schlüsse sind selbst nicht ganz von Vorwürfen frei, indem er bei der ersten Widerlegung des Laplace'schen Satzes unrichtig annimmt, daſs die Barometerhöhe am Meere auf der ganzen Erde gleich groſs sey, weil der Druck der Luft gleich groſs ist; nachher nimmt er zwar auf die Ungleichheit der Barometerhöhen bei gleichem Drucke, wenn die Kraft der Schwere verschieden ist, gehörige Rücksicht, und führt die Rechnung mit einer weit gröſsern Genauigkeit, als hier erfordert wird, indem er z. B. auf die Correction der Höhe Rücksicht nimmt, welche aus der Abweichung des Radius von der Normallinie entsteht (eine Correction, die bei den höchsten Bergen nur einige Zolle beträgt), verwechselt aber am Ende wieder Barometerhöhe und Druck der Luft, und schlieſst, daſs die gleich dichten Luftschichten (couches de niveau) überall gleich weit von der Oberfläche des Meeres entfernt sind, weil er nicht darauf Rücksicht nimmt, daſs der Barometerstand am Meere selbst von der geographischen Breite des Ortes abhängt. B.

die ersten oberflächlichen Bestimmungen der Ebbe und Fluth beruhen.

97. Problem 16. Wenn sich in $C$ (Fig. 21.) der Mittelpunkt der Erde, in $E$ aber ein andrer Weltkörper befindet, dessen anziehende Kraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats seiner Entfernung steht, die Bedingungen des Gleichgewichts für den Ocean oder die Atmosphäre, welche die Erde umgibt, anzugeben, wenn sowohl die Erde als der Körper $E$ als ruhend betrachtet werden.

Auflösung. Die Entfernung $CE$ sey $= h$, die Masse der Erde $= C$, die Masse des Körpers $E = E$, so kann man für die Entfernung $= d$ die anziehende Kraft der Erde $= \frac{C}{dd}$, die anziehende Kraft des Körpers $E = \frac{E}{dd}$ setzen. Man betrachte nun ein Theilchen des flüssigen Körpers in $Z$, wo die Dichtigkeit $= q$, der Druck $= p$; so müssen die Wirkungen der beschleunigenden Kräfte auf dieses Theilchen bestimmt werden. Es sey $CZ = v$, $EZ = u$, also, wenn $ECZ = \varphi$, $u^2 = h^2 - 2hv.\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + v^2$; so wird das Theilchen $Z$ von einer Kraft $= \frac{C}{v^2}$, die wir $= 1$ setzen, wenn $Z$ an der Oberfläche der Erde genommen wird, gegen den Mittelpunkt $C$ getrieben, und die Gröfse der Wirkung dieser Kraft ist $= \int \frac{C dv}{v^2} = \frac{-C}{v}$. Eben so wird dasselbe Theilchen gegen $E$ mit einer Kraft gezogen, deren Wirkung $= -\frac{E}{u}$ ist. Weil aber auch der Mittelpunkt der Erde mit einer Kraft $= \frac{E}{h^2}$ nach $E$ hin angezogen wird, und wir diesen als ruhend angenommen haben, so mufs man sich diese Kraft als an jeden Punkt der Erde nach entgegengesetzter Richtung angebracht vorstellen: zieht man daher $ZY$ mit $EC$ parallel, dafs $ZY = v\,\mathrm{Cos.}\,\varphi$ sey,

so mufs man noch eine auf $Z$ nach der Richtung $ZY$ wirkende Kraft $= \frac{E}{h^2}$ annehmen, deren Wirkung also

$$= \int \frac{-E \,.\, d \,.\, v \,\text{Cos.}\, \varphi}{h^2} = \frac{-E v \,\text{Cos.}\, \varphi}{h^2}$$

ist. So erhält man für den Zustand des Gleichgewichts

$$dp = -q \left\{ \frac{C dv}{v^2} + \frac{E du}{u^2} + \frac{E \,.\, d \,.\, v \,\text{Cos.}\, \varphi}{h^2} \right\},$$

wo für $q$ ähnliche Bedingungen gelten müssen, wie vorhin, wenn das Gleichgewicht möglich seyn soll. Wenn man also die gesammte Wirkung aller Kräfte $= W$ nennt, so werden $p$ und $q$ als Functionen von $W$ ausgedrückt, und man erhält für jede äquilibrirende Schichte

$$\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{E v \,\text{Cos.}\, \varphi}{h^2} = \text{Const.}$$

Da aber $h$ gegen $v$ sehr grofs ist, so kann man für $\frac{1}{u}$ die Reihe

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{h} + \frac{v \,\text{Cos.}\, \varphi}{h^2} + \frac{v^2 (3 \,\text{Cos.}\, \varphi^2 - 1)}{2 \,.\, h^3}$$
$$+ \frac{v^3 \,.\, \text{Cos.}\, \varphi (5 \,\text{Cos.}\, \varphi^2 - 3)}{2 h^4} + \frac{v^4 (35 \,.\, \text{Cos}\varphi^4 - 30 \,.\, \text{Cos.}\varphi^2 + 3)}{h^5}$$

setzen, so dafs, wenn man die beständigen Gröfsen wegläfst, die gesammte Wirkung der Kräfte

$$W = -\frac{C}{v} - \frac{E v^2 (3 \,\text{Cos.}\, \varphi^2 - 1)}{2 h^3} - \frac{E v^3 \text{Cos}\varphi (5 \text{Cos}\varphi^2 - 3)}{2 h^4}$$
$$- \frac{E v^4 (35 \,\text{Cos.}\, \varphi^4 - 30 \,\text{Cos.}\, \varphi^2 + 3)}{8 h^5}$$

wird, woraus man dann $p = -\int q \, dW$ findet.

98. Wenn nun der Halbmesser der Erde $= k$ ist, so setzen wir $\frac{C}{k^2} = 1$. Man nimmt die Masse des Mondes etwa 60 mal kleiner an, als die der Erde; wenn also $E$ den Mond bedeutet, so ist $E = \frac{1}{60} C$, und da für die mittlere Entfernung des Mondes etwa $h = 60 \,.\, k$, so wird für den

Mond $\frac{E}{h^3} = \frac{C}{k^2} \cdot \frac{1}{12960000 . k} = \frac{1}{12960000 . k}$. Die Masse der Sonne setzen wir dagegen $= 329600 . C$, ihre mittlere Entfernung von der Erde $= 23700 . k$, also wird für die Sonne $\frac{E}{h^3} = \frac{1}{40388500 . k}$. Allgemein sey $\frac{E}{h^3} = \frac{1}{n k}$, so wird, weil man die folgenden Glieder weglassen darf,

$$W = -\frac{k^2}{v} - \frac{v^2 (3 \text{Cos.} \phi^2 - 1)}{2 n k} - \frac{v^3 \text{Cos.} \phi (5 \text{Cos.} \phi^2 - 3)}{2 n h k}.$$

Bei einem Fluido von unveränderlicher Dichtigkeit wird daher, wenn man $q = 1$ setzt, $p = \text{Const.} - W$. Um hier die beständige Gröfse zu bestimmen, sey $k$ der Halbmesser der Erde für diejenige Stelle der Oberfläche, wo $\phi = 0$ ist, also $CA = k$, so wird an der freien Oberfläche, wo $p = 0$,

$$k + \frac{1}{n} k + \frac{k^2}{n h} = \frac{k^2}{v} + \frac{v^2 (3 \text{Cos.} \phi^2 - 1)}{2 n k}$$
$$+ \frac{v^3 (\text{Cos.} \phi (5 \text{Cos.} \phi^2 - 3)}{2 n h k},$$

woraus man sehr nahe $v = k \left[1 - \frac{3 \text{Sin.} \phi^2}{2 n}\right]$ findet; denn, wenn man sich $v$ in einer Reihe von der Form

$$v = k \left[1 + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \ldots\right]$$

ausgedrückt vorstellt, so wird, wenn man die Glieder wegläfst, welche höhere Potenzen von $n$ oder $nh$ im Nenner enthalten, $1 + \frac{1}{n} = 1 - \frac{A}{n} - \frac{1 - 3 \text{Cos.} \phi^2}{2 n}$, folglich $A = -\frac{3 \text{Sin.} \phi^2}{2}$. Der Halbmesser $CD$, für welchen $\phi = 90°$ ist, wird also $= k \left[1 - \frac{3}{2 n}\right]$ um die Gröfse $\frac{3 k}{2 n}$ kleiner, als $CA$. Und diese Gröfse beträgt, wenn ich für $n$ die vorhin gefundnen Werthe setze, für den Mond $2\frac{1}{4}$ Fufs, für die Sonne $\frac{3}{4}$ Fufs Pariser Mafs.

Wenn also die Erde ruhte, so würde das Meer an dem Orte, wo der Mond im Zenith steht, etwas mehr als zwei Fuſs höher, oder der Halbmesser für diesen Punkt der Oberfläche um so viel gröſser seyn, als für den Punkt, in welchem der Mond im Horizont erscheint; für die Sonne würde dieser Unterschied noch weniger betragen, und wenn beide Himmelskörper zu gleicher Zeit in $A$ im Zenith ständen, so würde das Meer etwa um 3 Fuſs höher seyn, als wenn sie über $D$ ständen. — Da die Erde nicht ruhet, und der Mond nach und nach über verschiedenen Punkten der Erde im Zenith steht, so gelangt das Meer nie zum Gleichgewichte, sondern der höhere und tiefere Stand der Oberfläche desselben wechselt periodisch ab, und bewirkt das täglich zweimal wiederkehrende Phänomen der Fluth und Ebbe. Eine genaue Betrachtung dieser Erscheinung dürfte daher nicht auf die Gesetze des Gleichgewichts gegründet werden, weil hier kein Zustand, in welchem das Fluidum fortdauernd beharrt, Statt findet, und aus diesem Grunde läſst sich von der hier geführten Rechnung keine genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwarten: indeſs bemerkt Laplace, daſs man in der Südsee die ganze Höhe der gröſsten Fluthen nur von 3 Fuſs gefunden habe. Die verschiedene Höhe der Fluth an andern Orten hängt von localen Umständen ab; auch die Verspätung der höchsten Fluth, daſs diese nämlich nicht in dem Augenblicke eintritt, da der Mond culminirt, hängt theils von örtlichen Umständen, von dem Widerstande ab, den das Wasser bei seiner Bewegung findet.

99. Eine ähnliche Untersuchung läſst sich für die Atmosphäre anstellen. Es sey in $A$ an der Oberfläche des Meeres der Druck der Luft $= a$, ihre Dichtigkeit $= b$, und die dem Drucke $p$ entsprechende Dichtigkeit sey $= q = \frac{bp}{a}$, so erhält man log. $p =$ Const. — $\frac{b\,W}{a}$, oder

$$\frac{a}{b} \log. \frac{p}{a} = \frac{k^2}{v} + \frac{v^2 (3 \text{ Cos. } \varphi^2 - 1)}{2nk} - k - \frac{k}{n},$$

woraus für $v = k$ folgt: $\frac{a}{b} \log. \frac{p}{a} = - \frac{3k \text{ Sin. } \varphi^2}{2n}$, oder, weil man hier $\log. \frac{p}{a} = -1 + \frac{p}{a}$ setzen kann,

$$p = a - \frac{3kb \text{ Sin. } \varphi^2}{2n}.$$

Der Druck der Luft ist also in gleichem Abstande vom Mittelpunkte der Erde nicht überall gleich, sondern da am kleinsten, wo der Mond im Horizonte steht. — Daſs dies so seyn müsse, erhellt schon daraus, weil an der Oberfläche des Meeres der Druck in jedem Punkte gleich ist; nennt man aber $CA = k$, und nimmt auf andere Radien, z. B. auf $CD$, einen eben so weit, als $A$ vom Mittelpunkte abliegenden Punkt, so liegt dieser oberhalb der Meeresfläche, und seine Höhe über derselben ist $= \frac{3k. \text{Sin. } \varphi^2}{2n}$, der Druck der Luft ist also hier um das Gewicht der Luftsäule, deren Höhe $= \frac{3}{2} \frac{k \text{ Sin. } \varphi^2}{n}$ ist, kleiner, als an der Oberfläche des Meeres, oder als in $A$; das Gewicht dieser Luftsäule aber ist $= \frac{3kb. \text{Sin. } \varphi^2}{2n}$.

100. Um den Einfluſs, welchen dieser Unterschied des Druckes auf den Barometerstand hat, näher zu bestimmen, setze ich die Barometerhöhe in $A$ an der Oberfläche des Meeres $= a'$, welche dem Drucke $= a$ entspricht; an einem andern Orte $Z$, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Erde eben so groſs ist, nämlich $CZ = k$, sey der Druck $= p$, der Barometerstand $= p'$.

Da wir die Kraft der Attraction der Erde an ihrer Oberfläche $= 1$ setzen, so ist die gesammte Kraft, welche in $A$ (Fig. 21.) den Fall der Körper beschleunigt,

$$= 1 + \frac{E}{h^2} - \frac{E}{(h-k)^2} = 1 - \frac{Ek(2h-k)}{h^2(h-k)^2},$$

der Bruch $\frac{1}{n}k$ etwa $= 1\frac{1}{2}$ Fuſs, also $\frac{3kb}{2n} = \frac{1}{2500}$ Fuſs, und $\frac{3a'}{n}$ nur etwa $= \frac{1}{2000000}$ Fuſs; die Summe dieser Brüche würde angeben, um wie viel das Barometer höher steht, wenn der Mond im Zenith, als wenn er im Horizonte eines Ortes ist. Für die Wirkung der Sonne wird diese Aenderung noch erheblich kleiner.

101. Aus diesen Betrachtungen erhellt, daſs Mond und Sonne eine Fluth im Ocean bewirken, wenn diese Himmelskörper sich dem Zenith oder Nadir eines Ortes nähern, und daſs dagegen die tiefste Ebbe, oder der niedrigste Stand des Wassers eintritt, wenn sie im Horizonte stehen. Da aber der Mond nicht lange im Zenith desselben Ortes bleibt, so übersieht man, daſs die Fluth erst ihre gröſste Höhe erreichen wird, wenn der Mond schon über das Zenith hinausgerückt ist, und daſs diese Verspätung desto erheblicher seyn wird, je mehr Widerstand der Zufluſs des Wassers findet.

102. Bei der Betrachtung der Wirkung, welche der Mond oder die Sonne auf unsre Atmosphäre hervorbringt, wollen wir noch einen Augenblick verweilen.

Wir betrachten hier die Erde als sphärisch, und setzen ihren Halbmesser $= k$, erhebt man sich nun in $Z$, wo $ACZ = \phi$ ist, um die Höhe $= s$ über die Oberfläche der Erde, so ist $v = k + s$, und man erhält für $p$ den Ausdruck

$$\frac{a}{b}\log.\frac{p}{a} = \frac{k^2}{k+s} + \frac{(k+s)^2\,(3\,\mathrm{Cos.}\,\phi^2 - 1)}{2\,nk} - k - \frac{k}{n},$$

oder wenn man die sehr kleinen Glieder wegläſst, welche den Factor $\frac{s}{n}$ enthalten, $\frac{a}{b}\log.\frac{p}{a} = -s - \frac{3k}{2n}\,\mathrm{Sin.}\,\phi^2$,

oder $\frac{p}{a} = e^{\left(-\frac{bs}{a} - \frac{3kb}{2na}\,\mathrm{Sin.}\,\phi^2\right)}$, wenn $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist, und $a$ den Druck der

Luft in $A$ an der Oberfläche des Meeres, $b$ die Dichtigkeit derselben daselbst bezeichnet. Erhebt man sich also in $A$ um die Höhe $= s$ über das Meer, so ist da die Dichtigkeit der Luft $= b \,.\, e^{\frac{-bs}{a}}$, in $D$ aber ist in derselben Höhe die Dichtigkeit $= b \,.\, e^{\left(-\frac{bs}{a} - \frac{3kb}{2na}\right)}$. Denkt man sich nun in $A$ oder $B$ eine Luftsäule, deren Querschnitt $= ff$, ihre Höhe $= s$ ist, so findet man die Masse derselben

$$= fff q\, ds = \text{Const.} - aff \,.\, e^{\frac{-bs}{a}} = aff \left[1 - e^{\frac{-bs}{a}}\right];$$

die Masse einer gleich hohen Luftsäule in $D$ aber ist

$$= aff \left[1 - e^{\frac{-bs}{a}}\right] e^{-\frac{3kb}{2na}};$$

oder, weil man $e^{-\frac{3kb}{2na}} = 1 - \frac{3kb}{2na}$ setzen kann, so verhält sich die letzte zur erstern, wie $1 : 1 - \frac{3kb}{2na}$.

Es muſs also eine groſse Quantität Luft nach $A$ und $B$ zuströmen, wenn der Mond sich dem Zenith oder Nadir dieser Oerter nähert; und es findet eine ähnliche Bewegung in der Atmosphäre wie im Ocean Statt, wovon das Barometer nur deswegen so wenig anzeigt, weil die Schwere der in $A$ und B angehäuften Luft durch die Attraction des Körpers $E$ vermindert wird.

Mit welcher Geschwindigkeit aber das Wasser oder die Luft gegen $A$ und $B$ zuströme, das läſst sich hier nicht bestimmen, da die gegenwärtigen Untersuchungen blos den Zustand des Gleichgewichts betreffen, zu welchem das Meer und die Atmosphäre gelangen würden, wenn der Himmelskörper immer über derselben Gegend der Erde stehen bliebe. Wollten wir die Wirkungen bestimmen, welche erfolgen, wenn der Mond fortrückt und die Fluida der Erde gar nicht zum Gleichgewichte gelangen, so müſs-

ten wir die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper kennen, über welche aus den bisherigen Lehren sich noch nichts bestimmen läſst.

## Sechster Abschnitt.

### *Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, deren Theilchen sich gegenseitig anziehen, und auf welche auſserdem andre beschleunigende Kräfte wirken.*

103. Die Resultate der im vorigen Abschnitte angestellten Untersuchungen über die Figur der Erde entfernten sich, wie schon erwähnt ist, vorzüglich deswegen von der Wahrheit, weil wir die anziehende Kraft der Erde, als im Mittelpunkte derselben vereinigt, ansahen: es ist daher der Mühe werth, diese Untersuchung so zu wiederholen, daſs wir jedes Theilchen der Erde, als auf das andre wirkend, betrachten. Wir nehmen hiebei an, daſs die Erde die Gestalt eines durch Umdrehung entstandenen Sphäroids habe und durchaus gleich dicht sey, und werden zuerst zu bestimmen suchen, wie die Attraction eines solchen Sphäroids auf einen innerhalb desselben, oder an seiner Oberfläche liegenden Punkt wirkt.

104. Die Lage jedes Theilchens $Z$ (Fig. 22.) des anziehenden Körpers sey durch die Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt, welche den auf einander senkrechten Axen $AB$, $AC$, $AD$ parallel sind. Das Volumen dieses Theilchens sey $= dx\,dy\,dz$, seine Dichtigkeit $= \varrho$, so ist die Masse desselben $= \varrho\,dx\,dy\,dz$, welche ich $= dM$ setze, und die Masse des ganzen sphäroidischen Körpers mit $M$ bezeichne.

Ferner sey $S$ derjenige Punkt, für welchen die anziehende Kraft des ganzen Sphäroids bestimmt werden soll, und die Lage desselben sey durch die auf einander senkrechten Coordinaten $AQ = a$, $QR = b$, $RS = c$ gegeben, so ist die Entfernung dieses Punktes $S$ von dem Theilchen $Z$, $ZS = \sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]}$; und, da die anziehende Kraft im directen Verhältnisse der Masse und im umgekehrten des Quadrats der Entfernung steht, so wirkt dieses Theilchen $Z$ auf den Punkt $S$ mit einer Kraft, welche der Gröfse $\frac{dM}{ZS^2}$ proportional ist: ich setze diese Kraft $= \frac{dM}{h \cdot ZS^2}$, um, der bisherigen Bezeichnungsart gemäfs, die Kräfte durch Zahlen auszudrücken; denn da $dM$ drei Dimensionen hat, so bezeichnet $\frac{dM}{h \cdot ZS^2}$ eine blofse Zahl, wenn $h$ eine Linie ist. Aus dieser Differentialformel $\frac{dM}{h \cdot ZS^2}$ würde die Wirkung des ganzen Sphäroids auf den Punkt $S$ gefunden werden, wenn man das Integral derselben für das ganze Sphäroid bestimmen könnte.

105. Zerlegt man die Kraft $\frac{dM}{h \cdot ZS^2}$ nach der Richtung der drei Coordinaten, so erhält man die der Ordinate $x$ parallele Kraft $= \frac{(a-x)\,dM}{h[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$, und das Integral dieser Formel, auf das ganze Sphäroid erstreckt, drückt die aus der Attraction des ganzen Sphäroids auf den Punkt $S$ nach der Richtung der Ordinaten $x$ entspringende Kraft aus. Heifst also diese Kraft $= \frac{A}{h}$, die mit den Ordinaten $y$ parallele $= \frac{B}{h}$, und die mit den Ordinaten $z$ parallel wirkende Kraft $= \frac{C}{h}$, so ist

$$A = \iiint \frac{\varrho \,.\, (a-x)\, dx\, dy\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

$$B = \iiint \frac{\varrho\, (b-y)\, dx\, dy\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \iiint \frac{\varrho\, (c-z)\, dx\, dy\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

wo die Integrale sich auf den ganzen anziehenden Körper erstrecken müssen.

106. Diese Integrationen lassen sich leichter ausrichten, wenn man statt der rechtwinklichten Coordinaten $x$, $y$, $z$ drei andre Gröfsen einführt, durch welche die Lage des Theilchens $Z$ bestimmt wird. Es sey nämlich die Entfernung desselben von $S$, $SZ = r$, der Winkel, welchen diese Linie mit einer den Ordinaten $x$ parellelen Linie $ZE$ macht, $= p$, und endlich die Neigung der Ebene $SZE$ gegen die mit den Ordinaten $x$ und $y$ parallele Ebene $GZE$ $= q$, so lassen sich die vorigen Formeln leicht durch diese Gröfsen ausdrücken.

Die Linie $EZ$, welche der Ordinate $x$ parallel gezogen, folglich auf die Ebene $CAD$ senkrecht ist, treffe verlängert diese Ebene in $m$, und $ms$ sey die Linie, in welcher die Ebene $DAC$ von der auf sie senkrechten Ebene $SZE$ geschnitten wird, $s$ aber sey der Punkt, in welchem eine aus $S$ auf die Ebene $DAC$ senkrecht gesetzte Linie dieselbe trift, so ist $sm$ die Projection der Linie $r$, und der Winkel $smg = q$, wenn $mg$ mit $AC$ parallel ist.

Es erhellet nun leicht, dafs $sm = r \,.\, \text{Sin.}\, p$,

$$a - x = r\ \text{Cos.}\, p,$$

$$b - y = sm \,.\, \text{Cos.}\, q = r\ \text{Sin.}\, p . \text{Cos.}\, q,$$

$$c - z = sm \,.\, \text{Sin.}\, q = r\ \text{Sin.}\, p\ \text{Sin.}\, q,$$

und da schon ohnehin bekannt ist, dafs

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

so fehlt zur Umformung der Ausdrücke des vorigen §. nichts, als dafs der Werth von $dx\,dy\,dz$ durch $p$, $q$ und $r$ ausgedrückt werde.



Bayerische Staatsbibliothek München

107. Lehrsatz. Wenn die Gröfsen $x, y, z$ und $p, q, r$ die angeführte Bedeutung haben, so ist

$$dx dy dz = r^2 \, dp dq dr \text{ Sin. } p.$$

Beweis. Das Parallelepipedum $ZEFGHIKN$ stelle das Theilchen $dM = dx dy dz$, und $mgnh$ die Projection desselben auf die Ebene $CAD$ vor; so ist $ZE = dx$, $ZG = mg = dy$, $ZH = mh = dz$. Ferner ist $SZ = r$, $SZE = p$, $ZSE = dp$, folglich, wenn $Ze$ auf $SE$ senkrecht ist, $Ze = r dp$, und $ZE = \frac{r dp}{\text{Sin. } p} = dx$.

Aus ähnlichen Gründen ist $smg = dq$, und

$$mg = \frac{sm \, . \, dq}{\text{Sin. } q} = \frac{r dq \text{ Sin. } p}{\text{Sin. } q} = dy.$$

Nennt man nun $r - dr$ denjenigen Theil von $SZ$, welcher zwischen $S$ und der Ebene $HIKN$ liegt, so ist

$$mt = dr \, . \text{ Sin. } p \text{ und } hm = dr \, . \text{ Sin. } p \, . \text{ Sin. } q = dz,$$

folglich das Product $dx dy dz = r^2 dp dq dr \, . \text{ Sin. } p$.

108. Man hat also jetzt, wenn man in §. 105. die gehörigen Werthe substituirt:

$$A = \int\int\int \varrho \, . \, dp dq dr \, . \text{ Sin. } p \, . \text{ Cos. } p.$$
$$B = \int\int\int \varrho \, . \, dp dq dr \, . \text{ Sin. } p^2 \text{ Cos. } q.$$
$$C = \int\int\int \varrho \, . \, dp dq dr \, . \text{ Sin. } p^2 \text{ Sin. } q,$$

wo sich die Integrale in Beziehung auf die veränderliche Gröfse $r$ leicht finden lassen, da offenbar, weil $\varrho$ eine beständige Gröfse ist,

$$A = \int\int \varrho \, . \, r dp dq \, . \text{ Sin. } p \text{ Cos. } p.$$

Eben so fände man die Werthe von $B$ und $C$, und diese Integrale müssen so genommen werden, dafs sie sich auf die Masse des ganzen anziehenden Körpers erstrecken. Da wir hier annehmen, dafs $S$ innerhalb des anziehenden Körpers liegt, so verschwindet das Integral mit $r$ zugleich, und erhält seinen vollständigen Werth, wenn $r$ bis an die Oberfläche des anziehenden Körpers genommen wird: da aber die Linie $SZ$ die Oberfläche des Körpers zweimal schneidet, und zwar an verschiedenen Seiten von $S$, so erhält

man den vollständigen Werth des Integrals, wenn man die beiden Werthe desselben zusammen nimmt. Sind nämlich $r'$ und $r''$ die Werthe, welche $SZ$ erlangt, wenn man sie bis an die Oberfläche des Körpers verlängert, so mufs man in das Integral $r' + r''$ statt $r$ setzen, und erhält folglich

$$A = \int\int \varrho\,(r' + r'')\,dp\,dq\ \text{Sin.}\,p\,.\,\text{Cos.}\,p,$$
$$B = \int\int \varrho\,.\,(r' + r'')\,dp\,dq\ \text{Sin.}\,p^2\ \text{Cos.}\,q,$$
$$C = \int\int \varrho\,.\,(r' + r'')\,dp\,dq\ \text{Sin.}\,p^2\,.\ \text{Sin.}\,q,$$

und es mufs nun, wenn die fernere Integration vorgenommen werden soll, statt $r' + r''$ sein durch $p$ und $q$ ausgedrückter Werth, aus der Gleichung für die Oberfläche des Körpers gesetzt werden; alsdann aber werden die Integrale so genommen, dafs sie mit $p$ und $q = 0$ verschwinden, und mit $p$ und $q =$ dem halben Umfange ihren vollständigen Werth erhalten.

109. Da wir hier blos von der Attraction solcher Sphäroide reden, die durch Umdrehung entstanden, oder deren zwei Hauptaxen gleich grofs sind, so haben wir für die Oberfläche derselben die allgemeine Gleichung

$$x^2 + m\,(y^2 + z^2) = k^2,$$

wenn die Ordinaten vom Mittelpunkte des Sphäroids an gerechnet werden, wo dann die mit $x$ parallele Axe die geometrische Umdrehungsaxe ist, und die halbe Länge derselben $= k$; die beiden mit $y$ und $z$ parallelen Hauptaxen aber werden gleich grofs, und ihre Hälften sind $= \frac{k}{\sqrt{m}}$.

Setzt man in diese Gleichung statt $x, y, z$ diejenigen durch $p, q, r$ ausgedrückten Werthe, welche im 106. §. angegeben sind, so wird

$$r^2 - 2\,r\,\frac{[a\ \text{Cos.}\ p + m\ \text{Sin.}\ p\ (b\ \text{Cos.}\ q + c\ \text{Sin.}\ q)]}{\text{Cos.}\ p^2 + m\ \text{Sin.}\ p^2}$$
$$= \frac{k^2 - a^2 - m\,(b^2 + c^2)}{\text{Cos.}\,p^2 + m\,\text{Sin.}\,p^2},$$

und folglich die Summe der beiden Wurzeln dieser Gleichung

$$r' + r'' = \frac{2 \cdot [a \,\mathrm{Cos.}\, p + m \,\mathrm{Sin.}\, p \,(b \,\mathrm{Cos.}\, q + c \,\mathrm{Sin.}\, q)]}{\mathrm{Cos.}\, p^2 + m \,\mathrm{Sin.}\, p^2}.$$

Es ist also für das durch Umdrehung entstandene Sphäroid

$$A = \iint \frac{2\,\varrho \,.\, dp dq \,\mathrm{Sin.}\, p \,\mathrm{Cos.}\, p [a \,\mathrm{Cos.}\, p + m \,\mathrm{Sin.}\, p (b \,\mathrm{Cos.}\, q + c \,\mathrm{Sin.}\, q)]}{\mathrm{Cos.}\, p^2 + m \,\mathrm{Sin.}\, p^2},$$

$$B = \iint \frac{2\,\varrho\, dp dq \,\mathrm{Sin.}\, p^2 \,\mathrm{Cos.}\, q [a \,\mathrm{Cos.}\, p + m \,\mathrm{Sin.}\, p (b \,\mathrm{Cos.}\, q + c \,\mathrm{Sin.}\, q)]}{\mathrm{Cos.}\, p^2 + m \,\mathrm{Sin.}\, p^2},$$

$$C = \iint \frac{2\varrho dp dq \,.\, \mathrm{Sin.}\, p^2 \,\mathrm{Sin.}\, q [a \,\mathrm{Cos.}\, p + m \,\mathrm{Sin.}\, p (b \,\mathrm{Cos.}\, q + c \,\mathrm{Sin.}\, q)]}{\mathrm{Cos.}\, p^2 + m \,\mathrm{Sin.}\, p^2},$$

und diese Formeln lassen sich mit Hülfe des folgenden Lehrsatzes noch einfacher machen.

110. Lehrsatz. Wenn $P$ eine rationale Function von Sin. $p$ und Cos. $p^2$ ist, so wird allemal $\int P dp \,\mathrm{Cos.}\, p = 0$, wenn dieses Integral für $p = 0$ verschwinden soll, und dann bis $p =$ dem halben Umfange genommen wird.

Beweis. Da $P$ eine rationale Function von Sin. $p$ und Cos. $p^2$ ist, so läſst sich $P$ als eine rationale Function der einzigen Gröſse Sin. $p$ betrachten, zugleich ist $dp \,.\, \mathrm{Cos.}\, p = d \,.\, \mathrm{Sin.}\, p$, folglich hängt $\int P \,.\, d \,.\, \mathrm{Sin.}\, p$ blos von Sin. $p$ ab, und erhält einerlei Werth, wenn Sin. $p$ einerlei Werthe beigelegt werden. Dieses Integral erhält also für $p = \alpha$ und für $p = 180^\circ - \alpha$ gleiche Werthe, und wenn es verschwindet, wenn $p = \alpha$ war, so verschwindet es abermals, wenn $p = 180^\circ - \alpha$ ist. Da nun vorausgesetzt ist, daſs das Integral mit $p = 0$ verschwinden, und mit $p = 180^\circ$ seinen vollständigen Werth erhalten soll, so erhellet, daſs dieser vollständige Werth wieder $= 0$ ist.

111. Da nun im §. 109. der Nenner der unter dem Integralzeichen stehenden Formeln eine Function von Sin. $p$ und Cos. $p^2$ ist, so verschwinden die Integrale aller derjenigen Glieder, welche im Zähler eine ungerade Potenz von Cos. $p$ enthalten.

Man übersieht aber leicht, daſs aus eben dem Grunde bei der Integration in Rücksicht auf $q$ ebenfalls die Inte-

grale derjenigen Glieder verschwinden, welche $dq$ Sin. $q$ Cos. $q$ enthalten, folglich kann man diese sogleich weglassen und setzen

$$A = \iint \frac{2\varrho\, a\, dp\, dq \text{ Sin. } p \text{ Cos. } p^2}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$B = \iint \frac{2\varrho\, m\, b\, dp\, dq \text{ Sin. } p^3 \text{ Cos. } q^2}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$C = \iint \frac{2\varrho\, m\, c\, dp\, dq \text{ Sin. } p^3 \text{ Sin. } q^2}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

und, wenn man in Beziehung auf $q$ integrirt,

$$A = \int \frac{2\varrho\, a\, q\, dp \text{ Sin. } p \text{ Cos. } p^2}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$B = \int \frac{2\varrho\, b\, m\, dp\,.\text{ Sin. } p^3 \left(\tfrac{1}{2} q + \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } q \text{ Cos. } q\right)}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$C = \int \frac{2\varrho\, c\, m\, dp \text{ Sin. } p^3 \left(\tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } q \text{ Cos. } q\right)}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

und bei dieser Integration kommt keine Constans hinzu, weil die Integrale mit $q$ zugleich verschwinden, ihr vollständiger Werth aber wird, wenn $q = \pi =$ dem halben Umfange ist

$$A = 2 a \varrho \pi \int \frac{dp \text{ Sin. } p\,.\text{ Cos. } p^2}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$B = b \varrho m \pi \int \frac{dp \text{ Sin. } p^3}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2},$$

$$C = c \varrho m \pi \int \frac{dp \text{ Sin. } p^3}{\text{Cos. } p^2 + m \text{ Sin. } p^2}.$$

112. Setze ich hier Cos. $p = x$, so wird

$$A = -2 a \varrho \pi \int \frac{x^2\, dx}{m + (1 - m) x^2},$$

$$B = -b \varrho m \pi \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{m + (1 - m) x^2},$$

$$C = -c \varrho m \pi \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{m + (1 - m) x^2};$$

oder, wenn $\frac{1-m}{m} = \lambda^2$,

$$A = \frac{2a\varrho\pi}{\lambda^2 m}\int\left\{\frac{dx}{1+\lambda^2x^2} - dx\right\},$$

$$B = \frac{b\varrho\pi}{\lambda^2}\int\left\{dx - \frac{(1+\lambda^2)dx}{1+\lambda^2x^2}\right\},$$

$$C = \frac{c\varrho\pi}{\lambda^2}\int\left\{dx - \frac{(1+\lambda^2)dx}{1+\lambda^2x^2}\right\},$$

woraus für $A$ folgt

$$A = \frac{2a\varrho\pi}{\lambda^2 m}\left\{\frac{1}{\lambda}\text{ Arc. tang. }\lambda x - x\right\} + \text{Const.}$$

und, weil für $x = 1$ das Integral verschwinden soll,

$$\text{Const.} = -\frac{2a\varrho\pi}{\lambda^3 m}[\text{Arc. tang. }\lambda - \lambda],$$

also der vollständige Werth des Integrals, den es für $x = -1$ erlangt (denn diese Integrale werden von $p = 0$ bis $p = \pi$ genommen),

$$A = \frac{4a\pi\varrho}{\lambda^3 m}[\lambda - \text{Arc. tang. }\lambda];$$

und auf ähnliche Weise

$$B = \frac{2b\pi\varrho}{\lambda^3 m}\left\{\text{Arc. tang. }\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\},$$

$$C = \frac{2c\pi\varrho}{\lambda^3 m}\left\{\text{Arc. tang. }\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\}.$$

Und hiemit sind die drei den Coordinaten $a$, $b$, $c$ parallelen Kräfte, welche aus der Attraction des Sphäroids auf den Punkt $S$ entspringen, bekannt, wenn die in den Formeln vorkommenden beständigen Gröfsen gegeben sind, und wenn $S$ ein Punkt innerhalb des Sphäroids oder an der Oberfläche desselben ist. Denn dafs die Formeln auch für Punkte, die in der Oberfläche liegen, gelten, läfst sich daraus schliefsen, weil sie für alle innerhalb liegende Punkte gelten, also auch für die, welche unendlich nahe an der Oberfläche liegen.

113. Aus den Kräften, welche nach der Richtung der Coordinaten wirken, $\frac{A}{h}$, $\frac{B}{h}$, $\frac{C}{h}$, findet man leicht die ganze Kraft, welche aus der vereinigten Wirkung jener entspringt, indem diese $= \frac{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}{h}$ ist.

Liegt $S$ in der geometrischen Umdrehungsaxe des Sphäroids und an der Oberfläche desselben, so ist für diesen Punkt $a =$ der halben Axe $= k$, $b = 0$, $c = 0$; daher $B = 0$, $C = 0$ und $\frac{A}{h} = \frac{4k\pi\varrho}{\lambda^3 mh}[\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda]$, und dieses ist die ganze Kraft, mit welcher der am Pole des Sphäroids liegende Punkt $S$ gegen dasselbe zu angezogen wird. Nimmt man diese Kraft als bekannt an, und setzt sie $= 1$, so erhält man eine Bestimmung für die Gröfse $h$, weil dann $h = \frac{4k\pi\varrho}{\lambda^3 m}[\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda]$ ist. Nehmen wir nun an, dafs diese als Einheit betrachtete Kraft den ihrer Wirkung unterworfenen Körper in der ersten Secunde durch den Raum $= g$ treibt, so wird jede andre Kraft $P$ ihn in derselben Zeit durch den Raum $= Pg$ treiben. Wir werden in der Folge $g$ und $h$ als bekannt ansehen.

114. Wäre der anziehende Körper eine Kugel, so ist $m = 1$, $\lambda = 0$; man hat aber allemal

$$\frac{\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda}{\lambda^3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\lambda^2 + \tfrac{1}{7}\lambda^4 - \tfrac{1}{9}\lambda^6 + \text{etc.}$$

$$\text{und } \frac{(1+\lambda^2)\,\text{Arc. tang. } \lambda - \lambda}{\lambda^3} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{15}\lambda^2 + \tfrac{2}{35}\lambda^4 - \text{etc.}$$

folglich hier, wo $\lambda = 0$ ist, wird $A = \frac{4\pi\varrho a}{3}$, $B = \frac{4}{3}\pi\varrho b$, $C = \frac{4}{3}\pi\varrho c$. Die ganze Kraft also, mit welcher der Punkt $S$ von der Kugel angezogen wird, ist $= \frac{4}{3}\pi\varrho\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$, oder, wenn $a^2+b^2+c^2 = K^2$, $= \frac{4}{3}\pi\varrho K$, und $K$ bedeutet die Entfernung des angezognen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel. Stellt man sich nun eine Kugel vom Halb-

messer $= K$ vor, deren Dichtigkeit $= \varrho$, so ist ihre Masse $= \frac{4}{3} \pi \varrho K^3$, also die anziehende Kraft, welche auf den Punkt $S$ wirkt, so groſs, als ob diese Masse im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre, $= \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho . K^3}{K^2}$.

Liegt $S$ in der Oberfläche des anziehenden kugelförmigen Körpers, so ist $K$ der Halbmesser desselben, und $S$ wird so gegen diese Kugel angezogen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre; dagegen, wenn $S$ innerhalb liegt, so wirkt die ihn umgebende Kugelschale gar nicht auf ihn, sondern blos die Masse desjenigen kugelförmigen Theils, der näher als $S$ beim Mittelpunkte liegt, und die Wirkung dieses Theils ist eben so groſs, als wenn seine Masse im Centro der Kugel vereinigt wäre.

115. Problem 17. Ein homogenes Fluidum, dessen Theilchen einander gegenseitig anziehen, und dessen äuſsere Oberfläche die Gestalt eines durch Umdrehung entstandenen Sphäroids hat, dreht sich mit gegebener Geschwindigkeit um seine geometrische Umdrehungsaxe, man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht bestehen kann.

Auflösung. Der Punkt $S$ (Fig. 22.) liege in der Oberfläche des Sphäroids, und seine Lage sey durch die auf einander rechtwinklichten Coordinaten $AQ = a$, $QR = b$, $RS = c$, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Sphäroids liegt, bestimmt, so wird die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids $k^2 = a^2 + m\,(b^2 + c^2)$ allgemein die Lage des Punktes $S$ ausdrücken. Hier bedeutet $k$ die halbe Umdrehungsaxe, welche mit den Coordinaten $a$ parallel ist, und $\frac{k}{\sqrt{m}}$ den Halbmesser des Aequators des Sphäroids.

Auf jeden Punkt $S$ wirket jetzt, auſser der Attraction des Sphäroids, auch noch die aus der Rotation entspringende Schwungkraft, die dem Abstande dieses Punktes von

der Axe $= \sqrt{(b^2 + c^2)}$ proportional ist, welche ich daher durch $\frac{\sqrt{(b^2+c^2)}}{f}$ ausdrücke. Zerlegt man diese Schwungkraft nach der Richtung der Coordinaten, so erhält man nach der Richtung der Coordinate $b$ die Kraft $= \frac{b}{f}$, nach der Richtung der Coordinate $c$ die Kraft $= \frac{c}{f}$, welche den aus der Attraction des Sphäroids entspringenden Kräften, die wir vorhin mit $\frac{B}{h}$ und $\frac{C}{h}$ bezeichneten, entgegen wirkten, indem die Schwungkraft den Punkt $S$ von der Axe zu entfernen strebt, statt daſs die eben genannten Attractionskräfte ihn gegen dieselbe zu ziehen.

Bezeichnet nun $P$ die Summe aller Kräfte, welche auf $S$ der Richtung $QA$ parallel wirken, $Q$ die Summe aller mit $RQ$ parallelen Kräfte, und $R$ die Summe aller mit $SR$ parallelen Kräfte, so ist

$$P = \frac{A}{h}, \quad Q = \frac{B}{h} - \frac{b}{f}, \quad R = \frac{Bc}{bh} - \frac{c}{f},$$

wenn $A$, $B$, $h$ die Bedeutung des 112. §. haben, statt $C$ aber sein Werth $C = \frac{Bc}{b}$ gesetzt wird. Setze ich in den dortigen Ausdrücken $A = a\alpha$, $B = b\beta$, daſs nämlich

$$\alpha = \frac{4\pi\varrho}{\lambda^3 m}\,[\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda],$$

$$\beta = \frac{2\pi\varrho}{\lambda^3 m} \cdot \left\{ \text{Arc. tang. } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right\}$$

ist, so wird, wenn man $S$ im Pole des Sphäroids nimmt, $A = k\alpha$, also $P = \frac{k\alpha}{h}$, und wenn man diesen Werth von $P = 1$ setzt, $h = k\alpha$, folglich für jeden andern Punkt $S$

$$P = \frac{a}{k}, \quad Q = \frac{\beta b}{k\alpha} - \frac{b}{f}, \quad R = \frac{\beta c}{k\alpha} - \frac{c}{f}.$$

Soll nun das Gleichgewicht bestehen können, so muſs $dp = Pda + Qdb + Rdc$ seyn (§. 39.), und für jede äquilibrirende Schichte $dp = 0 = Pda + Qdb + Rdc$ seyn. Wir nahmen aber für die äuſsere Oberfläche die Gleichung $a^2 + m(b^2 + c^2) = k^2$ an, und da diese Oberfläche die Form einer äquilibrirenden Schichte haben muſs, wofern das Gleichgewicht bestehen soll, so muſs die Differentialgleichung $ada + m(bdb + cdc) = 0$

mit der $Pda + Qdb + Rdc = 0$

einerlei seyn, die letztere aber gibt, wenn man für $P$, $Q$, $R$ ihre Werthe setzt und mit $k$ multiplicirt,

$$ada + \left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{f}\right](bdb + cdc) = 0,$$

es muſs also $m = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{f}$ seyn, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.

Aus dem vorigen ist bekannt, daſs $m = \frac{1}{1+\lambda^2}$ und

$$\frac{\beta}{\alpha} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\text{Arc. tang. } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}}{\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda}, \text{ folglich } \frac{k}{f} = \frac{\beta}{\alpha} - m$$

$$= \frac{(\lambda^2 + 3)\,\text{Arc. tang. } \lambda - 3\lambda}{2(\lambda - \text{Arc. tang. } \lambda)(1+\lambda^2)},$$

oder, weil Arc. tang. $\lambda = \lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5 - \frac{1}{7}\lambda^7 + \text{etc.}$

$$\text{so wird } \frac{k}{f} = \lambda^2 \frac{[\frac{4}{15} - \frac{8}{35}\lambda^2 + \frac{4}{21}\lambda^4 - \text{etc.}]}{[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\lambda^2 - \frac{4}{35}\lambda^4 + \text{etc.}]},$$

$$\text{oder } \frac{k}{f} = \tfrac{2}{5}\lambda^2 - \tfrac{176}{175}\lambda^4.$$

wo man die folgenden Glieder weglassen kann, wenn $\lambda^2$ ein kleiner Bruch ist, und man erhält umgekehrt

$$\lambda^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{k}{f} + \frac{110}{7} \cdot \frac{k^2}{f^2},$$

wodurch die Abplattung des Sphäroids bestimmt wird, wenn $k$ und $f$ gegeben sind.

Die Gröſse $f$ wird aus der Geschwindigkeit, mit welcher sich das Sphäroid um seine Axe dreht, bestimmt. Es sei daher $T$ die Anzahl von Secunden, in welcher das Sphäroid eine Rotation vollendet, so ist, wenn $g$ den Raum bezeichnet, durch welchen die als Einheit angenommene Kraft einen Körper in der ersten Secunde treibt, die Schwungkraft in der Entfernung $= \sqrt{(b^2+c^2)}$ von der Axe $= \frac{4\pi^2 . \sqrt{(b^2+c^2)}}{2gT^2}$, folglich $\frac{1}{f} = \frac{2\pi^2}{gT^2}$, und daher

$$\lambda^2 = \tfrac{5}{2} . \left[\frac{2k\pi^2}{gT^2}\right] + \frac{110}{7} . \left[\frac{2k\pi^2}{gT^2}\right]^2,$$

weil die höhern Potenzen von $\frac{k}{f}$ in allen hier zu betrachtenden Fällen dürfen übersehen werden.

116. Wenden wir die eben gefundene Formel auf die Erde an, deren Umdrehungszeit nach Laplace $= 86164$ Secunden $= T$, ihre halbe Axe $k = 19555920$ Pariser Fuſs; so würde sich $\lambda$ bestimmen lassen, wenn man $g$ kennte. Da wir die Schwerkraft am Pole der Erde $= 1$ gesetzt haben, so ist $g$ der Raum, welchen ein nahe an der Oberfläche der Erde unter dem Pole fallender Körper in der ersten Secunde durchläuft, oder $\frac{2g}{\pi^2}$ die Länge des Secundenpendels unter dem Pole. Diese Gröſse ist nun zwar nicht aus unmittelbaren Beobachtungen bekannt, wir können aber dieselbe $= 3,0649$ Par. Fuſs $= \frac{2g}{\pi^2}$ annehmen, da es hier nicht darauf ankommt, durch welche Hülfsmittel diese Gröſse bestimmt sey. Dann wird $\frac{2k\pi^2}{gT^2} = 0,003438$ und $\lambda^2 = 0,00869$. Es war aber $m = \frac{1}{1+\lambda^2}$, und daher der Halbmesser des Erdäquators $= k . \sqrt{(1+\lambda^2)}$, woraus sich das Verhältniſs der Axe zum Durchmesser des Aequators wie 1 zu $\sqrt{(1+\lambda^2)} = 1 : 1,0043$, oder beinahe wie 230 : 231

findet. Und dieses würde die wahre Bestimmung der Gestalt der Erde seyn, wenn dieselbe ganz aus einem homogenen Fluido bestände.

117. Setzt man wie im §. 115. $m = 1$, so ist $k^2 = a^2 + b^2 + c^2$ die Gleichung für eine Kugel vom Halbmesser $k$; verlangt man also zu wissen, bei welchem Werthe von $f$ oder $T$ die Kugelform bestehen könne, so muſs man, nach §. 114., $A = \frac{4}{3}\pi\varrho a$, $B = \frac{Ab}{a}$, $C = \frac{Ac}{a}$ setzen, man hätte also, weil $h = \frac{Ak}{a}$ ist, für $Pda + Qdb + Rdc = 0$,

$$ada + \left\{1 + \frac{k}{f}\right\}(bdb + cdc) = 0,$$

weil aber diese Gleichung mit $ada + bdb + cdc = 0$ einerlei seyn muſs, so wird $1 + \frac{k}{f} = 1$, oder $\frac{k}{f} = 0$, folglich $T = \infty$. Der Körper müſste also zu Vollendung einer Rotation eine unendliche Zeit gebrauchen, das ist, er muſs gar keine Umdrehungsbewegung haben, wenn die Kugelform bestehen soll. Ein Resultat, welches wir schon oben gefunden haben.

118. Wenn $S$ nicht an der Oberfläche des Sphäroids, sondern innerhalb desselben liegt, so läſst sich auch die Gestalt der durch diesen Punkt gehenden äquilibrirenden Schichte bestimmen, wenn die Gestalt der Oberfläche bekannt ist. Da nämlich für jede äquilibrirende Schichte $Pda + Qdb + Rdc = 0$ ist, weil der Druck in jedem Punkte derselben gleich groſs ist, so erhält man auch hier, wenn man für $P$, $Q$, $R$ ihre Werthe setzt,

$$ada + \left\{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{f}\right\}(bdb + cdc) = 0.$$

Da aber $\beta$, $\alpha$, $k$ und $f$ eben die Bedeutung haben sollen, wie im §. 115. und hier die Form einer äquilibrirenden Schichte desjenigen Sphäroids gesucht wird, dessen Oberfläche wir

dort betrachteten, so ist, wie dort, $\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{f} = m$, und man hat für die Gestalt der äquilibrirenden Schichte

$$a^2 + m(b^2 + c^2) = \text{Const.}$$

Also ist auch diese äquilibrirende Schichte ein durch Umdrehung entstandnes Sphäroid, dessen halbe Axe, wenn ich die Const. $= K^2$ setze, $= K$, der Halbmesser des Aequators $= \frac{K}{\sqrt{m}}$ ist, so daſs also das Verhältniſs der Axen bei allen äquilibrirenden Schichten dasselbe bleibt, welches für die Oberfläche Statt fand.

119. Um den Druck zu bestimmen, welchen irgend ein Punkt $S$ leidet, haben wir die allgemeine Gleichung

$$dp = -(P da + Q db + R dc),$$

$$\text{oder } dp = -\frac{a da + m(b db + c dc)}{k},$$

wo das — Zeichen deswegen vorgesetzt wird, weil die Kräfte der Richtung der Coordinaten entgegenwirken: in der Gleichung $dp = 0$ brauchten wir hierauf nicht Rücksicht zu nehmen. Aus dieser Gleichung folgt

$$p = \text{Const.} - \frac{a^2 + m(b^2 + c^2)}{2k},$$

wo die Constans so bestimmt werden muſs, daſs der Druck an der Oberfläche verschwindet. Bezeichnen also hier $a'$, $b'$, $c'$ die drei Coordinaten für einen in der Oberfläche liegenden Punkt, so wird

$$\text{Const.} = \frac{a'^2 + m(b'^2 + c'^2)}{2k} = \tfrac{1}{2} k,$$

weil der Zähler $= k^2$ ist. Man kann aber auch für jeden andern Punkt $a^2 + m(b^2 + c^2) = K^2$ setzen, wenn $K$ die halbe Axe der durch diesen Punkt gehenden äquilibrirenden Schichte bezeichnet, daher ist allgemein der Druck

$$p = \frac{k^2 - K^2}{2k}.$$

120. Wir verglichen vorhin (§. 82.) den Druck, den irgend ein Theilchen leidet, mit dem Gewichte der darüber stehenden Säule des Flüssigen: auch hier lassen sich ähnliche Vergleichungen anstellen.

Liegt der Punkt, für welchen der Druck bestimmt worden, in der Axe des Sphäroids, wie $p$ in Fig. 23., so ist der Druck wirklich dem Gewichte der darüber stehenden Säule $Pp$ gleich; denn da hier $AP = k$, $Ap = K$, so ist die Länge dieser Säule $= k - K$, das Differential derselben $= - dK$. Aber das in $p$ befindliche Theilchen dieser Säule, dessen Masse $= ffdK$, wenn man den Querschnitt desselben $= ff$ und seine Dichtigkeit $= 1$ setzt, wird von der beschleunigenden Kraft $= \frac{K}{k}$ gegen den Mittelpunkt nach der Richtung $pA$ gezogen, das Gewicht dieses Theilchens ist also $= - ff \cdot \frac{K\,dK}{k}$, und folglich das Gewicht der ganzen Säule $=$ Const. $- ff \cdot \frac{K^2}{2k}$. Diese Säule verschwindet, also ist auch ihr Gewicht $= 0$, wenn $K = k$ ist, folglich ist Const. $= \frac{1}{2} ff.k$, und das Gewicht der Säule $Pp = ff \frac{(k^2 - K^2)}{2k}$ eben so grofs, als der im vorigen §. gefundene Druck auf eine Fläche, welche $= ff$ ist.

121. Wenn der Punkt $S$ (Fig. 23.) nicht in der Axe liegt, so hat diese Vergleichung mehr Schwierigkeit. Denn wenn man den Radius $AS$ bis an die Oberfläche verlängern wollte, so sieht man doch gleich, dafs kein Punkt der Säule $ST$ von den beschleunigenden Kräften nach der Richtung $TS$ getrieben wird, und daher das Gewicht dieser Säule nicht so auf $S$ wirken kann, wie das Gewicht der Säule $Pp$ auf $p$ wirkte.

Die Figur stelle den Durchschnitt einer durch $S$ und die Umdrehungsaxe gelegten Ebene mit der Oberfläche des

Sphäroids vor, so ist $AP = k$, $AB = \frac{k}{\sqrt{m}}$; $pSb$ sey die Linie, in welcher diese Ebene die durch $S$ gehende äquilibrirende Schichte schneidet, so ist, wenn $Ap = K$ gesetzt wird, nach §. 118., $Ab = \frac{K}{\sqrt{m}}$. Wenn nun $SW$ die Normale der Linie $pSb$ im Punkte $S$ ist, so wird das Theilchen $S$ von den auf dasselbe wirkenden Kräften nach der Richtung $SW$ getrieben, denn es läfst sich leicht beweisen, dafs $SW$ auf die äquilibrirende Schichte senkrecht ist, weil die Normallinie einer durch Umdrehung entstandnen Fläche immer in der durch die Axe gelegten Ebene liegt. Eben so wird jedes andre Theilchen $T$ nach der Richtung $TV$ angezogen, welche hier auf die durch $T$ gehende äquilibrirende Schichte senkrecht ist, und es wird sich beweisen lassen, dafs der Druck in $S$ dem Gewichte einer Säule $ZS$ gleich ist, wenn diese Linie $ZS$ so gezogen wird, dafs sie alle äquilibrirende Schichten senkrecht durchschneidet. Eine solche Linie $ZSA$ heifst die rechtwinklichte Trajectorie dieser elliptischen Schichten, und wir werden zuerst suchen müssen, eine Gleichung für dieselbe zu finden.

122. Wenn für den Punkt $S$ die Coordinaten $a$, $b$, $c$ sind, so ist hier $US = a$, $AU = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, welches ich $= u$ setzen will, und die Gleichung für die Ellipse $pSb$ ist $K^2 = a^2 + m u^2$, wenn $K = Ap$ ist. Man findet aber, wenn $SW$ die Normale dieser Ellipse ist,

$$\text{tang. } SWB = \frac{1}{m} \cdot \frac{a}{u} = \frac{1}{m} \text{ tang. } SAB,$$

und dieses beständige Verhältnifs der Tangenten der Winkel, welche Radius Vector und Normallinie mit der Axe $AB$ machen, findet für alle Ellipsen Statt, deren Axen $Ap$, $Ab$ sich verhalten, wie $\sqrt{m} : 1$, das heifst hier für alle äquilibrirende Schichten. Es sey nun $ASZ$ die rechtwinklichte Trajectorie dieser Schichten, welche zugleich durch einen gegebnen Punkt $Z$ der Oberfläche geht, so ist jede Tan-

gente $SW$ dieser Linie, eine Normallinie derjenigen äquilibrirenden Schichte, welche durch den Punkt $S$ geht, und folglich tang. $SWB = \frac{1}{m}$ tang. $SAB$. Bestimmt man aber jeden Punkt $S$ der Trajectorie durch Coordinaten $AU = u$, $US = a$, so wird tang. $SWB = \frac{da}{du}$, und tang. $SAb = \frac{a}{u}$, folglich ist $\frac{da}{du} = \frac{1}{m} \cdot \frac{a}{u}$ die Differentialgleichung, welche die Natur der Linie $ASZ$ ausdrückt.

Diese Gleichung gibt integrirt $a = \frac{u^{\frac{1}{m}}}{C}$, wenn $C$ die beständige Gröſse bedeutet. Diese beständige Gröſse läſst sich bestimmen, weil der Punkt $Z$ an der Oberfläche, durch welchen die Trajectorie geht, gegeben ist. Es sey nämlich für diesen Punkt $Au = u'$, $UZ = a'$, so muſs

$$a' = \frac{u'^{\frac{1}{m}}}{\text{Const.}} \text{ oder Const.} = \frac{u'^{\frac{1}{m}}}{a'}$$

seyn, und man erhält daher für jede andre Ordinate $a$ der Trajectorie allgemein $a = a' \left[\frac{u}{u'}\right]^{\frac{1}{m}}$.

123. Setzt man nun die Länge des Bogens $ZS = s$, so ist $ds = -\sqrt{(da^2 + du^2)} = -du \cdot \sqrt{\left[1 + \frac{a^2}{m u^2}\right]}$, weil $da = \frac{a\,du}{m u}$. Die beschleunigende Kraft, welche auf das Theilchen $S$ nach der Richtung $SW$ wirkt, ist $= \frac{\sqrt{(a^2 + m^2 u^2)}}{k}$, wie aus §. 115. erhellt, wenn man dort $\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$ sucht; daher erhält man, wenn man dem Theilchen $S$ den Querschnitt $= ff$ und die Höhe $= ds$ beilegt, und seine Dichtigkeit $= \varrho$ nimmt, für das Gewicht dieses Theilchens $dp'$

den Ausdruck $dp' = -\frac{ff.\varrho du}{muk}(a^2 + m^2 u^2)$,

$$= -ff\varrho\left\{\frac{a\,da}{k} + \frac{m u\,du}{k}\right\},$$

weil man für $\frac{a\,du}{mu}$ wieder $da$ setzen kann. Aus der Integration jener Formel folgt also für das Gewicht $p'$ der ganzen Säule $ZS$, $p' = \text{Const.} - \frac{ff\varrho}{2k}(a^2 + m u^2)$, welches verschwinden mufs, wenn $s = 0$ ist, oder $Z$ mit $S$ zusammenfällt, das ist, wenn $a = a'$, $u = u'$ wird. Setzt man den hieraus folgenden Werth der beständigen Gröfse in die Gleichung für $p'$, so wird

$$p' = ff.\varrho\left\{\frac{a'^2 + m u'^2 - a^2 - m u^2}{2k}\right\} = ff.\varrho\left\{\frac{k^2 - K^2}{2k}\right\},$$

wenn $k$ wie bisher die halbe Axe der Oberfläche, und $K$ die halbe Axe derjenigen äquilibrirenden Schichte bedeutet, worin $S$ sich befindet.

Dieser Ausdruck für $p'$ ist ganz einerlei mit dem, welchen wir vorhin für den Druck fanden, welchen das in $S$ befindliche Theilchen leidet (§. 119.), aufser dafs dort $\varrho = 1$ gesetzt wird, oder die Materie, woraus das Sphäroid besteht, selbst zur Abmessung des Druckes gebraucht ward. Der Druck ist also in jedem Punkte so grofs, als das Gewicht der über demselben stehenden, nach der Richtung der Trajectorie gekrümmten Säule des Flüssigen.

124. Wollte man diese Untersuchung allgemeiner machen, und auf ein Fluidum anwenden, dessen Dichtigkeit nicht allenthalben gleich wäre, so würde, wenn man nach einer ähnlichen Methode, wie hier, verfahren wollte, die Rechnung sehr verwickelt werden, und man würde auch nur in sehr wenigen Fällen ein Sphäroid bestimmen können, für welches das Gleichgewicht möglich ist.

Im Allgemeinen findet man, dafs die Abplattung des rotirenden flüssigen Körpers geringer ist, wenn die Dichtigkeit vom Mittelpunkte an gegen die Oberfläche abnimmt,

als im Falle der gleichförmigen Dichtigkeit. Zugleich aber bleiben dann die äquilibrirenden Schichten nicht mehr ähnliche Sphäroide, sondern die Ellipticität einer jeden Schichte hängt von dem vorausgesetzten Gesetze der Dichtigkeiten ab, und es erhellt schon hieraus, daſs die dreifachen Integrationen, mit welchen wir uns im Anfange dieses Abschnitts beschäftigten, äuſserst verwickelt werden würden. Durch die bisher mitgetheilten Untersuchungen sind indeſs wenigstens die Gränzen bestimmt, zwischen welchen die Applattung der Erde nothwendig enthalten ist; denn da es durchaus nicht wahrscheinlich ist, daſs die Dichtigkeit der Erde im Innern kleiner sey, als an der Oberfläche, so ist die im 116. §. bestimmte Abplattung die gröſste, welche möglich ist, nämlich diejenige, welche bei einer gleichförmigen Dichtigkeit der Erde Statt findet. Die kleinste Abplattung aber, welche die Erde haben könnte, ist die im vorigen Abschnitte gefundne, wo wir annahmen, die Dichtigkeit sey im Mittelpunkte unendlich, oder die ganze Masse der Erde in demselben vereinigt.

Wirklich zeigen die zur Bestimmung der Figur der Erde angestellten Messungen, und die Beobachtungen über die Länge des Secundenpendels unter verschiedenen Breiten, daſs die Abplattung der Erde zwischen jene Gränzen fällt, daſs sie nämlich nicht so groſs ist, als sie bei einem homogenen Fluido seyn würde, aber viel gröſser als in dem Falle, da blos der Mittelpunkt eine anziehende Kraft besäſse.

Da wir die mittlere Dichtigkeit, den Halbmesser und die Rotationszeit des Jupiters kennen, so läſst sich auch die Abplattung dieses Planeten nach beiden hier angeführten Hypothesen berechnen; die Beobachtungen aber zeigen, daſs auch des Jupiters Abplattung zwischen jene Gränzen fällt, daſs also auch bei diesem, eben so wie bei der Erde, eine gegen den Mittelpunkt zu wachsende Dichtigkeit Statt finden muſste, wenn er als rotirendes Fluidum seine jetzige Gestalt erlangen sollte.

## *Erste Abtheilung.*

## Die allgemeinen Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

---

### Erster Abschnitt.

### *Betrachtung der Bewegung flüssiger Körper im Allgemeinen.*

---

§. 125. Problem 18.

Wenn eine flüssige Masse sich auf irgend eine Weise bewegt, die Elemente anzugeben, durch welche sich der Zustand und die Bewegung derselben für jeden Zeitpunkt bestimmen und der Rechnung unterwerfen läſst.

Auflösung. Man bestimme die Lage jedes Theilchens $Z$ (Fig. 24.) des flüssigen Körpers gegen die drei festen, auf einander senkrechten Axen $OA$, $OB$, $OC$ durch die diesen Axen parallelen Coordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; weil aber der flüssige Körper in Bewegung ist, so müssen wir zugleich auf die Zeit Rücksicht nehmen, und dasjenige Theilchen betrachten, welches sich am Ende einer bestimmten Zeit $= t$ in dem Punkte $Z$ befindet. Um nun den Zustand des flüssigen Körpers für diesen Zeitpunkt kennen zu lernen, muſs man zuerst, wenn seine Dichtigkeit Veränderungen zu leiden fähig ist, die Dichtigkeit in dem Punkte $Z$, welche ich $= q$ setze, zu bestimmen suchen; und weil diese nicht blos in demselben Augenblicke an verschiedenen Punkten ungleich seyn, sondern sich auch in demselben Punkte $Z$ im Fortgange der Zeit ändern kann,

so ist $q$ als eine Function der vier veränderlichen Gröfsen $x$, $y$, $z$ und $t$ zu betrachten. Wenn also bekannt ist, wie $q$ im Allgemeinen von diesen Gröfsen abhängt, so wird man den Werth dieser Gröfse für einen bestimmten Punkt und für einen bestimmten Augenblick angeben, wenn man für $x$, $y$, $z$ und $t$ die Werthe setzt, welche diesem Orte und dieser Zeit entsprechen. Ist die Dichtigkeit des flüssigen Körpers überall gleich und unveränderlich, so bedeutet $q$ eine beständige Gröfse.

Zweitens mufs man den Druck kennen, welchen das Theilchen $Z$ leidet; wir drücken diesen, wie vorhin, durch die Höhe $p$ aus, nämlich durch die Höhe einer Säule aus einer homogenen Materie von der Dichtigkeit $= 1$, deren Gewicht so grofs ist, als der Druck auf eine ihrer Basis gleiche Fläche. Es ist schon vorhin erwähnt, dafs alsdann $q$ das Verhältnifs der Dichtigkeit des flüssigen Körpers zur Dichtigkeit dieser Materie ausdrückt. Da auch der Druck von der Stelle und von der Zeit abhängt, so ist $p$ ebenfalls eine Function der vier Gröfsen $x$, $y$, $z$ und $t$.

Drittens, wenn der flüssige Körper der Wirkung beschleunigender Kräfte unterworfen ist, so wird man diese allemal nach der Richtung der drei Coordinaten zerlegen können. Diese Kräfte, wenn sie nicht für jeden Punkt einerlei sind, hängen doch gewöhnlich nur von der Lage des Punktes $Z$, nicht aber von der Zeit ab. Ihre Bezeichnung, wobei die Kraft der Schwere als Einheit angenommen wird, sey auch hier, wie oben, $P =$ den Kräften, welche nach der Richtung $Zx$ wirken, $Q =$ den nach der Richtung $Zy$ wirkenden, $R =$ den nach der Richtung $Zz$ wirkenden.

Viertens gehört zur Kenntnifs der Bewegung die Bestimmung der Geschwindigkeit jedes Theilchens für jeden Zeitpunkt. Man zerlegt diese am besten nach der Richtung der drei Axen; sie sey für das in $Z$ befindliche Theilchen am Ende der Zeit $t$

nach der Richtung $Zx = u$,
nach der Richtung $Zy = v$,
nach der Richtung $Zz = w$,

Offenbar sind auch diese drei Gröſsen Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$, und man übersieht, daſs, wenn $t$ in Secunden ausgedrückt wird, man für $u$, $v$, $w$ den Raum setzen kann, der vermöge dieser Geschwindigkeiten in 1 Sec. durchlaufen würde.

Wenn diese Gröſsen $q$, $p$, $P$, $Q$, $R$, $u$, $v$, $w$ gefunden sind, so ist der ganze Zustand und alle Umstände der Bewegung bekannt.

126. Die Kräfte, welche auf den flüssigen Körper wirken, sind immer gegeben, und hängen nicht von der Bewegung ab, daher kann man $P$, $Q$, $R$ als bekannte Gröſsen zur Bestimmung der übrigen gebrauchen. Die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper ist also darin enthalten, daſs man aus der Natur des flüssigen Körpers, sofern nämlich $q$ und $p$ gegenseitig von einander abhängen, und aus den Kräften, welche auf denselben wirken, die Gröſsen $q$, $p$, $u$, $v$, $w$ bestimme, und dieselben durch $x$, $y$, $z$ und $t$ ausdrücke, um für jede gegebene Zeit und für jeden gegebenen Punkt $Z$ ihre Werthe angeben zu können.

Ist der flüssige Körper homogen und keiner Compression fähig, so ist $q$ eine beständige Gröſse, und es brauchen nur die übrigen Gröſsen bestimmt zu werden.

127. Da diese Gröſsen $q$, $p$, $u$, $v$, $w$ als Functionen der vier Veränderlichen $x$, $y$, $z$ und $t$ betrachtet werden müssen, so läſst sich allgemein das Differential von jeder derselben in folgender Form darstellen

$$dq = dx \left(\frac{dq}{dx}\right) + dy \left(\frac{dq}{dy}\right) + dz \left(\frac{dq}{dz}\right) + dt \left(\frac{dq}{dt}\right).$$

Hier zeigen die drei ersten Glieder an, um wie viel die Dichtigkeit in demselben Augenblicke in einem nahe bei $Z$ liegenden Punkte, für welchen die Ordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, von der Dichtigkeit in $Z$ verschieden sey, und

man bestimmt hieraus die Dichtigkeit für diesen Zeitpunkt an jeder Stelle, wenn man $t$ als unveränderlich betrachtet. Nimmt man hingegen blos das letzte Glied dieses Differentials, so erhält man die Veränderung der Dichtigkeit, welche in dem Punkte $Z$ selbst während der Zeit $dt$ vorgegangen ist, oder die Dichtigkeit desjenigen Theilchens, welches sich nach Verlauf der Zeit $t + dt$ in dem Punkte $Z$ befindet. Wollte man aber wissen, um wie viel dasjenige Theilchen, welches sich zu Anfange des Zeitraums $dt$ in $Z$ befand, seine Dichtigkeit während dieser Zeit $dt$ verändert habe, so müſste man vorher die Stelle bestimmen, wohin es unterdeſs fortgerückt ist, und wären für diese die Coordinaten $= x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, so würde die Aenderung der Dichtigkeit $dq$ durch

$$dx \left[\frac{dq}{dx}\right] + dy \left[\frac{dq}{dy}\right] + dz \left[\frac{dq}{dz}\right] + dt \left[\frac{dq}{dt}\right]$$

ausgedrückt.

Daſs alles dies sich auch auf die Gröſsen $p$, $u$, $v$, $w$ anwenden lasse, erhellt nun von selbst.

128. Um die Bewegung eines flüssigen Körpers zu kennen, muſs man nothwendig die Bewegung aller seiner Theile kennen, und es ist nicht, wie bei festen Körpern, hinlänglich, nur die Bewegung einiger Punkte zu bestimmen. Bei festen Körpern, welche ihre Gestalt nicht ändern, ist die Bewegung des ganzen Körpers bestimmt, wenn man die Bewegung dreier Punkte desselben, welche nicht in gerader Linie liegen, kennt; bei biegsamen Körpern reicht dieses freilich nicht zu, aber die Anzahl der Punkte, deren Bewegung man kennen muſs, um die Bewegung des ganzen Körpers zu bestimmen, ist doch immer endlich: bei flüssigen Körpern hingegen findet dieses nicht Statt. Indeſs ist doch auch hier die Bewegung jedes einzelnen Theilchens nicht ganz und gar von der Bewegung der übrigen unabhängig; denn wenn die Dichtigkeit des flüssigen Körpers unveränderlich ist, so können die Theilchen beim Fortflieſsen sich weder in einen gröſsern Raum ausbreiten,

noch sich in einen engern zusammendrängen, und daraus entsteht eine gewisse Bedingung für die Bewegung der einzelnen Theilchen. Aber auch dann, wenn der flüssige Körper einer Verdichtung oder Verdünnung fähig ist, so hängt doch jede Veränderung der Dichtigkeit vom Drucke ab, und dadurch entsteht ebenfalls eine Beschränkung der Bewegung. Die Bestimmung dieser Bedingung aber ist ein Haupttheil der Theorie der Bewegung flüssiger Körper, worauf wir bald zurückkommen werden.

129. Man könnte vielleicht zweifeln, ob die vier Stücke, wovon wir oben behaupteten, dafs in ihnen die vollständige Kenntnifs der Bewegung flüssiger Körper enthalten sey, wirklich zu dieser Kenntnifs hinreichen, da man gewöhnlich noch auf viele andre Umstände Rücksicht nehmen mufs, z. B. ob der flüssige Körper in ein Gefäfs eingeschlossen sey, in welchem er sich bewegt, oder aus welchem er ausfliefst, wie die Figur dieses Gefäfses beschaffen sey, wie weit der flüssige Körper sich darin erstrecke u. s. w. Man mufs aber bemerken, dafs jene vier Stücke hinreichen, um die Differentialgleichungen zu finden, welche die Gesetze der Bewegung ausdrücken. Will man aber aus diesen weitere Schlüsse ziehen, so mufs man bei der Integration die eben erwähnten und ähnliche Umstände in Betrachtung ziehen; da die Differentialgleichungen so allgemein seyn müssen, dafs sie allen besondern Fällen entsprechen.

130. Problem 19. Aus den gegebenen Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$, mit welchen jedes Theilchen des flüssigen Körpers sich bewegt, die Stelle zu bestimmen, wohin ein kleines Theilchen desselben während der Zeit $dt$ fortrückt.

Auflösung. Wir wollen der kleinen Masse, deren Fortrücken wir zu bestimmen suchen, die Figur einer dreieckigten Pyramide $ZLMN$ (Fig. 25.) beilegen, für deren vier Winkelpunkte die Coordinaten folgende sind:

für $Z$, $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$,
für $L$, $OR = x + dx$, $RP = y$, $PL = z$,
für $M$, $OX = x$, $XQ = y + dy$, $QM = z$,
für $N$, $OX = x$, $XY = y$, $YN = z + dz$.

Da nun nach Verlauf der Zeit $t$ im Punkte $Z$ die Geschwindigkeiten nach den Richtungen $ZL$, $ZM$, $ZN$ durch $u$, $v$, $w$ bezeichnet sind, so erhält man für die Winkelpunkte der Pyramide folgende mit $OA$, $OB$, $OC$ parallele Geschwindigkeiten:

für $Z$, Geschw. nach $OA = u$, nach $OB = v$, nach $OC = w$,

für $L$, Geschw. nach $OA = u + dx \left(\frac{du}{dx}\right)$,
nach $OB = v + dx \left(\frac{dv}{dx}\right)$,
nach $OC = w + dx \left(\frac{dw}{dx}\right)$;

für $M$, Geschw. nach $OA = u + dy \left(\frac{du}{dy}\right)$,
nach $OB = v + dy \left(\frac{dv}{dy}\right)$,
nach $OC = w + dy \left(\frac{dw}{dy}\right)$;

für $N$, Geschw. nach $OA = u + dz \left(\frac{du}{dz}\right)$,
nach $OB = v + dz \left(\frac{dv}{dz}\right)$,
nach $OC = w + dz \left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Mit diesen Geschwindigkeiten rücken die Punkte $Z$, $L$, $M$, $N$ während der Zeit $dt$ fort; und es wird daher, wenn $z$, $l$, $m$, $n$ die Stellen bedeuten, wohin $Z$, $L$, $M$, $N$ am Ende dieses kleinen Zeitraums gekommen sind, die Lage von $z$, $l$, $m$, $n$ durch folgende Coordinaten bestimmt:

$$Ox = x + udt,\quad xy = y + vdt,\quad yz = z + wdt,$$

$$Or = x + dx + udt + dtdx \left(\frac{du}{dx}\right),\ rp = y + vdt + dtdx \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

$$pl = z + wdt + dtdx \left(\frac{dw}{dx}\right);$$

$$Os = x + udt + dtdy \left(\frac{du}{dy}\right),\ sq = y + dy + vdt + dtdy \left(\frac{dv}{dy}\right),$$

$$qm = z + wdt + dtdy \left(\frac{dw}{dy}\right);$$

$$Ot = x + udt + dtdz \left(\frac{du}{dz}\right),\quad to = y + vdt + dtdz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

$$on = z + dz + wdt + dtdz \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Die in der Pyramide $ZLMN$ enthaltene Materie bewegt sich also so, daſs sie am Ende des Zeitraums $dt$ den Raum $zlmn$ einnimmt, welchen wir ebenfalls als pyramidalisch betrachten dürfen, weil $ZLMN$ als unendlich klein angenommen ist, und daher, die Bewegung mag beschaffen seyn, wie sie will, die Voraussetzung Statt findet, daſs alle Punkte derselben Seitenfläche, auch während der Bewegung, in einer Ebene bleiben.

131. Die Figur der kleinen pyramidalischen Masse kann sich also vielleicht ändern; aber sie behält die Form einer dreiseitigen Pyramide, daher kann man, weil jede kleine Masse sich in solche Pyramiden zerlegen läſst, auch für jede andre die Figur bestimmen, welche sie durch die Bewegung erlangt.

132. Da der Pyramide $ZLMN$ Seitenlinien $ZL$, $ZM$, $ZN$ auf einander senkrecht sind, und $ZL = dx$, $ZM = dy$, $ZN = dz$; so wird $LM = \surd(dx^2 + dy^2)$, $LN = \surd(dx^2 + dz^2)$ und $MN = \surd(dy^2 + dz^2)$, und das Volumen der Pyramide $= \frac{1}{6}\, dxdydz$. Wir können aber auch die Seiten und den Inhalt der Pyramide $zlmn$ bestimmen. Denn, weil $Or - Ox = dx + dtdx \left(\frac{du}{dx}\right)$,

$$rp - xy = dt\,dx \left[\frac{dv}{dx}\right],\quad pl - yz = dt\,dx \left[\frac{dw}{dx}\right],$$

so wird $zl = \sqrt{\left\{dx^2 + 2dt\,dx^2 \left[\frac{du}{dx}\right]\right\}}$,

weil wir die Producte, wo unter dem Wurzelzeichen vier Differentiale vorkommen, weglassen; und man kann auch $zl$ durch die ersten Glieder der Reihe, in welche die Wurzelgröfse sich auflösen läſst, so ausdrücken:

$$zl = dx + dt\,dx \left[\frac{du}{dx}\right].$$

Eben so wird $zm = dy + dt\,dy \left[\frac{dv}{dy}\right]$, und

$zn = dz + dt\,dz \left[\frac{dw}{dz}\right]$. Ferner ist

$$Or - Os = dx + dt\,dx \left[\frac{du}{dx}\right] - dt\,dy \left[\frac{du}{dy}\right],$$

$$sq - rp = dy - dt\,dx \left[\frac{dv}{dx}\right] + dt\,dy \left[\frac{dv}{dy}\right], \text{ und}$$

$$qm - pl = - dt\,dx \left[\frac{dw}{dx}\right] + dt\,dy \left[\frac{dw}{dy}\right], \text{ daher}$$

$$lm = \sqrt{\left\{dx^2 + dy^2 + 2dt\,dx \left(dx \left[\frac{du}{dx}\right] - dy \left[\frac{du}{dy}\right]\right) - 2dt\,dy \left(dx \left[\frac{dv}{dx}\right] - dy \left[\frac{dv}{dy}\right]\right)\right\}},$$

oder $lm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} +$

$$+ \frac{dt\,dx \left\{dx \left[\frac{du}{dx}\right] - dy \left[\frac{du}{dy}\right]\right\} - dt\,dy \left\{dx \left[\frac{dv}{dx}\right] - dy \left[\frac{dv}{dy}\right]\right\}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Hieraus läſst sich der Winkel $lzm$ bestimmen, denn da

$\text{Cos.}\, lzm = \frac{zl^2 + zm^2 - lm^2}{2zl.zm}$, so wird

$$\text{Cos.}\, lzm = \frac{2dt\,dx\,dy \left\{\left[\frac{du}{dy}\right] + \left[\frac{dv}{dx}\right]\right\}}{2dx\,dy} = dt \left[\frac{du}{dy}\right] + dt \left[\frac{dv}{dx}\right].$$

folglich weicht dieser Winkel unendlich wenig vom rechten ab, weil sein Cosinus durch bloſse Differentialgröſsen ausgedrückt ist.

Man findet eben so Cos. $lzn = dt \left(\frac{du}{dz}\right) + dt \left(\frac{dw}{dx}\right)$, und Cos. $mzn = dt \left(\frac{dv}{dz}\right) + dt \left(\frac{dw}{dy}\right)$. Die Sinus dieser Winkel würden also nur um Differentiale des zweyten Grades vom Sinustotus verschieden seyn.

133. Wäre hier von Bewegung fester Körper, welche ihre Gestalt nicht ändern, die Rede, so müſsten die beiden Pyramiden $zlmn$ und $ZLMN$ einander gleich und ähnlich seyn, daher erhielte man die Gleichungen $zl = ZL$, $zm = ZM$ u. s. w., oder

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

und ferner aus den Werthen von $lm$, $ln$, $mn$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dy}\right) = 0.$$

Für feste und harte Körper müssen also $u$, $v$, $w$ solche Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$ seyn, daſs diesen Bedingungen Genüge geschehe. Aus den drei ersten dieser Bedingungen aber folgt, daſs $u$ nicht von $x$, $v$ nicht von $y$, und $w$ nicht von $z$ abhängen dürfe; aus den letztern folgt, daſs die Formeln $udx - vdy$, $udx - wdz$, $vdy - wdz$ sich müssen integriren lassen, da alsdann bekanntlich

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\left(\frac{dv}{dx}\right), \quad \text{oder} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

wird, und eben so die beiden übrigen Bedingungen Statt finden.

Wollte man diese Bedingungen für die Bewegung fester Körper näher untersuchen, so würden sich daraus eben die Gesetze herleiten lassen, welche man auch auf andern Wegen für diese Bewegung findet. Hier aber reicht die eben angestellte Vergleichung hin, um zu zeigen, daſs sich auch

bei flüssigen Körpern ähnliche Bedingungen für die drei Geschwindigkeiten werden finden lassen. Denn, obgleich die Figur der Pyramide $ZLMN$ hier nicht unveränderlich ist, so bleibt doch ihre Masse dieselbe, während sie nach $zlmn$ rückt, und es ist also einleuchtend, daſs die Dichtigkeit, welche dieses Theilchen nach seiner Ankunft in $zlmn$ hat, sich zu der, welche es in $ZLMN$ hatte, umgekehrt, wie das Volumen desselben in diesen beiden Lagen, verhält. Bleibt aber die Dichtigkeit des flüssigen Körpers unveränderlich, so muſs das Volumen der Pyramiden $ZLMN$ und $zlmn$ gleich groſs seyn.

134. Problem 20. Aus den gegebenen Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ jedes Theilchens des flüssigen Körpers die Aenderung der Dichtigkeit zu bestimmen, welche jedes Theilchen leidet, indem es sich, während der Zeit $dt$, fortbewegt.

Auflösung. Des vorhin betrachteten pyramidalischen Theilchens $ZLMN$ (Fig. 25.) Dichtigkeit sey in dieser Lage $= q$, sein Volumen ist, wie wir gesehen haben, $= \frac{1}{6}\, dx\, dy\, dz$, also die Masse desselben $= \frac{1}{6}\, q\, dx\, dy\, dz$. Während der Zeit $dt$ rückt dieses Theilchen nach $zlmn$ fort, wo seine Figur noch pyramidalisch ist und die Seiten

$$zl = dx + dt\,dx \left(\frac{du}{dx}\right),\quad zm = dy + dt\,dy \left(\frac{dv}{dy}\right),$$

$$zn = dz + dt\,dz \left(\frac{dw}{dz}\right)$$

sind; die Winkel an $z$ aber durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\text{Cos. } lzm = dt \left(\frac{du}{dy}\right) + dt \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

$$\text{Cos. } lzn = dt \left(\frac{du}{dz}\right) + dt \left(\frac{dw}{dx}\right),$$

$$\text{Cos. } mzn = dt \left(\frac{dv}{dz}\right) + dt \left(\frac{dw}{dy}\right).$$

Hieraus läſst sich das Volumen der Pyramide $zlmn$ be-

stimmen; denn wenn man Cos. $lzm = \nu'$, Cos. $lzn = \mu$, Cos. $mzn = \lambda$ sezt, so ist die Basis der Pyramide

$$= \tfrac{1}{2} zl \,.\, zm \,.\, \sqrt{(1 - \nu'^2)}$$

der Sinus des Neigungswinkels der Ebene $zln$ gegen dieselbe $= \frac{\sqrt{(1 - \nu'^2 - \mu^2 - \lambda^2 + 2\lambda\mu\nu')}}{\sqrt{(1-\mu^2)}.\sqrt{(1-\nu'^2)}}$, daher die senkrechte Höhe der Pyramide

$$= zn \,.\, \frac{\sqrt{(1 - \nu'^2 - \mu^2 - \lambda^2 + 2\lambda\mu\nu')}}{\sqrt{(1-\nu'^2)}},$$

und ihr Volumen $= \frac{1}{6} zl \,.\, zm \,.\, zn \,.\, \sqrt{(1 - \nu'^2 - \mu^2 - \lambda^2 + 2\lambda\mu\nu')}$. Da aber $\lambda$, $\mu$, $\nu'$ Differentiale der ersten Ordnung sind, also in der entwickelten Wurzelgröfse alle Glieder nach dem ersten blos Differentiale der zweiten Ordnung enthalten, so kann man das Volumen $= \frac{1}{6} zl \,.\, zm \,.\, zn$ setzen, oder

$$= \tfrac{1}{6} dx\,dy\,dz \left\{1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right\} \left\{1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right\} \left\{1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right\},$$

das ist, wenn man die Glieder wegläfst, welche mehr Differentialfactoren enthalten, das Volumen

$$zlmn = \tfrac{1}{6} dx\,dy\,dz \left\{1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}.$$

Die Dichtigkeit dieser Pyramide sey $= q'$, so wird, weil die Masse so grofs als bei der $ZLMN$ ist,

$$q = q' + q'dt \left\{\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}, \text{ oder}$$

$$\frac{q-q'}{q'dt} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{q-q'}{q\,dt}.$$

135. Soll also die Dichtigkeit des flüssigen Körpers unveränderlich seyn, so müssen $u$, $v$, $w$ solche Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$ seyn, dafs

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

werde. Und umgekehrt kann die Dichtigkeit keine Aenderung leiden, gesetzt auch, dafs die Natur des flüssigen Körpers eine solche Aenderung erlaubte, wenn

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

ist, welches aufser andern unzähligen Fällen unter andern dann geschieht, wenn $u$ nicht von $x$, $v$ nicht von $y$, und $w$ nicht von $z$ abhängt.

Wenn sich aber während der Bewegung die Dichtigkeit ändert, so gibt die Formel $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)$ diese Aenderung an: — ist der Werth derselben positiv, so nimmt die Dichtigkeit ab, ist er negativ, so nimmt die Dichtigkeit beim Fortrücken des Theilchens zu.

136. Problem 21. Aus den gegebnen drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$, mit welchen jedes Theilchen sich fortbewegt, die Beschleunigung desselben während der Zeit $dt$ zu bestimmen.

Auflösung. Irgend ein Theilchen des flüssigen Körpers rücke während der Zeit $dt$ (Fig. 26.) von $Z$ nach $z$; die Lage desselben am Anfange dieses Zeitraums sey durch die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$; $YZ = z$ bestimmt; so ist, weil wir die Geschwindigkeiten nach der Richtung dieser drei Coordinaten mit $u$, $v$, $w$ bezeichnen, am Ende der Zeit $dt$, $Ox = x + u\,dt$, $xy = y + v\,dt$, $yz = z + w\,dt$. Hat nun das Theilchen, wenn es in $z$ ankommt, die Geschwindigkeiten $u'$, $v'$ $w'$ erlangt, so läfst sich $u'$ durch

$$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$$

ausdrücken, und weil hier $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ ist, so wird

$$u' = u + u\,dt\left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{du}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$v' = v + u\,dt\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right),$$

$$w' = w + u\,dt\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dw}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Man findet also die Beschleunigungen nach den Richtungen der drei Coordinaten

$$\frac{u'-u}{dt} = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$\frac{v'-v}{dt} = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right),$$

$$\frac{w'-w}{dt} = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

137. Da sich die Beschleunigung der Bewegung jedes Theilchens auch aus Betrachtung der auf dasselbe wirkenden Kräfte herleiten läſst, so ergibt dieses eine Vergleichung, welche zur Bestimmung der Gesetze der Bewegung führt.

138. Die Formeln des 136. §. zeigen, daſs die Zunahme jeder der drei Geschwindigkeiten von den übrigen beiden mit abhängt, und daſs man daher die Beschleunigung für die Geschwindigkeit $u$ nicht, wie in der Mechanik fester Körper, durch $\frac{du}{dt}$ ausdrücken darf. Der Grund hievon erhellet aus dem, was schon von der Bedeutung der Buchstaben $u$, $v$, $w$ gesagt ist; denn diese Geschwindigkeiten beziehen sich nicht immer auf dasselbe Theilchen des flüssigen Körpers, sondern auf einen bestimmten Punkt des Raumes, in welchem der flüssige Körper sich bewegt. Suchte man also unter dem Ausdrucke $u'-u$ den Unterschied der Geschwindigkeit, welche in demselben Punkte $Z$ am Ende und am Anfange der Zeit $dt$ Statt findet, so hätte man allerdings $u'-u = dt\left(\frac{du}{dt}\right)$; aber dieses ist nicht richtig, wenn $u'-u$ die Aenderung der Geschwindigkeit für dasselbe Theilchen des Flüssigen bedeutet, welches unterdeſs seine Stelle verändert hat, weil in dem Punkte $z$, wohin es unterdeſs gekommen ist, im Anfange der Zeit $dt$, die Geschwindigkeit nach der Richtung der Coordinate $x$ nicht $= u$ angenommen werden kann.

139. Problem 22. Wenn auſser den Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$, welche in jedem Punkte des Raumes, durch welchen sich der flüssige Körper bewegt, Statt finden, auch die Dichtigkeit $q$ als für jeden Punkt gegeben angesehen wird, zu bestimmen, wie diese Gröſsen von einander abhängen.

Auflösung. Wir nannten vorhin $q$ (Fig. 26.) die Dichtigkeit, welche ein in $Z$ befindliches Theilchen hat, und nahmen an, daſs diese $= q'$ werde, wenn dasselbe Theilchen während der Zeit $dt$ nach $z$ rückt. Wir fanden alsdann für die Aenderung der Dichtigkeit folgende Bedingungsgleichung

$$\frac{q'-q}{q\,dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Weil aber die Aenderung, welche $q$ leidet, wenn die Gröſsen $x$, $y$, $z$ und $t$ sich ändern, auch allgemein durch

$$dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

ausgedrückt wird, und hier $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ ist, so wird $q' = q + dq$, oder

$$q' = q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right);$$

daher, wenn man den hieraus gefundnen Werth von $\frac{q'-q}{dt}$ dem aus der vorigen Gleichung folgenden gleich setzt,

$$u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = -q\left(\frac{du}{dx}\right) - q\left(\frac{dv}{dy}\right) - q\left(\frac{dw}{dz}\right);$$

oder, weil $u\left(\frac{dq}{dx}\right) + q\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d.qu}{dx}\right)$ ist,

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

wo nämlich in der Differentiation von $qu$ blos $x$, in der von $qv$ blos $y$, in der von $qw$ blos $z$ als veränderlich angesehen werden muſs.

140. Wenn also $u$, $v$, $w$ gegebene Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$ sind, so ergibt diese Gleichung die Beschaffenheit der Function $q$, deren nähere Bestimmung aus dieser Differentialgleichung indeſs noch manche Schwierigkeit hat.

Wäre die Dichtigkeit $q$ und zwei Geschwindigkeiten $u$, $v$ gegeben, so wären drei Glieder jener Gleichung völlig bekannt, und wenn man diese $\left[\frac{dq}{dt}\right] + \left[\frac{d.qu}{dx}\right] + \left[\frac{d.qv}{dy}\right] = \varrho$ setzt, so hätte man $\left[\frac{d.qw}{dz}\right] + \varrho = 0$, und daraus, wenn man blos $z$ als veränderlich betrachtet, und so integrirt, $qw + \int \varrho dz = \text{Const.}$, oder $w = \frac{\text{Const.} - \int \varrho dz}{q}$.

141. Da die Auflösung der Gleichung

$$\left[\frac{dq}{dt}\right] + \left[\frac{d.qu}{dx}\right] + \left[\frac{d.qv}{dy}\right] + \left[\frac{d.qw}{dz}\right] = 0$$

sehr wichtig ist, so will ich hier zuerst einige Werthe anführen, welche derselben Genüge thun, obgleich sie nicht als vollständige Integrale derselben zu betrachten sind. Der leichteste Fall, wo derselben Genüge geschieht, ist, wenn jedes Glied für sich verschwindet, wo dann z. B. das Glied $\left[\frac{d.qu}{dx}\right] = 0$ anzeigt, daſs $qu$ nicht von $x$ abhänge, sondern eine Function von $y$, $z$ und $t$ sey, deren Beschaffenheit übrigens ganz unbestimmt bleibt: eine solche Function bezeichnen wir durch $F:(y, z, t)$, und können daher für den Fall, daſs jedes Glied für sich verschwindet, setzen: $q = \Gamma:(x, y, z)$, $qu = \Delta:(t, y, z)$, $qv = \Sigma:(t, x, z)$, $qw = \Theta:(t, x, y)$, wo jede Function mit einem eignen Buchstaben $\Gamma$, $\Sigma$, $\Delta$, $\Theta$ bezeichnet ist, um anzudeuten, daſs diese verschiedenen Functionen gänzlich unabhängig von einander sind. Hätten wir gesetzt $q = \Gamma:(x, y, z)$, $qu = \Gamma:(t, y, z)$, so würde dieses anzeigen, daſs $q$ auf eben die Weise von $x$, $y$, $z$ abhängen solle, wie $qu$ von

$t$, $y$, $z$; dieses ist aber nicht nothwendig, da der Differentialgleichung Genüge geschieht, wenn auch $qu$ eine ganz andre Function der drei Gröſsen $y$, $z$ und $t$ ist, als $q$ in Rücksicht der Gröſsen $x$, $y$, $z$.

Diese Auflösung ist zwar schon von sehr weitem Umfange; man kann aber eine noch allgemeinere finden, wenn man eine willkürliche Function aller vier Veränderlichen $x$, $y$, $z$ und $t$ einführt. Diese Function sey $= T$, und ihr Differential $dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt$.

Da nun hier allemal

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dy}\right) = 0,\ \left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dz}\right) = 0,\ \left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dy}\right) = 0$$

ist, so findet man, daſs auch folgende Werthe der Differentialgleichung Genüge thun, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ sechs beständige Gröſsen sind.

$$q = \alpha F + \beta G + \gamma H + \Gamma : (x, y, z),$$
$$qu = - \alpha I - \delta G - \varepsilon H + \Delta : (t, y, z),$$
$$qv = - \beta I + \delta F - \zeta H + \Sigma : (t, x, z),$$
$$qw = - \gamma I + \varepsilon F + \zeta G + \Theta : (t, x, y).$$

Aber es läſst sich nicht behaupten, daſs diese Werthe das vollständige Integral jener Gleichung enthalten, oder alle Fälle umfassen, wo jene Differentialgleichung Statt findet. Daſs übrigens bei der Anwendung auf wirkliche Fälle die hier unbestimmten Functionen und beständigen Gröſsen nach den Umständen bestimmt werden, versteht sich von selbst.

142. Wenn $q$ eine beständige Gröſse oder der flüssige Körper homogen und von unveränderlicher Dichtigkeit ist, so bestimmt die im 139. §. gefundne Gleichung eine Bedingung für die drei Geschwindigkeiten, indem alsdann

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0 \text{ ist.}$$

Wir können für diese Gleichung eine ähnliche Auflösung von großer Allgemeinheit finden, wie im vorigen §. Wenn nämlich $T$ wieder eine Function von $x$, $y$, $z$ und $t$ bedeutet, deren Differential

$$dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt,$$

so thun folgende Werthe der partiellen Differentialgleichung Genüge:

$$u = - \delta G - \varepsilon H + \Delta : (t, y, z),$$
$$v = + \delta F - \zeta H + \Sigma : (t, x, z),$$
$$w = + \varepsilon F + \zeta G + \Theta : (t, x, y);$$

hier brauchen $\delta$, $\varepsilon$ und $\zeta$ nicht nothwendig beständige Größen zu seyn, sondern es ist nur nöthig, daß

$$\left(\frac{d\delta}{dx}\right) - \left(\frac{d\zeta}{dz}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\delta}{dy}\right) + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right) = 0, \text{ und } \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right) = 0$$

sey, oder daß die Formel $\zeta dx - \varepsilon dy + \delta dz$ für sich integrabel sey. Dieses führt uns zu noch allgemeinern Werthen, wenn wir eine Function $V$ zu Hülfe nehmen, deren Differential $dV = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt$ ist, denn alsdann thun folgende Werthe der Differentialgleichung Genüge:

$$u = + HL - GM + \Delta : (t, y, z),$$
$$v = FM - HK + \Sigma : (t, x, z),$$
$$w = GK - FL + \Theta : (t, x, y).$$

In diesen Gleichungen sind die beschränktern Auflösungen

$$u = \Delta : (t, y, z), \quad v = \Sigma : (t, x, z), \quad w = \Theta : (t, x, y)$$

mit enthalten, da man sie aus jenen erhält, wenn man $T$ und $V = 0$, oder $=$ Const. setzt.

143. Auch die im vorigen §. gegebene Auflösung für den Fall, da $q$ veränderlich ist, läßt sich durch eine zweite Function $V$ allgemeiner machen. Es sey nämlich

$$dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt,$$
$$dV = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt,$$

so thun auch folgende Werthe der Gleichung Genüge:

$$q = (G + H)K + (H - F)L - (F + G)M + \Gamma : (x, y, z),$$
$$qu = (H + I)L + (I - G)M - (G + H)N + \Delta : (t, y, z),$$

$$qv = (I + F)M + (F - H)N - (H + I)K + \Sigma : (t, x, z),$$
$$qw = (F + G)N + (G - I)K - (I + F)L + \Theta : (t, x, y).$$

Man kann auch zwei oder mehrere solche Formen verbinden, aber dadurch wird die Auflösung nicht allgemeiner, weil $T$ und $V$ jede Function von $x, y, z$ und $t$ bezeichnen kann. Hätte man nämlich eine andre Function $T''$ mit $V$ verbunden, und die daraus gefolgerten Werthe zu den vorigen addirt, so erhielte man eben das, was sich ergibt, wenn man gleich anfangs $T + T''$ statt $T$ gesetzt hätte.

---

## Zweiter Abschnitt.

### *Allgemeine Gesetze der Bewegung flüssiger Körper, auf welche beschleunigende Kräfte wirken.*

---

144. Problem 23. Wenn auf einen flüssigen Körper beschleunigende Kräfte wirken, und der Druck, welchen irgend ein Theilchen leidet, als bekannt angenommen wird, zu bestimmen, mit welcher Kraft dieses Theilchen zur Bewegung angetrieben werde.

Auflösung. Für den Punkt $Z$ (Fig. 27.) sind die auf einander senkrechten Coordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Man lege dem Theilchen, welches wir hier betrachten, die parallelepipedische Form $ZLNMzlum$ bei, und setze die Seiten desselben $ZL = dx$, $ZM = dy$, $Zz = dz$; so ist sein Volumen $= dxdydz$, und wenn die Dichtigkeit hier $= q$ ist, die Masse $= qdxdydz$. Auf dieses Theilchen wirken beschleunigende, der Schwere ähnliche Kräfte, welche wir uns nach Richtungen, die den Coordinaten parallel sind, zerlegt denken, und die Summe

aller mit $OA$ parallel wirkenden Kräfte $= P$, die Summe aller mit $OB$ parallel wirkenden $= Q$, und die Summe aller mit $OC$ parallelen $= R$ setzen.

Außer diesen Kräften aber kommt hier auch der Druck, welchen das Theilchen leidet, in Betrachtung, da dasselbe dadurch, sofern dieser Druck nicht von allen Seiten gleich ist, ebenfalls zur Bewegung angetrieben wird. Wir bezeichnen die Höhe, welche in dem Punkte $Z$ den Druck abmißt, durch $p$, und betrachten diese Größe als eine Function der vier Größen $x, y, z$ und $t$, daher wir für die übrigen Winkelpunkte des Parallelepipedi den Druck für eben den Zeitpunkt in folgenden allgemeinen Ausdrücken darstellen:

Im Punkte $Z$ ist der Druck $= p$,

in $L$ ist der Druck $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$,

in $M$ — — — $= p + dy \left(\frac{dp}{dy}\right)$,

in $N$ — — — $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right) + dy \left(\frac{dp}{dy}\right)$,

in $z$ — — — $= p + dz \left(\frac{dp}{dz}\right)$,

in $l$ — — — $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right) + dz \left(\frac{dp}{dz}\right)$,

in $m$ — — — $= p + dy \left(\frac{dp}{dy}\right) + dz \left(\frac{dp}{dz}\right)$,

in $n$ — — — $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right) + dy \left(\frac{dp}{dy}\right) + dz \left(\frac{dp}{dz}\right)$.

Wenn wir nun die einander gegenüberstehenden Seitenflächen betrachten, $ZMzm$ und $LNln$, so ist offenbar der Druck auf jeden Punkt der Ebene $LNln$ um $dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$ größer, als der Druck auf jeden ähnlich liegenden Punkt der Fläche $ZMzm$: jeder Punkt der Ebene $LNln$ leidet also

einen Druck, welcher durch die Höhe $dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$ bestimmt wird, und da die Gröſse dieser Fläche $= dydz$ ist, so drückt $dx\,dy\,dz \left(\frac{dp}{dx}\right)$ den gesammten Druck aus, welchen die ganze Fläche leidet, und die Richtung dieses Druckes ist mit der Axe $AO$ parallel.

Auf das Parallelepipedum, dessen Masse $= q\,dx\,dy\,dz$ ist, wirkt also nach der Richtung $AO$ die bewegende Kraft $= dx\,dy\,dz \left(\frac{dp}{dx}\right)$, und wir finden daraus, indem wir mit der Masse dividiren, die beschleunigende Kraft $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right)$, welche der Richtung der Kraft $P$ entgegen wirkt. Eben so findet man die aus dem Drucke entspringende beschleunigende Kraft, welche auf das Theilchen nach der mit $BO$ parallelen Richtung wirkt, $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right)$, und die mit $CO$ parallel wirkende $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right)$.

Verbinden wir diese Kräfte mit den der Schwere ähnlichen, wovon vorher die Rede gewesen, so finden wir, daſs folgende beschleunigende Kräfte das Theilchen $Z$ zur Bewegung antreiben:

mit der Richtung $OA$ parallel, die Kraft $= P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right)$,

mit der Richtung $OB$ parallel, die Kraft $= Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right)$,

mit der Richtung $OC$ parallel, die Kraft $= R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right)$.

Diese Ausdrücke enthalten alle Kräfte, welche auf das Theilchen $Z$ wirken können; denn wenn auch eine äuſsere Kraft auf den flüssigen Körper drückt, so ist ihre Wirkung

auf das Theilchen $Z$ schon mit in dem Drucke $p$ enthalten, den wir in Betrachtung gezogen haben.

145. Weil der Druck auf jeden Punkt der Fläche $LNln$ gleich grofs ist, so geht die mittlere Richtung des gesammten Druckes durch den Mittelpunkt der Masse des Parallelepipedi, weil man diese kleine Masse als homogen betrachten darf. Eben dieses gilt von dem Drucke auf die Seitenflächen $MNmn$ und $zlnm$, und da die Kräfte $P$, $Q$, $R$ ohnehin als im Schwerpunkte angebracht betrachtet werden müssen, so theilen diese Kräfte dem Parallelepipedo keine Umdrehungsbewegung mit, doch kann seine Figur, und selbst sein Volumen, wenn das Fluidum einer Verdichtung oder Verdünnung fähig ist, Aenderungen leiden. Indefs ist zu bemerken, dafs die Umdrehungsbewegung nur in sofern ausgeschlossen wird, als wir auf Differentiale der zweiten Ordnung nicht Rücksicht nehmen: dafs bei der Rücksicht auf diese allerdings sich eine Umdrehung ergeben könne, erhellt aus der vorigen Untersuchung über das Fortrücken eines pyramidalischen Theilchens (§. 130.). Wie aber auch diese Bewegung beschaffen sey, so wird man sie aus den hier vorkommenden Lehren bestimmen können, und man darf nicht besorgen, dafs irgend ein Umstand, der auf die Bewegung Einflufs hat, hier übergangen werde.

146. Zur Erleichterung der Rechnung ist das Theilchen des flüssigen Körpers hier als parallelepipedisch angenommen worden, und man könnte daher noch fragen, ob bei einer andern Gestalt sich die beschleunigenden Kräfte eben so würden gefunden haben. In den Lehren vom Gleichgewichte flüssiger Körper fanden wir, dafs der Druck, welchen ein eingetauchter Körper, oder irgend ein bestimmter Theil des Flüssigen leidet, nicht von der Figur, sondern nur von dem Volumen desselben abhängt, wenn die Dichtigkeit des flüssigen Körpers, der zur Erhaltung des Gleichgewichts diesen Raum ausfüllen müfste, überall gleich grofs, und die auf denselben wirkenden beschleunigenden Kräfte in allen Punkten einerlei sind. Hier

aber kann das kleine Theilchen in $Z$ allerdings als homogen angesehen werden, und die Kräfte $P$, $Q$, $R$ als in jedem Punkte desselben gleich groſs, wir dürfen also auch hier für dieses unendlich kleine Theilchen annehmen, daſs der Druck nicht von der Figur, sondern nur vom Volumen des Theilchens abhänge, also die Bestimmung der beschleunigenden Kräfte auch bei einer andern Figur dieselbe bleibe. Ueberdies aber kann man sich ja auch allerdings den ganzen flüssigen Körper in solche parallelepipedische Theilchen getheilt denken, da unsre Voraussetzung gar nicht auf die innere Natur des Fluidi gegründet ist, oder diesen als ein bloſses Aggregat von kleinen (vielleicht festen) Parallelepipedis betrachten, indem es dabei ganz gleichgültig ist, welche Gestalt die kleinsten Theile des flüssigen Körpers (wenn man sich solche denken will) haben mögen.

Der Druck $p$ kommt hier nur als Function von $x$, $y$ und $z$ vor, da man blos für eine bestimmte Zeit die beschleunigenden Kräfte sucht, und daher $t$ als unveränderlich betrachtet.

147. Problem 24. Wenn ein flüssiger Körper der Wirkung von was immer für Kräften ausgesetzt ist, die Gründe zur Bestimmung der Bewegung anzugeben.

Auflösung. Wir betrachten den Zustand des flüssigen Körpers, in welchem er sich am Ende einer bestimmten Zeit $t$ (Fig. 24.) befindet, und richten unsre Aufmerksamkeit auf irgend ein Theilchen $Z$, dessen Lage durch die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, welche den Axen $OA$, $OB$, $OC$ parallel sind, bestimmt wird. Auf dieses Theilchen wirken die beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$ nach den Richtungen $Zx$, $Zy$, $Zz$, welche jenen Axen parallel sind. Die Dichtigkeit des in diesem Augenblick in $Z$ befindlichen Theilchens sey $= q$, der Druck, welchen dasselbe leidet, werde durch die Höhe $= p$ bestimmt. Man betrachte die Bewegung des Theilchens als nach den Richtungen $Zx$, $Zy$, $Zz$ zerlegt, und nenne die Geschwindig-

keit nach der Richtung $Zx$, $= u$, die Geschwindigkeit nach $Zy$, $= v$, die Geschwindigkeit nach $Zz$, $= w$; so wissen wir aus §. 139., daſs zwischen der Dichtigkeit und den drei Geschwindigkeiten folgende Bedingungsgleichung Statt findet:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Wir fanden ferner im vorigen Problem die beschleunigenden Kräfte, welche auf dieses Theilchen nach den mit den Coordinaten parallelen Richtungen wirken,

$$= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) \text{ nach der Richtung } Zx,$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) \text{ nach der Richtung } Zy,$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) \text{ nach der Richtung } Zz;$$

und bei diesen Ausdrücken ist die Kraft der Schwere als Einheit angenommen. Setzen wir daher den Raum, durch welchen die Schwere einen frei fallenden Körper in der ersten Secunde treibt, $= g$, so ist die Geschwindigkeit, welche irgend eine andre Kraft $= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dem Körper am Ende der ersten Secunde würde mitgetheilt haben, $= 2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, wenn sie während dieser Zeit mit gleicher Stärke auf ihn wirkte, oder die von ihr herrührende Aenderung der Geschwindigkeit während des kleinen Zeitraums $= dt$ ist $= 2g\,dt\left\{P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}$. Eben diese Aenderung der Geschwindigkeit nach der Richtung $Zx$, nach welcher diese Kraft wirkt, fanden wir aber im 136. §.

$$= \left\{u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\right\} dt,$$

und da beide Ausdrücke gleich seyn müssen, so erhalten wir die Gleichung

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

weil die Aenderung der Geschwindigkeit, welche im 21ten Problem bestimmt ward, nur von der beschleunigenden Kraft $= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ bewirkt werden kann. Nehmen wir eben so die dort gefundenen Beschleunigungen, nach der Richtung $Zy$

$$= u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right),$$

nach der Richtung $Zz$

$$= u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right),$$

so ergibt die Vergleichung mit den nach dieser Richtung wirkenden beschleunigenden Kräften zwei andre Gleichungen, so dafs man hat:

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$2gQ - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right),$$

$$2gR - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Bei dieser ganzen Untersuchung aber mufs $t$ in Secunden ausgedrückt werden und $u$, $v$, $w$ die Räume bezeichnen, welche das Theilchen in einer Secunde durchlaufen würde, wenn seine Geschwindigkeit gleichförmig bliebe, oder, wenn man nach andern Zeittheilen rechnen wollte, so müfste auch $g$ den Raum bezeichnen, welchen ein freifallender Körper während eines solchen Zeittheilchens durchläuft.

Diese drei Gleichungen, verbunden mit der zwischen der Dichtigkeit und den Geschwindigkeiten gefundenen, enthalten die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper.

148. Unser ganzes Geschäft würde also darin bestehen, die Gröfsen $p$, $q$, $u$, $v$, $w$ als solche Functionen von

$x$, $y$, $z$ und $t$ zu bestimmen, welche jenen Gleichungen Genüge thun, oder die aus jenen Gleichungen gefundnen Integrale auf bestimmte Fälle anzuwenden.

149. Da $q$ entweder beständig ist, oder blos vom Drucke $p$ abhängt, oder zugleich von der Wärme, welche wir als eine gegebene Function von $x$, $y$, $z$ und $t$ betrachten, so ergibt sich hieraus eine neue Gleichung, weil die Natur des flüssigen Körpers, wie nämlich die Dichtigkeit vom Drucke und von der Wärme abhängt, als bekannt vorausgesetzt wird. Wir können daher $q$ als eine anders woher gegebene Function betrachten, statt welcher wir in den Gleichungen ihren Werth setzen, und wir haben alsdann zur Bestimmung der vier Gröfsen $p$, $u$, $v$, $w$ vier Gleichungen, woraus erhellet, dafs die gegebne Auflösung vollständig und keine Bedingung übersehen ist.

150. Diese Gleichungen enthalten nun zwar die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper; aber um sie anzuwenden, mufs man die Integrale dieser Gleichungen bestimmen, und diese auf gegebne Fälle anzuwenden wissen — eine Aufgabe, welche mit grofsen Schwierigkeiten verknüpft ist. Wir werden uns indefs der Auflösung derselben um einen Schritt nähern, wenn wir die Gleichungen einfacher zu machen suchen, welches sich dadurch erreichen läfst, dafs wir die drei letzten in eine einzige zusammenfassen, welche den Sinn von allen dreien umfafst.

151. Problem 25. Wenn aufser den beschleunigenden Kräften $P$, $Q$, $R$ auch die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ jedes Theilchens und die Dichtigkeit $q$ desselben als bekannt angenommen werden, den Druck $p$ durch eine einzige Gleichung zu bestimmen.

Auflösung. Von den drei im vorigen Problem gefundenen Gleichungen gibt die erste den Werth von $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, die zweite den Werth von $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, die dritte den

Werth von $\left(\frac{dp}{dz}\right)$. Da nun $p$ eine Function von $x, y, z$ und $t$ ist, so wird, wenn wir $t$ als unveränderlich betrachten,

$$dp = dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right) + dz\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Daher können wir aus der Verbindung jener Gleichungen den Werth des vollständigen Differentials $dp$ bestimmen. Ich setze, um die Formeln abzukürzen:

$$u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) = U,$$
$$u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = V,$$
$$u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right) = W,$$

wodurch sich die drei Gleichungen des vorigen Problems in folgende verwandeln:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = 2gP - U,$$
$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = 2gQ - V,$$
$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = 2gR - W.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $dx$, die zweite mit $dy$, die dritte mit $dz$, und addirt sie, so gibt die Summe der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder $= \frac{2g\,dp}{q}$, weil $t$ als unveränderlich angesehen wird, und man erhält die Gleichung

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - U\,dx - V\,dy - W\,dz,$$

aus welcher, durch die Integration, $p$ gefunden werden muſs.

Diese Gleichung ist eben so allgemein, wie die drei vorigen; denn es ist einleuchtend, dafs, wenn

$$dp = L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

ist, diese eine Gleichung folgende drei in sich schliefst,

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = L, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = M, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = N,$$

und dafs diese drei nichts mehr bestimmen, als jene eine.

152. Die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper ist also in diesen zwei Gleichungen enthalten:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0,$$

$$\text{II.} \quad \frac{2g\,dp}{q} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - U\,dx - V\,dy - W\,dz,$$

womit man noch eine dritte verbinden mufs, welche $q$ durch $p$ ausdrückt, und welche bei einem gegebnen Fluido immer als bekannt kann angenommen werden.

153. In der letzten jener beiden Gleichungen wird $t$ als beständig betrachtet, weswegen nach vollbrachter Integration in den Werth von $p$ statt der beständigen Gröfse eine unbestimmte Function von $t$ gesetzt werden mufs: und dieses ist auch der Natur der Sache gemäfs, weil der Druck $p$ in jedem Augenblick durch einen willkürlich angebrachten äufsern Druck verändert werden kann. Bei der Anwendung auf einen wirklichen Fall wird diese Function bestimmt, weil der äufsere Druck und das Gesetz, nach welchem er sich etwa im Fortgange der Zeit ändert, gegeben ist.

154. Wenn in der zweiten Gleichung die Gröfsen $U$, $V$, $W$ als gegebene Functionen von $x$, $y$ und $z$ angesehen werden, so müssen diese so beschaffen seyn, dafs sich die Gleichung integriren läfst; denn wenn sie keine Integration zuliefse, so würde das anzeigen, dafs eine solche Bewegung nicht bestehen könne. Wir wissen aber aus dem Vorigen, dafs bei allen in der Natur vorkommenden, der Schwere ähnlichen Kräften die Formel $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

sich integriren läſst; und es erhellt daher, daſs der zweite Theil der Gleichung allemal integrabel seyn werde, wenn die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ ist. Wir wollen $Pdx + Qdy + Rdz = dS$ und $Udx + Vdy + Wdz = dT$ setzen, weil wir annehmen, daſs beide Formeln wahre Differentiale sind, so wird

$$\frac{2gdp}{q} = 2gdS - dT,$$

und die Gleichung ist auf eine Form gebracht, wo die Bedingungen der Integrabilität bekannt sind. Denn wenn $q$ entweder eine beständige Gröſse ist, oder blos von $p$ abhängt: so hat man

$$2g\int\frac{dp}{q} = 2gS - T + \Gamma : t,$$

wo $\Gamma : t$ die unbestimmte Function von $t$ bezeichnet, welche bei der Integration hinzukommt. Aber auch wenn $q$ von den beiden Gröſsen $p$ und $2gS - T$ abhängt, so ist die Auflösung möglich, und man würde nach vollendeter Integration $p$ und $q$ als Functionen von $2gS - T$ ausgedrückt erhalten.

Ueberhaupt erlaubt die zweite Gleichung nur dann eine Integration, wenn man sie durch irgend eine Substitution auf eine Form bringen kann, welche nur zwei veränderliche Gröſsen enthält: denn die Bedingungen der Integrabilität einer Differentialgleichung, welche drei oder mehrere veränderliche Gröſsen enthält, kommen alle darauf hinaus, daſs diese Gleichung durch irgend eine Substitution sich auf zwei veränderliche Gröſsen müsse zurückführen lassen.

155. Durch die Voraussetzung, daſs die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ für sich integrabel seyn solle, beschränken wir die Allgemeinheit der Gleichung gar sehr, indem wir zwei ganz neue Bedingungen einführen, daſs nämlich $\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right)$ seyn solle. Es

scheint zwar, als wenn noch die dritte Bedingungsgleichung $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$ hinzukomme, aber diese ist in den ersten beiden schon mit enthalten, weil jene

$$\left(\frac{ddU}{dy\,dz}\right) = \left(\frac{ddV}{dx\,dz}\right) = \left(\frac{ddW}{dx\,dy}\right)$$

geben, woraus $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$ folgt.

Uebrigens hängen vermöge der ersten allgemeinen Gleichung (§. 152.) die Gröſsen $U$, $V$, $W$ auch von $q$ ab, und so sind diese Gröſsen schon von einer Seite her bestimmt, und es steht uns keineswegs frei, andre Bedingungen für dieselben willkürlich festzusetzen. Indeſs ist so viel gewiſs, wenn man Werthe für die Gröſsen $p$, $q$, $u$, $v$, $w$ finden kann, welche den beiden Gleichungen Genüge thun, und wo zugleich $p$ und $q$ so von einander abhängen, wie es die Natur des flüssigen Körpers erfordert, von welchem die Rede ist, so wird eine solche Bewegung, wie sie durch jene Gröſsen bestimmt wird, bei diesem Fluido möglich seyn.

Für die erste der beiden Gleichungen, welche von $P$, $Q$, $R$ und $p$ unabhängig ist, läſst sich das vollständige Integral angeben.

156. Problem 26. Es ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

gegeben, man soll ihr vollständiges Integral angeben.

Auflösung. Die Aufgabe verlangt, daſs eine Gleichung von der Form

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$$

allgemein aufgelöst werde, oder daſs man die allgemeine Form der Functionen $P$, $Q$, $R$, $S$ angebe, welche von $x$, $y$, $z$ und $t$ abhängen, und alle dieser Gleichung entsprechende

Fälle umfassen. Wir wollen bei der Auflösung dieser Gleichung von den einfachsten Fällen anfangen, und annehmen, es wäre nur eine einzige veränderliche Gröfse $x$ da, so dafs die Gleichung nur aus dem Gliede $\left(\frac{dP}{dx}\right) = 0$ bestände, so hätte man $P =$ Constans als das vollständige Integral.

Sind zwei veränderliche Gröfsen $x$, $y$ vorhanden, oder bestände die Gleichung aus den Gliedern $\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$, so würde man das vollständige Integral finden, wenn man irgend eine Function $O$ beider veränderlichen Gröfsen annähme, und alsdann

$$P = \left(\frac{dO}{dy}\right) + \Gamma : y \text{ und } Q = \div \left(\frac{dO}{dx}\right) + \Delta : x$$

setzt, wo für $O$ jede Function dieser beiden Gröfsen kann angenommen werden.

Wir gehen zu dem Falle fort, wo die Gleichung aus den drei Gliedern $\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) = 0$ besteht, und folglich von drei veränderlichen Gröfsen abhängt. Zur Auflösung derselben nehmen wir an, dafs $O$ und $o$ zwei willkürliche Functionen jener drei Gröfsen sind, und man übersieht leicht, dafs die Werthe

$$P = \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right) - \left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{dO}{dz}\right) + \Gamma : (y, z),$$

$$Q = \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right) + \Delta : (x, z),$$

$$R = \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right) + \Sigma : (y, z)$$

der Gleichung Genüge thun: man darf aber auch behaupten, dafs sie die vollständige Auflösung enthalten, weil aufser den Functionen $O$, $o$, wofür jede von $x$, $y$ und $z$ abhängende Function gesetzt werden kann, noch drei andre unbestimmte Functionen vorkommen, welche von zwei veränderlichen Gröfsen abhängen.

Hieraus läſst sich nun auch die Auflösung der Gleichung $\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$ herleiten. Nehmen wir nämlich drei Functionen $O$, $o$, $\omega$ der vier veränderlichen Gröſsen $x$, $y$, $z$ und $t$ an, so enthalten folgende Werthe für $P$, $Q$, $R$, $S$ die vollständige Auflösung jener Gleichung:

$$P = + \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right)$$
$$- \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) - \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t),$$

$$Q = - \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$$
$$+ \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t),$$

$$R = + \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$- \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \Sigma : (x, y, t),$$

$$S = - \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \Theta : (x, y, z).$$

Da diese Werthe die Gleichung auflösen, und zugleich drei willkürliche Functionen aller vier veränderlichen Gröſsen, nebst vier Functionen dreier veränderlichen enthalten, so darf man sie als die vollständigen Integralwerthe betrachten.

157. Um die Richtigkeit dieser Auflösung zu beweisen, bemerke man folgendes. In dem Werthe von $P$ kommt das von $dx$ abhängende partielle Differential nirgends vor, eben so wenig in $Q$ das von $y$ abhängende, noch in $R$ das von $z$, oder in $S$ das von $t$ abhängende. Ferner erhält man

den Werth von $Q$, wenn man im Werthe von $P$ allenthalben $dx$ statt $dy$ setzt, und die Zeichen umkehrt; setzt man im Werthe von $P$, $dx$ statt $dz$, so erhält man den Werth von $R$, und endlich den Werth von $S$, wenn man im Werthe von $P$, $dx$ statt $dt$ setzt, und die Zeichen umkehrt.

In jedem dieser Ausdrücke haben diejenigen Glieder einerlei Zeichen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, diejenigen aber, welche einen solchen Factor enthalten, haben entgegengesetzte Zeichen. Hingegen, wenn man die verschiedenen Gleichungen mit einander vergleicht, so haben diejenigen Glieder verschiedene Zeichen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor enthalten, die, welche nur einen gemeinschaftlichen Factor haben, sind mit einerlei Zeichen, die aber, worin zwei gemeinschaftliche Factoren vorkommen, mit entgegengesetzten Zeichen bezeichnet.

Nimmt man nun irgend ein Glied aus einer von jenen vier Gleichungen, so findet man in jeder der drei Gleichungen ein Glied, welches zwei diesem Gliede gemeinschaftliche Factoren enthält, und diese Glieder haben das entgegengesetzte Zeichen von jenem: es läſst sich aber leicht zeigen, daſs das partielle Differential jenes ersten Gliedes durch einige in den partiellen Differentialen der letztern vorkommende Glieder aufgehoben wird; weil nämlich die ungleichen Factoren dieser Glieder so beschaffen sind, daſs ihre partiellen Differentiale so gesucht, wie die aufzulösende Differentialgleichung es verlangt, einander gleich werden, und da eben das für alle übrigen Glieder gilt, so erhellt, daſs die Summe aller, der Differentialgleichung gemäſs genommener, partieller Differentiale verschwindet, wie die Differentialgleichung es erfordert.

158. Die im 156. §. gefundnen Werthe für $P$, $Q$, $R$, $S$ sind also diejenigen, welche für $qu$, $qv$, $qw$ und $q$ gesetzt, der ersten für die Bewegung flüssiger Körper gefundnen

Gleichung Genüge thun, und zugleich die vollständige Auflösung derselben enthalten. Die Auflösung eben jenes Problems gibt uns auch für den Fall, da $q$ unveränderlich ist, die Werthe von $u$, $v$, $w$, denn da die Differentialgleichung alsdann $0 = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)$ ist, so erhalten $u$, $v$, $w$ diejenigen Werthe, welche wir für $P$, $Q$, $R$ fanden, als wir $\left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$ setzten, und die Gleichung als nur aus drei Gliedern bestehend betrachteten.

---

## Dritter Abschnitt.

### *Anwendung der vorigen Lehren auf flüssige Körper, deren Dichtigkeit allenthalben gleich und unveränderlich ist.*

---

159. Problem 27. Wenn ein homogenes Fluidum von unveränderlicher Dichtigkeit der Wirkung beschleunigender Kräfte unterworfen ist, die Gesetze seiner Bewegung in analytischen Formeln darzustellen.

Auflösung. Wir nehmen hier die Dichtigkeit $q$ als eine unveränderliche Gröfse an, und setzen sie $= b$, und in diesem Falle werden die beiden für die Bewegung des flüssigen Körpers gefundnen Gleichungen

$$\text{I. } \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

$$\text{II. } \frac{2g\,dp}{b} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - U\,dx - V\,dy - W\,dz,$$

und für das Integral der ersten haben wir

$$u = \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dy}\right) + \Gamma:(y,z,t),$$

$$v = -\left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right) + \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right) + \Delta:(x,z,t),$$

$$w = \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right) + \Sigma:(x,y,t),$$

wo $O$ und $o$ jede Function der vier veränderlichen Gröfsen $x$, $y$, $z$ und $t$ bezeichnen können.

In der zweiten Gleichung, wo alle Buchstaben die aus dem Vorigen bekannte Bedeutung haben, ist die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ in allen in der Natur vorkommenden Fällen für sich integrabel; ich setze ihr Integral $= S$ *), also wird die Gleichung

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz,$$

in welcher die Zeit $t$ als eine unveränderliche Gröfse betrachtet wird. Da nun die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ schon durch die erste Gleichung als Functionen der vier veränderlichen Gröfsen $x$, $y$, $z$ und $t$ ausgedrückt sind, so würde diese Gleichung den Werth von $p$ durch eben diese Gröfsen geben, wenn sie sich auflösen liefse. Diese Gleichung ist nur dann möglich, wenn die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ für sich integrabel ist: eine Bedingung, welche die Allgemeinheit der ersten Gleichung sehr einschränkt. Setzt man das Integral dieser Formel $= T$, so erhält man aus der

---

*) Die Integrabilität der Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ findet in den meisten Fällen Statt, indefs können auch Fälle vorkommen, wo diese Formel nicht für sich integrabel ist, z. B. wenn man auf den Widerstand Rücksicht nimmt, welchen flüssige Körper bei ihrer Bewegung leiden, und diesen als eine Function der Geschwindigkeit betrachtet. In solchen Fällen braucht dann auch nicht die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ für sich integrabel zu seyn. (B.)

zweiten Gleichung $\frac{2gp}{b} = 2gS - T + f:t$, weil statt der beständigen Gröfse bei der Integration eine unbestimmte Function der in dieser Gleichung als beständig betrachteten Zeit $t$ hinzukommt.

160. Aus der allgemeinen Auflösung der ersten Gleichung sind also nur diejenigen Fälle brauchbar, welche der verlangten Integrabilität der Formel $U dx + V dy + W dz$ entsprechen, oder die Functionen $O$ und $o$, nebst den mit $\Gamma, \Delta, \Sigma$ bezeichneten, müssen so beschaffen seyn, dafs $\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right)$ sey, und diese Fälle zu bestimmen hat, ungeachtet der allgemeinen Auflösung der ersten Gleichung, noch grofse Schwierigkeit.

161. Betrachtet man die Werthe von $U$, $V$, $W$, so überzeugt man sich leicht, dafs den Gleichungen

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right), \quad \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right)$$

Genüge geschieht, wenn

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$$

ist, oder wenn die Formel $u dx + v dy + w dz$ für sich integrabel ist: diesen Fall werden wir daher in der Folge noch etwas näher betrachten. Vorher aber wollen wir bei der Betrachtung einiger einfacherer Fälle stehen bleiben, die wenigstens die Anwendung unsrer Formeln etwas mehr ins Licht setzen werden, wenn sie uns gleich eben keine Aufschlüsse über solche Fälle geben, deren Auflösung nicht so nahe liegt. Ich werde mit dem Falle anfangen, wo die drei Geschwindigkeiten $= 0$ sind, oder der flüssige Körper ganz in Ruhe ist; unsre Formeln müssen für diesen Fall eben dasjenige geben, was aus den Gesetzen des Gleichgewichts schon bekannt ist.

162. Problem 28. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ für alle Theilchen des flüssigen Körpers ver-

schwinden, aber beschleunigende Kräfte $P$, $Q$, $R$ auf denselben wirken, den Druck zu bestimmen, den jedes Theilchen während der Ruhe in jedem Augenblicke leidet.

Auflösung. Da hier $u = v = w = o$, und auch ihre Differentiale $= o$ sind, so geschieht der ersten Gleichung, bei Körpern von unveränderlicher Dichtigkeit, allemal Genüge. In der zweiten Gleichung aber wird $U = o$, $V = o$, $W = o$, und sie erhält daher die Form

$$\frac{dp}{b} = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Dieselbe Gleichung, welche wir vorhin (§. 39.) für das Gleichgewicht flüssiger Körper von unveränderlicher Dichtigkeit fanden, und welche nur dann möglich ist, wenn der letzte Theil der Gleichung ein vollständiges Differential ist. Es sey also $Pdx + Qdy + Rdz = dS$, so wird $\frac{p}{b} = S + f : t$, weil die Zeit $t$ in dieser Gleichung als unveränderlich betrachtet ward, und daher bei der Integration eine unbestimmte Function von $t$ statt der beständigen Gröfse hinzukommen mufs.

163. Bei den vorigen Betrachtungen des Gleichgewichts setzten wir $p = bS +$ Const., weil wir dort auf Aenderung der Umstände im Fortgange der Zeit nicht Rücksicht nahmen; es ist aber offenbar, dafs statt jener beständigen Gröfse irgend eine Function der Zeit $t$ gesetzt werden kann. Man betrachte nämlich den flüssigen Körper, als in ein Gefäfs eingeschlossen, in welchem er vermittelst eines Kolbens durch irgend eine Kraft gedrückt werde: offenbar wird er im Gleichgewichte bleiben, da er keiner Zusammendrückung fähig ist, und das Gleichgewicht wird fortdauern, die auf den Kolben drückende Kraft mag sich im Fortgange der Zeit ändern, wie sie will. Die Aenderung dieses äufsern Druckes hebt also das Gleichgewicht nicht auf, bringt aber in dem Drucke, welchen jedes Theilchen des flüssigen Körpers leidet, eine Aenderung

hervor, daher muſs unsre Gleichung, weil sie den Druck für alle möglichen Fälle des Gleichgewichts enthalten soll, eine unbestimmte Function von $t$ enthalten.

164. Da der äuſsere Druck auf den Kolben sich auf alle mögliche Weise ändern kann, und diese Aenderungen nicht einmal nach dem Gesetze der Stetigkeit zu erfolgen brauchen, so erhellt, daſs auch die Function $f:t$ nicht nothwendig dem Gesetze der Stetigkeit unterworfen ist, sondern Aenderungen von endlicher Gröſse leiden könne, während $t$ sich unendlich wenig ändert. Solche Functionen kann man unstetige — functiones discontinuas — nennen, und dieses Beispiel beweist die Nothwendigkeit, solche Functionen in der Analysis zu gebrauchen.

165. Der Druck, welchen jedes Theilchen des Flüssigen leidet, ist also durch $S$ nur in sofern bestimmt, als auch der äuſsere Druck für einen gegebnen Zeitpunkt bekannt ist; und wenn die Aenderung dieses äuſsern Druckes im Fortgange der Zeit nicht bekannt ist, so läſst sich aus dem Werthe von $S$ allein der Druck nicht bestimmen. Ist aber in irgend einem Punkte der Druck bekannt, so kann man für eben den Augenblick den Druck in jedem andern Punkte angeben.

166. Obgleich hier blos die Rede von flüssigen Körpern ist, deren Dichtigkeit sich nicht ändert, so läſst sich doch auch leicht die Anwendung auf diejenigen machen, für welche $q$ veränderlich ist. Für diese wird, weil $u$, $v$, $w$ und ihre Differentiale verschwinden, die erste Gleichung $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$: das heiſst, der flüssige Körper darf im Fortgange der Zeit seine Dichtigkeit nicht ändern, sondern in jedem Punkte muſs die Dichtigkeit immerfort so bleiben, wie sie einmal ist — dieses ist auch für sich klar, da Aenderung der Dichtigkeit nicht ohne Bewegung Statt finden kann. Homogen braucht das Fluidum nicht zu seyn, weil gar nichts über die Abhängigkeit der Gröſse $q$ von $x$, $y$, $z$

bestimmt wird. Die zweite Gleichung wird nun $\frac{dp}{q} = dS$, deren Integral wir jetzt $\int \frac{dp}{q} = S + \text{Const.}$ setzen müssen, wenn $q$ als Function von $p$ gegeben ist. Die Ruhe besteht also nur, wenn diese Gleichung die Integration zuläſst. Eine Function von $t$ darf hier im Werthe von $p$ nicht vorkommen; denn da $q$, wenn es veränderlich ist, immer von $p$ abhängt, so würde auch $q$ von der Zeit abhängig, wenn $p$ es ist, und dieses widerstreitet der Gleichung $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$. Auch die Natur der Sache zeigt dieses deutlich, denn wenn sich der Druck auf den Kolben änderte, so würde dieser nicht an der Stelle stehen bleiben, wo er sich befand, sondern den flüssigen Körper zusammendrücken, oder ihm eine Ausdehnung gestatten, so daſs also das Gleichgewicht nicht fortdauerte.

167. Da hier der flüssige Körper als in ein Gefäſs eingeschlossen betrachtet wird, so muſs dieses durch bestimmte Kräfte in Ruhe erhalten werden, weil sonst unsre Voraussetzungen nicht mehr Statt finden. Diese äuſsern Kräfte kommen so wenig, als die, welche auf den Kolben wirken, in der Differentialgleichung vor, weil sie für alle Theilchen des flüssigen Körpers einerlei sind; aber nach vollendeter Integration müssen die in die Rechnung gebrachten unbestimmten Functionen nach diesen äuſsern Kräften und nach andern Umständen bestimmt werden. Die äuſsern Kräfte, welche auf das ganze Gefäſs wie auf einen festen Körper wirken, müssen im gegenwärtigen Falle so bestimmt werden, daſs sie der Wirkung der Kräfte $P$, $Q$, $R$ auf die ganze Masse des Flüssigen und der auf den Kolben drückenden Kraft das Gleichgewicht halten.

168. Problem 29. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ für jeden Punkt $Z$ des flüssigen Körpers einerlei sind, so daſs alle Theilchen mit gleichförmiger Bewe-

wegung nach einerlei Richtung fortgehen, den Druck für jede Stelle des flüssigen Körpers und für jeden Zeitpunkt zu bestimmen, wenn zugleich beschleunigende Kräfte auf denselben wirken.

Auflösung. Der Voraussetzung zu Folge bewegt sich die ganze flüssige Masse wie ein fester Körper, und, wenn man sie als in ein Gefäſs eingeschlossen betrachtet, so wird das Gefäſs mit dem flüssigen Körper gleichförmig fortbewegt. Eine solche Bewegung kann immer Statt finden, ungeachtet der beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$, wenn man nur an das Gefäſs solche äuſsere Kräfte anbringt, welche diesen das Gleichgewicht halten. Wirken einige dieser Kräfte vermittelst eines Kolbens unmittelbar auf den flüssigen Körper, so hängt der Druck, den jedes Theilchen des flüssigen Körpers leidet, von diesen mit ab, und daher müssen diese Kräfte in dem Integralausdruck für $p$ mit vorkommen.

Da $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$ beständige Gröſsen sind, und die Dichtigkeit $= b$ unveränderlich ist, so sind alle Glieder der ersten Gleichung $= 0$. Ueberdies ist $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, und daher, wenn

$$P dx + Q dy + R dz = dS \text{ ist,}$$

$dp = b\,dS$ und $p = bS + f:t$.

Der Druck hängt also von der Wirkung der Kräfte $P$, $Q$, $R$ eben so ab, wie im Zustande der Ruhe, und die von äuſsern Kräften herrührende Aenderung des Drucks wird durch das Glied $f:t$ angegeben.

169. Die Resultate des vorigen §. hätten sich aus dem vorigen Problem herleiten lassen, da, nach den Gesetzen der Mechanik, bei einem Systeme von Körpern alles einerlei bleibt, wenn das ganze System gleichförmig und in gerader Richtung fortbewegt wird. Aber da die beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$ sich ändern können, wenn der flüssige Körper in eine andere Stelle rückt, so findet diese Anwendung nicht so unmittelbar und allgemein Statt.

Bei dem Zustande der Ruhe bemerkten wir, daſs derselbe nicht bestehen könne, wenn die Formel

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

nicht für sich integrabel sey: und hier, bei der gleichförmigen Bewegung, findet etwas ähnliches Statt. Denn wenn hier dieselbe Formel nicht die Integration zuläſst, so ist die Gleichung für $p$ unmöglich, und die gleichförmige Bewegung könnte in einem solchen Falle nicht bestehen, sondern die Richtung oder die Geschwindigkeit würden nothwendige Aenderungen leiden.

Uebrigens müssen auch hier die unbestimmten Functionen, welche bei der Integration hinzukommen, nach den Umständen bestimmt werden, wie vorhin erwähnt ist.

170. Problem 30. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ jedes Punkts Functionen der Zeit $t$ sind, zu bestimmen, 1) ob und unter welchen Bedingungen eine solche Bewegung bestehen könne, wenn beschleunigende Kräfte auf das Fluidum wirken; 2) wie der Druck, den jedes Theilchen leidet, ausgedrückt werde.

Auflösung. Da $u$, $v$, $w$ blos von $t$ abhängen, so erhellt, daſs in jedem Augenblick alle Theilchen mit einerlei Geschwindigkeit nach parallelen Richtungen fortrücken: die Geschwindigkeit und Richtung ändert sich im Fortgange der Zeit; aber diese Aenderung ist bei allen Theilchen gleich; alle behalten daher unter einander einerlei Entfernungen, und die ganze Masse rückt so fort, wie ein fester Körper. Man kann daher sich den flüssigen Körper in ein Gefäſs eingeschlossen denken, mit welchem er ohne drehende Bewegung fortrückt.

Bei dieser Voraussetzung findet die erste Gleichung Statt, weil jedes ihrer Glieder $= 0$ ist; in der zweiten aber wird $U = \frac{du}{dt}$, $V = \frac{dv}{dt}$, $W = \frac{dw}{dt}$. Man hat daher

$$\frac{2g\,dp}{h} = 2g\,dS - dx \cdot \frac{du}{dt} - dy \cdot \frac{dv}{dt} - dz \cdot \frac{dw}{dt},$$

weil wir annehmen, dafs $Pdx + Qdy + Rdz$ für sich integrabel und $= dS$ sey. Die Integration gibt

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - \frac{xdu}{dt} - y\frac{dv}{dt} - z\frac{dw}{dt} + f : t.$$

weil $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ blos von $t$ abhängen, und daher hier als beständig angesehen werden.

171. Diese Bewegung ist also möglich, wenn die äufsern Kräfte so beschaffen sind, dafs sie einem festen Körper eine solche Bewegung mittheilen würden. Es lassen sich mannigfaltige Zusammensetzungen äufserer Kräfte denken, welche dieses zu bewirken im Stande sind, da man zu den Kräften, welche eine solche Bewegung hervorbringen können, immer noch zwei gleiche, nach entgegengesetzten Richtungen wirkende hinzusetzen darf. Wirkt eine dieser Kräfte vermittelst eines Kolbens auf den flüssigen Körper, so ändert sich der Druck $p$, wenn diese Kraft sich ändert, und es erhellt, dafs auch hier die Function $f : t$ im Ausdruck für $p$ vorkommen mufs.

172. Ist also der flüssige Körper in ein Gefäfs eingeschlossen, mit welchem er auf die im Problem angegebne Weise fortrückt, so bleibt er in Vergleichung des Gefäfses in Ruhe, und bewegt sich so, als ob er mit demselben einen festen Körper ausmachte. Gleichwohl kann der Druck, den jedes Theilchen des flüssigen Körpers, oder irgend eine Stelle der Wand des Gefäfses leidet, sehr veränderlich seyn, theils wenn der Werth von $S$ nicht allenthalben einerlei ist, theils weil die Werthe der folgenden Glieder sich ändern, indem der Körper fortrückt, theils weil der äufsere Druck vielleicht nicht immer derselbe bleibt. Indefs läfst sich für einen bestimmten Zeitpunkt der Werth von $p$ für jeden Punkt des flüssigen Körpers angeben, wenn man ihn für einen Punkt kennt.

173. Wenn also die Kräfte $P$, $Q$, $R$ so beschaffen sind, dafs die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ sich integriren

läfst, so kann die flüssige Masse jede fortrückende Bewegung annehmen, welche bei festen Körpern möglich ist, wenn man nur voraussetzt, dafs die Dichtigkeit unveränderlich sey. Ob aber eine Umdrehungsbewegung eben so wie bei festen Körpern Statt finden könne, erhellt hieraus nicht. Bei einem festen Körper, welcher sich um eine unveränderliche Axe dreht, sind die Geschwindigkeiten den Entfernungen von der Axe proportional, bei einem flüssigen Körper ist dieses nicht so schlechterdings nothwendig, weil die einzelnen Theilchen nicht in gleichen Zeiten ihre Umläufe zu vollenden brauchen. Diese Bewegungen werde ich im nächsten Abschnitt betrachten, hier aber noch einige Fälle untersuchen, wo die Bewegung von der Bewegung fester Körper gänzlich verschieden ist.

174. Problem 31. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u, v, w$ für jede Stelle des flüssigen Körpers und immer ein beständiges Verhältnifs behalten, die Bedingungen anzugeben, unter welchen eine solche Bewegung möglich ist, wenn beschleunigende Kräfte auf jedes Theilchen des flüssigen Körpers wirken.

Auflösung. Weil die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ ein beständiges Verhältnifs haben, so gehen alle Theilchen des flüssigen Körpers nach einerlei Richtung, aber mit veränderlicher Geschwindigkeit fort, und wir werden die Bedingungen, unter welchen eine solche Bewegung möglich sey, bestimmen. Es sey $\varkappa$ eine Function der veränderlichen Gröfsen $x$, $y$, $z$ und $t$, so geschieht der Voraussetzung Genüge, wenn $u = \alpha\varkappa$, $v = \beta\varkappa$, $w = \gamma\varkappa$, aber $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beständige Gröfsen sind.

Die erste Gleichung gibt hier, weil die Dichtigkeit des flüssigen Körpers unveränderlich ist,

$$\alpha \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \beta \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \gamma \left(\frac{d\varkappa}{dz}\right) = 0.$$

Es ist aber, wenn man $t$ als beständig betrachtet,

$$d\mathfrak{z} = dx \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\right) + dy \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + dz \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right), \text{ daher}$$

$$\alpha d\mathfrak{z} = -\beta dx \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) - \gamma dx \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) + \alpha dy \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + \alpha dz \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right),$$

$$\text{oder } d\mathfrak{z} = \left(dy - \frac{\beta dx}{\alpha}\right) \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + \left(dz - \frac{\gamma dx}{\alpha}\right) \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right),$$

welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn $\mathfrak{z}$ eine Function der beiden veränderlichen Gröſsen $\left(y - \frac{\beta x}{\alpha}\right)$ und $\left(z - \frac{\gamma x}{\alpha}\right)$, oder der Gröſsen $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ und $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)$ ist, auſserdem aber kann auch $t$ auf irgend eine, hier noch nicht näher bestimmte, Art in dem Werthe von $\mathfrak{z}$ vorkommen.

Daſs dieser Werth der richtige sey, erhellt leicht, denn wenn $\mathfrak{z}$ eine solche Function ist, so läſst sich ihr Differential durch

$$d\mathfrak{z} = L\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dy}{\beta}\right) + M\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dz}{\gamma}\right) + N dt$$

ausdrücken. Dann aber ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\right) = \frac{L+M}{\alpha}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) = -\frac{L}{\beta}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) = -\frac{M}{\gamma}, \text{ woraus}$$

$$\alpha\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) = 0 \text{ folgt.}$$

Zur Auflösung der zweiten Gleichung erhalten wir

$$U = \alpha^2 \mathfrak{z} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\right) + \alpha\beta\mathfrak{z} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + \alpha\gamma\mathfrak{z} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) + \alpha \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right),$$

welches $= \alpha \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)$ ist, weil die ersten drei Glieder zusammen $= 0$ sind, wegen der Gleichung

$$\alpha\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) = 0.$$

Eben so wird $V = \beta\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)$, $W = \gamma\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)$.

Die zweite Gleichung wird also

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right).$$

Da wir die Integrabilität der Formel $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ voraussetzen, so erfordert diese Gleichung nothwendig, daſs auch die Formel $(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)$ für sich integrabel sey, und dieses ist sie nur dann, wenn $\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)$ eine Function von $\alpha x + \beta y + \gamma z$ und von $t$ ist.

Diese Bedingung kann mit den vorhin für den Werth von $\varkappa$ gefundnen Bedingungen nur dann bestehen, wenn $\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)$ blos von $t$ abhängt, daher wir, in Rücksicht der vorigen Bestimmungen, erhalten

$$\varkappa = f : \left\{\left[\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right],\ \left[\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right]\right\} + \Gamma : t,$$

dann ist $\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) = \frac{d.(\Gamma : t)}{dt}$, welches ich $= \Gamma' : t$ setze, und

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - (\alpha x + \beta y + \gamma z) . \Gamma' : t + \Delta : t.$$

175. Das Theilchen des flüssigen Körpers, für welches am Ende der Zeit $= t$ die Coordinaten $x$, $y$ und $z$ sind, bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $= \varkappa . \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ und die Richtung seiner Bewegung ist gegen die drei Axen $OA$, $OB$, $OC$ unter Winkeln geneigt, deren Cosinus

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}},\ = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ und } \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

sind. Hieraus erhellt, daſs alle Theilchen nach parallelen Richtungen fortgehen, aber die Geschwindigkeit kann an verschiedenen Stellen und zu verschiedenen Zeiten ungleich seyn. Das allgemeine Gesetz für die Geschwindigkeit, daſs

$$\varkappa = f : \left[\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right],\ \left[\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right] + \Gamma : t$$

s. yn solle, läſst hier eine unendliche Menge verschiedener Fälle zu.

176. Nimmt man an, daſs $\Gamma : t = 0$ sey, oder daſs die Geschwindigkeit von der Zeit unabhängig in einem gegebnen Punkte immer einerlei bleibe, so ist auch $\left(\frac{ds}{dt}\right) = 0$, und die Gröſsen $U$, $V$, $W$ verschwinden.

Diese Bewegung scheint derjenigen sehr nahe ähnlich zu seyn, welche wir an den Flüssen beobachten. Wenn wir aber dann annehmen, daſs blos die Schwere auf den flüssigen Körper mit der Richtung der Ordinate $z$ parallel wirkt, so ist $P = 0$, $Q = 0$, $R = -1$, und folglich $S = -z$, also $p = b\,(a - z)$, wenn $a$ die beständige Gröſse bezeichnet. Der Druck verschwindet also in einer horizontalen Ebene in der Höhe $z = a$, und hängt überhaupt gar nicht von der Geschwindigkeit ab.

Die Bewegung läſst sich also hier wohl nicht anders denken, als horizontal, denn obgleich die Formeln wohl jede Richtung zulieſsen, und dann nur angäben, daſs der flüssige Körper sich in Tropfen zerstreut, wenn sich Theile desselben über die Höhe $z = a$ erhöben, so sieht man doch nicht, was für äuſsere Kräfte hier, wo das Fluidum nicht in ein Gefäſs eingeschlossen ist, eine solche Bewegung hervorbringen könnten: beschleunigende Kräfte aber können es nicht seyn, weil wir angenommen haben, daſs es deren auſser der Schwere keine geben solle. Das eben aufgelöste Problem läſst sich aber noch allgemeiner fassen.

177. Problem 32. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u, v, w$ folgende Werthe haben $u = \alpha s + \Gamma : t$, $v = \beta s + \Delta : t$, $w = \gamma s + \Sigma : t$, wo $s$ eine Function von $x$, $y$, $z$ bezeichnet, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ aber beständig sind; die Bedingungen anzugeben, unter welchen eine solche Bewegung bestehen kann, wenn beschleunigende Kräfte auf den flüssigen Körper wirken.

Auflösung. Die erste Gleichung für die Bewegung des flüssigen Körpers gibt hier wieder

$$x = f : \left\{ \left( \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right), \left( \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} \right) \right\},$$

und man kann $x$ als unabhängig von $t$ ansehen, weil jeder Geschwindigkeit schon außerdem eine unbestimmte Function von $t$ beigefügt ist. In der zweiten Gleichung aber erhalten wir $U = \Gamma' : t$, $V = \Delta' : t$, $W = \Sigma' ; t$, wenn hier und allemal $\frac{d . \Gamma : t}{dt}$ mit $\Gamma' : t$ bezeichnet wird. Daher wird das Integral der zweiten Gleichung, wenn wir

$Pdx + Qdy + Rdz = dS$ setzen*,

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - x . \Gamma' : t - y . \Delta' : t - z . \Sigma' : t + \Theta : t,$$

wo $\Theta : t$ die nach der Integration hinzukommende Function von $t$ bezeichnet.

178. Dieses Problem umfaſst viel mehrere Fälle, als das vorige, da nicht blos in demselben Punkte sich die Richtung der Bewegung im Fortgange der Zeit ändern kann, sondern auch in demselben Augenblicke die Richtung der Bewegung an verschiednen Stellen nicht einerlei zu seyn braucht. Denn für einen bestimmten Zeitpunkt haben die Functionen $\Gamma : t$, $\Delta : t$, $\Sigma : t$ zwar in jedem Punkte einerlei Werthe; aber Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung können dennoch sehr verschieden seyn, weil $x$ eine Function des Ortes ist, doch sind die Gröſsen $\frac{u}{\alpha} - \frac{v}{\beta}$, $\frac{u}{\alpha} - \frac{w}{\gamma}$ allenthalben einerlei.

179. Diese Bewegung ist aber immer noch von der Bewegung der Ströme sehr verschieden, denn wenn wir die Formeln auf diese anwenden wollten, so müſsten wir $u$, $v$, $w$ als von $t$ unabhängig annehmen, also statt der Functionen von $t$ beständige Gröſsen setzen. Dann aber erhalten wir wieder $p = b\,(a - z)$, wenn wir blos auf die Wirkung der Schwere Rücksicht nehmen und $S = -z$

setzen. Also würde auch hier der Druck in einer gewissen horizontalen Ebene $= 0$ werden, und man dürfte dem Fluido blos eine horizontale Bewegung zuschreiben, so daſs $\gamma = 0$ und $\Sigma : t = 0$ wäre. Es könnte also kein Abhang der Oberfläche, welcher doch bei den Flüssen etwas wesentliches ist, Statt finden. Indeſs ist die hier vorgeschriebene Bewegung etwa das, was ein horizontal fortströmender Fluſs seyn würde, dessen Bewegung, wenn sie einmal bestände, wegen der Trägheit fortdauern würde, wofern nämlich die Bewegung gar keinen Widerstand leidet.

Da bei der horizontalen Bewegung $\gamma = 0$ ist, so würde

$$s = f : \left\{ z, \left( \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right) \right\},$$

der Druck aber an jeder Stelle eben so groſs seyn, als wenn der flüssige Körper ruhte. Der Werth von $s$ zeigt, daſs in einer bestimmten horizontalen Ebene die Geschwindigkeit in allen den Punkten einerlei sey, für welche $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ einerlei Werth hat, das heiſst, wenn man in dieser horizontalen Ebene Linien zieht, die gegen die Axe der $x$ unter einem Winkel geneigt sind, dessen Tangente $= \frac{\beta}{\alpha}$ ist, so werden alle Theilchen, die in derselben Linie liegen, sich auf einerlei Art bewegen. Aber sie bewegen sich nicht nach der Richtung dieser Linie, weil $u = \alpha s + m$ und $v = \beta s + n$ ist, also die Richtung der Bewegung nur dann mit jener Linie übereinstimmt, wenn $m : n = \alpha : \beta$, und $m, n$ bezeichnen hier beständige Gröſsen, die statt der Functionen $\Gamma : t$ und $\Delta : t$ gesetzt worden.

Findet das eben angegebene Verhältniſs nicht Statt, so rückt das Theilchen aus einer jener Linien in die andre über, und ändert nun seine Geschwindigkeit und Richtung. Man könnte den Weg, welchen jedes Theilchen in dieser horizontalen Ebene nimmt, verfolgen, denn man hat $dx = (\alpha s + m)\, dt$ und $dy = (\beta s + n)\, dt$, wenn $x, y$ die

Coordinaten dieses Weges sind, und wenn man hier $dt$ eliminirt, so gibt die Integration

$$nx - my + F:(\beta x - \alpha y) = \text{Const.},$$

weil $s$ als Function von $\beta x - \alpha y$ angesehen wird, da $z$ unveränderlich ist. Diese Gleichung würde die Linie bestimmen, in welcher irgend ein Theilchen des Flüssigen fortgeht.

179 *b*). Wollte man diese Probleme mit mehr Genauigkeit auf die Ströme anwenden, so müſste man auch darauf Rücksicht nehmen, daſs das Wasser allemal bei seiner Bewegung einigen Widerstand findet, und daher auſser der Schwere auch dieser, als eine, der Richtung der Bewegung gerade entgegenwirkende beschleunigende Kraft, in Betrachtung gezogen werden muſs. Es scheint aber nicht, daſs diese Untersuchung selbst dann zu befriedigenden Resultaten führt. Auch lassen sich so mannigfaltige Voraussetzungen für den Werth von $u$, $v$, $w$ erdenken, bei denen immer die Bewegung möglich ist, daſs man sich eben nicht wundern darf, wenn diese hier ganz willkürlich angenommene nicht gerade diejenige ist, welche in der Natur bei der Bewegung der Ströme Statt findet: wir werden in der Folge eine Methode kennen lernen, nach welcher sich aus der Kenntniſs andrer Umstände, nämlich aus der Figur des Bodens und der freien Oberfläche einige nähere Bestimmungen für solche Bewegungen herleiten lassen.

# Vierter Abschnitt.

## Von der Umdrehungsbewegung flüssiger Körper, deren Dichtigkeit unveränderlich ist.

---

180. Problem 33. Ein flüssiger Körper drehet sich um eine feste Axe $OC$ (Fig. 28.), und zwar so, daſs die Bewegung jedes Theilchens gleichförmig und seine Geschwindigkeit einer gewissen Function des Abstandes von jener Axe proportional ist: man soll bestimmen, ob eine solche Bewegung bestehen könne.

Auflösung. Man betrachte ein Theilchen $Z$, dessen Lage durch die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt ist; die Umdrehungsaxe sey den Ordinaten $z$ parallel, so ist der Abstand dieses Theilchens von der Axe $= VZ = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, und dieser Abstand bleibt während der Bewegung ungeändert. Da nun $Z$ sich in einer auf die Axe senkrechten Ebene bewegt, so ist die mit dieser Axe parallele Geschwindigkeit $w = 0$, die Geschwindigkeiten $u$ und $v$ aber sind so beschaffen, daſs der Werth von $\sqrt{(x^2+y^2)}$ ungeändert bleibt, indem sich $x$ und $y$, während der Zeit $dt$, um $u\,dt$ und $v\,dt$ ändern: man hat also

$$d.\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0,$$

das ist, weil $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $ux + vy = 0$.

Man setze $u = Ty$, $v = -Tx$, so wird die Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen $Z$ fortrückt, $= T : \sqrt{(x^2 + y^2)}$, und es muſs, der Voraussetzung dieses Problems gemäſs, auch $T$ eine Function von $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ seyn, welche durch $T = \Gamma : \frac{x^2 + y^2}{2}$ bezeichnet werden mag, der schon bekannten Bezeichnung gemäſs, daſs wir

$\frac{d.\Gamma:x}{dx} = \Gamma':x$ setzen, ist also hier $\left(\frac{dT}{dx}\right) = x.\Gamma':\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ und $\left(\frac{dT}{dy}\right) = y.\Gamma':\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$; aber $\left(\frac{dT}{dz}\right)$ und $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ sind $= 0$. Es ist nun zu bestimmen, ob eine solche Bewegung bestehen könne, oder diejenigen Bedingungen erfülle, welche die zwei Hauptgleichungen (§. 159.) fordern. Die erste dieser Gleichungen gibt $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, und wird hier erfüllt, da $\left(\frac{du}{dx}\right) = y\left(\frac{dT}{dx}\right) = xy.\Gamma':\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$, und

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = -x\left(\frac{dT}{dy}\right) = -xy.\Gamma':\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \text{ ist.}$$

Für die zweite erhalten wir, wenn wir $\Gamma':\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = L$ setzen, folgendes. Da $\left(\frac{du}{dx}\right) = Lxy$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = T + Ly^2$, $\left(\frac{dv}{dx}\right) = -T - Lx^2$, $\left(\frac{dv}{dy}\right) = -Lxy$, so wird

$$U = LTxy^2 - Tx(T + Ly^2) = -T^2x,$$
$$V = -Ty.(T + Lx^2) + Tx.Lxy = -T^2y,$$

$W = 0$, folglich $Udx + Vdy = -T^2(xdx + ydy)$, welches sich integriren läſst, weil $T$ eine Function von $(x^2+y^2)$ ist. Die zweite Gleichung ist also integrabel, wenn die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ es ist, welches wir immer voraussetzen. Diese Formel sey $= dS$, so wird das Integral der zweiten Gleichung

$$\frac{2gp}{b} = 2gS + \int T^2(xdx + ydy) + f:t.$$

Eine solche Bewegung ist also möglich, und es ist daher der Mühe werth, sie genauer zu untersuchen.

Es sey die Entfernung von der Axe $ZV = \sqrt{(x^2+y^2)} = s$, und das Integral $\int T^2(xdx+ydy) = \int T^2.sds$ sey $= \Gamma:s$, so ist $T^2 = \frac{\Gamma':s}{s}$, und die Geschwindigkeit, mit welcher

das Theilchen $Z$, dessen Entfernung von der Axe $= s$ ist, fortrückt, $= Ts = \sqrt{s.\Gamma':s}$. Der Druck aber wird

$$p = bS + \frac{b}{2g}.\Gamma; s + f:t.$$

181. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Theilchens $Z$ mit $\Delta : s$, so wird $\Gamma' : s = \frac{(\Delta : s)^2}{s}$, und der Druck

$$p = bS + \frac{b}{2g}\int \frac{ds.(\Delta : s)^2}{s} + f:t.$$

Wenn also die Geschwindigkeit sich verhielte, wie die $n$te Potenz der Entfernung von der Axe, oder $\Delta : s = \alpha s^n$ wäre, so wird $p = bS + \frac{\alpha^2 b . s^{2n}}{4ng} + f:t$, dagegen würde für eine allenthalben gleiche Geschwindigkeit $= \alpha$

$$p = bS + \frac{\alpha^2 b}{2g}.\log. s + f:t.$$

182. Warum in das vollständige Integral eine unbestimmte Function von $t$ gesetzt werden mufs, ist schon mehrmals erwähnt, und es erhellet, dafs man sie weglassen oder eine den Umständen angemessene beständige Gröfse dafür setzen mufs, wenn keine Aenderung der äufsern Kräfte, die auf den flüssigen Körper wirken, Statt findet.

183. Unsre allgemeine Betrachtung zeigt, dafs, wie man auch diese wirbelnde Bewegung fingirt, dieselbe durch die beschleunigenden Kräfte $P$, $Q$, $R$ nicht gehindert werde, wenn nur die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ sich integriren läfst; es kann nämlich durch äufsere Kräfte allemal eine solche Bewegung bewirkt werden.

184. Weil die ganze flüssige Masse sich so um die feste Axe $OC$ dreht, dafs jedes Theilchen seine Entfernung von dieser Axe nicht ändert, so kann man sich die ganze Masse als in ein rundes Gefäfs eingeschlossen denken, des-

sen Axe $OC$ ist. Die Figur dieses Gefäfses hat auf die Bewegung keinen Einflufs, wenn nur alle auf $OC$ senkrechte Querschnitte desselben Kreise sind.

185. Wir wollen annehmen, dafs keine andre beschleunigende Kraft, als die Schwere auf den flüssigen Körper wirke, und dafs die Richtung dieser der Axe $OC$ parallel sey. Unter dieser Voraussetzung wird

$$p = b\,(h - z) + \frac{b}{2g}\int\frac{ds\,.\,(\Delta : s)^2}{s} + f : t,$$

wenn in der Entfernung $= s$ von der Axe die Geschwindigkeit $= \Delta : s$ ist, und $h$ eine beständige Gröfse bedeutet. Wir können die Voraussetzung hinzufügen, dafs die äufsern Kräfte ungeändert bleiben, also $f : t$ aus der Formel wegfällt. Es stelle nun $EEFF$ (Fig. 29.) den Verticaldurchschnitt durch die Axe des Gefäfses vor, und $GHG$ sey die freie Oberfläche, in welcher der Druck verschwindet, so wird, für die Entfernung $OP = s$ von der Axe, die Höhe

$$PM = z = h + \frac{1}{2g}\int\frac{ds\,.\,(\Delta : s)^2}{s},$$

welche Gleichung die Gestalt der freien Oberfläche bestimmt.

Es sey in der Entfernung $= s$ von der Axe die Geschwindigkeit $= \alpha s^n$, so wird $PM = h + \frac{\alpha^2\,.\,s^{2n}}{4gn}$, also, wenn $n$ eine positive Zahl ist, die Oberfläche gegen die Mitte zu hohl, und in der Axe selbst die Höhe am kleinsten $= h$.

Wäre $n$ negativ, so würde die Oberfläche in der Mitte unendlich eingedrückt seyn, oder um die Axe würde ein leerer Raum entstehen.

Die Voraussetzung $n = 1$, wo alle Theilchen in einerlei Zeit einen Umlauf vollenden, gibt für die Oberfläche die Gleichung $z = h + \frac{\alpha^2\,s^2}{4g}$, welche einer Parabel zuge-

hört, deren Axe $HC$ ist, und deren Parameter $= \frac{4g}{\alpha\alpha}$: der Scheitel dieser Parabel liegt in $H$. Für den Druck in irgend einem Punkte $Z$ erhält man in diesem Falle

$$p = b\,(h - z) + \frac{b\,\alpha^2 s^2}{4g},$$

und es erhellt, daſs der Druck, welchen das Gefäſs leidet, nicht blos von der Tiefe unter der Oberfläche abhängt, sondern desto gröſser ist, je gröſser der Halbmesser des Gefäſses an dieser Stelle ist.

In den Fällen, wo $n = 0$ oder negativ ist, tritt die Schwierigkeit ein, daſs die sehr nahe an der Axe liegenden Theilchen ihre Umläufe in unendlich kurzer Zeit vollenden müſsten; aber diese Unbequemlichkeit hebt sich von selbst, weil um die Axe sich ein leerer Raum bildet. Wir wollen, um einen solchen Fall zu betrachten, $n = -\frac{1}{2}$ (Fig. 30.) setzen, also in der Entfernung $= s$ von der Axe die Geschwindigkeit $= \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$, so wird der Druck

$$p = b\,(h - z) - \frac{\alpha^2 b}{2gs},$$

woraus für die freie Oberfläche die Gleichung

$$s = \frac{\alpha^2}{2g\,(h - z)} \text{ folgt.}$$

Nimmt man also $OH = h$, so wird der leere Raum um die Axe durch Hyperbeln begränzt, für welche $HP \cdot PM = \frac{\alpha^2}{2g}$ ist. Um die Axe bildet sich also ein Schlund, und in $GMI$ ist der Druck $= 0$, hingegen wird in irgend einem andern Punkte $Z$ der Druck

$$p = b\,(h - z) - \frac{\alpha^2 b}{2gs} = b \cdot HP - \frac{\alpha^2 b}{2g \cdot PZ},$$

$$\text{oder } p = \frac{\alpha^2 b}{2g}\left[\frac{1}{PM} - \frac{1}{PZ}\right] = \frac{\alpha^2 b \cdot MZ}{2g \cdot PM \cdot PZ}.$$

Solche Bewegungen, wie die hier betrachteten, können wirklich in der Natur Statt finden, und es gehören die kleinen Wirbel, die man da bemerkt, wo das Wasser an einem festen Gegenstande, z. B. an Brückenpfeilern vorbeifliefst, hieher, obgleich sich da eine fortrückende Bewegung mit der Bewegung um eine Axe verbindet. Bei diesen Wirbeln ist gewöhnlich die Geschwindigkeit der von der Axe entferntern Theile gröfser, als die Geschwindigkeit derjenigen, welche ihr näher liegen; man bemerkt daher, dafs ihre Oberfläche in der Mitte ausgehölt ist, ohne doch einen Schlund zu bilden.

Bei den Strudeln im Meere hingegen mufs vermuthlich die Bewegung so beschaffen seyn, dafs die Geschwindigkeit der von der Axe entferntern Theile geringer ist, oder auch dafs alle sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

186. Der flüssige Körper sey wieder blos der beschleunigenden Kraft der Schwere unterworfen, aber die Umdrehungsaxe sey jetzt nicht vertical, sondern horizontal, und die Schwere wirke den Ordinaten $x$ parallel, dafs also $P = 1$, $Q = 0 = R$, folglich $S = x$ sey. In der Entfernung $= s$ von der Axe sey die Geschwindigkeit $= \Delta : s$, so wird $p = bx + \frac{b}{2g} \int \frac{ds\,.\,(\Delta : s)^2}{s}$, wenn die äufsern Kräfte unveränderlich sind. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wo die Geschwindigkeit $= \alpha s$ ist, wo also $p = b\,(x - h) + \frac{\alpha^2 b s^2}{4g}$ ist, wenn $h$ eine unbestimmte beständige Gröfse bedeutet. In der Figur sey die Axe des Gefäfses $EFGH$ (Fig. 31.) horizontal, die gerade Linie $OA$ vertical: man nehme an, dafs $OA = h$ sey, so wird für einen in der Verticalebene liegenden Punkt $N$, dessen Entfernung von der Axe $= s = PN$ ist, der Druck $p = b \left[\frac{\alpha^2}{4g} \,.\, PN^2 - QN\right]$; für den Punkt $M$ aber, wohin $N$ nach einem halben Umlaufe kommt, wird

$$p = b\left[\frac{\alpha^2}{4g}.PM^2 - QM\right].$$

Dasselbe Theilchen des flüssigen Körpers leidet also während der Bewegung einen sehr ungleichen Druck, der selbst in gewissen Fällen negativ werden könnte. Da der Druck mit $x$ zugleich wächst, und die Ordinaten $x$ niederwärts gerichtet sind, so ist der Druck für irgend ein Theilchen am kleinsten, wenn es sich senkrecht über der Axe befindet, und der Druck wird also für dieses Theilchen nie negativ, wenn er es hier nicht ist; zugleich nimmt der Druck mit dem Abstande von der Axe in gröfserm Verhältnisse zu, als bei Vergröfserung des Werths von $x$. Man übersieht daher leicht, dafs der Druck in keinem Punkte, der weiter als $M$ von der Axe liegt, negativ seyn kann, wenn er es in $M$ nicht ist. Der Druck sey in $M = o$, und $PM = k$, so ist $h + k = \frac{\alpha^2 k^2}{4g}$, und der Druck kann nirgends verschwinden, wenn man einen festen Cylinder, dessen Halbmesser $= k$ ist, in das Gefäfs einsetzt. Wenn also ein solcher Punkt $M$ bekannt ist, wo der Druck $= o$ wird, so ist die beständige Gröfse $h$ hiedurch bestimmt.

Für $\Delta : s = \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$, oder $n = -\frac{1}{2}$ wird

$$p = b(x + h) - \frac{\alpha^2 b}{2gs},$$

wo die beständige Gröfse $h$ das Zeichen $+$ haben mufs, wenn der Druck nicht für alle oberhalb der Axe liegenden Punkte negativ werden soll; denn $x$ wird von der Umdrehungsaxe angerechnet. Aber selbst dann verschwindet der Druck für Punkte, die in der durch die Axe gelegten Verticalebene oberhalb derselben liegen, wenn $x = -k$ und $h - k - \frac{\alpha^2}{2gk} = o$ wird, und die Gleichung

$$k = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{\alpha^2}{2g}\right)}$$

gibt die beiden Gränzen des Werthes von $x$ an, jenseits welcher der Druck negativ wird. Man sieht aus dieser Gleichung, dafs um die Axe des Gefäfses ein Cylinder vom Halbmesser $\frac{1}{2}h - \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{\alpha^2}{2g}\right)}$ eingesetzt werden, ferner aber der Halbmesser des Gefäfses nicht gröfser, als $= \frac{1}{2}h + \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{\alpha^2}{2g}\right)}$ seyn mufs, und dafs endlich $h^2 > \frac{2\alpha^2}{g}$ mufs angenommen werden, wenn der Druck nirgends negativ werden soll. Uebrigens würde eine solche Bewegung bestehen können, wenn sie einmal in Gang gesetzt wäre, und man die Hindernisse, welche wegen der Reibung am Gefäfse Statt finden, nicht in Betrachtung zieht.

186 *b*). Die beständige Gröfse $h$ ist immer bestimmt, wenn für irgend einen Punkt der Druck bekannt ist. Es sey z. B. in dem zuletzt betrachteten Falle in der Entfernung $= l$ vertical oberhalb der Axe der Druck $= \mathfrak{P}$, so hat man, weil $x = -l$ ist, und $s = l$

$$\mathfrak{P} = b(h - l) - \frac{\alpha^2 b}{2gl}, \text{ also } h = \frac{\mathfrak{P}}{b} + l + \frac{\alpha^2}{2gl},$$

und man findet nun die Entfernung $= k$, wo oberhalb der Axe der Druck verschwindet, durch $\mathfrak{P}$ und $l$ ausgedrückt.

Da der Druck in Punkten, welche vertical oberhalb der Axe liegen, verschwindet, sowohl wenn die Entfernung von der Axe $s = k = \frac{1}{2}h + \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{\alpha^2}{2g}\right)}$ ist, als wenn $k = \frac{1}{2}h - \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{\alpha^2}{2g}\right)}$, so mufs der Druck in einem Punkte, dessen Entfernung zwischen diese beiden fällt, am gröfsten werden. Für diese Entfernung, welcher, gerade oberhalb der Axe, der gröfste Druck entspricht, findet man $s = \frac{\alpha}{\sqrt{2g}}$, und hier wird $p = h - \alpha\sqrt{\frac{2}{g}}$,

wenn also $h^2 < \frac{2\alpha^2}{g}$ wäre, so könnte in keinem Punkte oberhalb der Axe der Druck positiv seyn, folglich die Continuität des Fluidi nicht bestehen.

Man kann auch die Figur derjenigen Schichten bestimmen, in welchen der Druck gleich groſs ist. Wenn z. B. bei der horizontalen Lage der Umdrehungsaxe die Geschwindigkeit $= \alpha s$ ist, so hat man $dp = b\,dx + \frac{\alpha^2 b s\,ds}{2g}$, oder wenn man horizontale Ordinaten $= y$ annimmt, und allgemein $s^2 = x^2 + y^2$ setzt,

$$dp = b\,dx\left(1 + \frac{\alpha^2 x}{2g}\right) + \frac{\alpha^2 b y\,dy}{2g}.$$

Soll nun hier $dx$, $dy$ so angenommen werden, daſs $p$ ungeändert bleibt, oder die Lage des durch $x$, $y$ bestimmten Punktes so geändert werden, daſs er auf derjenigen Linie bleibt, wo der Druck gleich groſs ist, so erhält man

$$dx\left(1 + \frac{\alpha^2 x}{2g}\right) + dy.\frac{\alpha^2 y}{2g} = 0$$

als Gleichung für diese Linie, folglich

$$x + \frac{\alpha^2 (x^2 + y^2)}{4g} = \text{Const.}$$

Gesetzt, derjenige Punkt in dieser Linie, für welchen $y = 0$ ist, sey um die Höhe $= l$ oberhalb der Axe, oder mit $y = 0$ gehöre $x = -l$ zusammen, so ist

$$\text{Const.} = -l + \frac{\alpha^2 l^2}{4g},\ \text{und allgemein}$$

$$y^2 = -\frac{4g(l+x)}{\alpha^2} + l^2 - x^2,$$

oder, wenn man den Anfangspunkt der $x$ verändert, und $x + \frac{2g}{\alpha^2} = X$ setzt, $y^2 = \left(l - \frac{2g}{\alpha^2}\right)^2 - X^2$. Dieses ist eine Gleichung für einen Kreis, dessen Mittelpunkt um die Höhe

$= \frac{2g}{\alpha^2}$ oberhalb der Axe liegt, und dessen Halbmesser $= l - \frac{2g}{\alpha^2}$ ist.

Eben so könnte man für andre Werthe von $n$, oder bei andern Voraussetzungen für die Geschwindigkeit verfahren, wo aber die Rechnung meistens schwieriger werden möchte.

187. Wirkten gar keine beschleunigenden Kräfte auf den flüssigen Körper, oder würde $S = 0$, so hätte man aus den vorigen Formeln

$$p = bh + \frac{b}{2g} \int \frac{ds}{s} \cdot (\Delta : s)^2,$$

wenn man annimmt, daſs kein veränderlicher Druck von auſsen Statt findet.

Dieser Ausdruck gibt, wenn $\Delta : s = \alpha s^n$ ist,

$$p = bh + \frac{b}{4g} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot s^{2n}}{n},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha, \quad p = bh + \frac{b\alpha^2 \log. s}{2g},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha \cdot s^{-m}, \quad p = bh - \frac{b\alpha^2}{4gm \cdot s^{2m}}.$$

Nimmt man hier an, daſs in einer gewissen Entfernung $= l$ von der Axe der Druck $= \mathfrak{P}$ werden solle, so erhält man in den drei angeführten Fällen folgende Werthe für die unbestimmte beständige Gröſse $h$:

$$\text{für } \Delta : s = \alpha s^n, \quad h = \frac{\mathfrak{P}}{b} - \frac{\alpha^2 l^{2n}}{4gn},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha, \quad h = \frac{\mathfrak{P}}{b} - \frac{\alpha^2 \log. l}{2g},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha s^{-m}, \quad h = \frac{\mathfrak{P}}{b} + \frac{\alpha^2}{4gm \cdot l^{2m}}.$$

Der Druck wird also in diesen Fällen

im ersten Falle $p = \mathfrak{P} + \frac{b\,\alpha^2}{4gn}(s^{2n} - l^{2n})$,

im zweiten Falle $p = \mathfrak{P} + \frac{b\,\alpha^2}{2g}.\log.\frac{s}{l}$,

im dritten Falle $p = \mathfrak{P} + \frac{b\,\alpha^2}{4gm}\left(\frac{s^{2m} - l^{2m}}{s^{2m}.l^{2m}}\right)$.

Wird $\mathfrak{P} = o$, oder ist $l$ diejenige Entfernung von der Axe, wo der Druck verschwindet, so ist in allen drei Fällen der Druck negativ in Punkten, deren Entfernung von der Axe kleiner als $= l$ ist, und der Druck wächst mit dem Abstande von der Axe.

Im ersten Falle könnte man für $\mathfrak{P}$ auch den in der Axe selbst Statt findenden Druck annehmen, und folglich $l = o$ setzen; in den beiden andern Fällen geht dieses aber nicht an, weil sonst für jeden Werth von $s$, $p =$ unendlich würde. Hieraus läfst sich schliefsen, dafs wenn eine solche Bewegung bestehen soll, wie die beiden letzten Voraussetzungen fordern, ein Raum um die Axe leer seyn müsse: ist der Halbmesser dieses leeren Raums (in welchen allenfalls ein fester Cylinder eingesetzt seyn könnte) $= k$, und der Druck an seiner Oberfläche $= o$, hingegen in der Entfernung $= l$ der Druck $= \mathfrak{P}$, so hat man für $\Delta : s = \alpha$ die Gleichung $\mathfrak{P} = \frac{b\,\alpha^2}{2g}\log.\frac{l}{k}$, also $\alpha = \sqrt{\frac{2g\mathfrak{P}}{b\log.\frac{l}{k}}}$,

und nur bei dieser bestimmten Geschwindigkeit kann jene doppelte Voraussetzung wahr seyn. — — Für die beiden andern Fälle würde man ähnliche Bestimmungen der Geschwindigkeit erhalten, wenn man $p$ in zwei verschiedenen Punkten als gegeben annähme. Setzte man voraus, $p$ solle in zwei verschiedenen Entfernungen von der Axe verschwinden, so müfste nothwendig $\alpha = o$ seyn, oder gar keine Bewegung Statt finden, und $p$ würde überall $= o$ den Gesetzen des Gleichgewichts gemäfs.

Wäre in dieses Fluidum ein sehr kleiner Körper in der Entfernung $= s$ von der Axe eingetaucht, so würde derselbe mit der Kraft $= \frac{dp}{ds}$ gegen die Axe zu getrieben, und diese Kraft wäre

$$\text{für } \Delta : s = \alpha s^n \text{ die Kraft } = \frac{b\,\alpha^2}{2g} \,.\, s^{2n-1},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha \quad \text{die Kraft } = \frac{b\,\alpha^2}{2gs},$$

$$\text{für } \Delta : s = \alpha s^{-m} \text{ die Kraft } = \frac{\alpha^2 b}{2g \,.\, s^{2m+1}}.$$

188. **Problem 34.** Wenn ein flüssiger Körper sich um eine feste Axe dreht, oder wenn die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ jedes Punkts den Formeln $\alpha y - \beta z$, $\gamma z - \alpha x$, $\beta x - \gamma y$ proportional sind, die Bedingungen anzugeben, unter welchen eine solche Bewegung bestehen kann, wenn beschleunigende Kräfte auf den flüssigen Körper wirken.

Auflös. Es sey $u = T(\alpha y - \beta z)$, $v = T(\gamma z - \alpha x)$, $w = T(\beta x - \gamma y)$, so wird

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\alpha T + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) = \beta T + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dx}\right);$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \alpha T + (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right) = -\gamma T + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dy}\right);$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = -\beta T + (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \gamma T + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right);$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dt}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dt}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dt}\right);$$

die Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$ erhält also hier die Form $(\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right) + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right) + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right) = 0$, und dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn $T$ eine Function der beiden Gröſsen $(\gamma x + \beta y + \alpha z)$ und $x^2 + y^2 + z^2$ ist. Denn wenn man

$$dT = M(\gamma dx + \beta dy + \alpha dz) + N(x dx + y dy + z dz)$$

setzt, so wird

$$\left(\frac{dT}{dx}\right) = M\gamma + Nx, \quad \left(\frac{dT}{dy}\right) = M\beta + Ny, \quad \left(\frac{dT}{dz}\right) = \alpha M + Nz,$$

und wenn man diese Werthe in jene Gleichung setzt, so wird sie $= 0$.

Für die zweite Gleichung erhalten wir, wenn $T$ von $t$ unabhängig ist,

$$U = T^2(\alpha\gamma z + \beta\gamma y - \alpha^2 x - \beta^2 x),$$
$$V = T^2(\beta\gamma x + \alpha\beta z - (\alpha^2 + \gamma^2)y),$$
$$W = T^2(\alpha\beta y + \alpha\gamma x - (\beta^2 + \gamma^2)z),$$

daher $U dx + V dy + W dz = T^2 . d . [\alpha\gamma xz + \beta\gamma xy + \alpha\beta yz$
$- \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2)y^2 - (\beta^2 + \gamma^2)z^2]$
$= \frac{T^2}{2} . d . [-(\alpha y - \beta z)^2 - (\alpha x - \gamma z)^2 - \beta x - \gamma y)^2],$

und da diese Formel für sich integrabel seyn mufs, so mufs $T$ eine Function von $[(\alpha y - \beta z)^2 + (\alpha x - \gamma z)^2 + (\beta x - \gamma y)^2]$ seyn, welches mit der aus der ersten Gleichung hergeleiteten allgemeinern Bestimmung bestehen kann, weil

$$(\alpha y - \beta z)^2 + (\alpha x - \gamma z)^2 + (\beta x - \gamma y)^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\gamma x + \beta y + \alpha z)^2.$$

Setzt man also

$$(\alpha y - \beta z)^2 + (\gamma z - \alpha x)^2 + (\beta x - \gamma y)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) . s^2,$$

so mufs $T$ eine Function von $s$ seyn, und alsdann gibt die zweite Gleichung

$$\frac{2gp}{b} = 2gS + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \int T^2 s\, ds + f:t,$$

wenn $S = \int (P dx + Q dy + R dz)$ ist.

189. Die Geschwindigkeit des Theilchens $Z$ ist
$= \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)} = Ts . \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$,
daher werden $s$ und $T$ Functionen der wirklichen Geschwindigkeit jedes Theilchens; aber $s$ ist dem Abstande des Theilchens von der Umdrehungsaxe gleich; also ist $T$ eine Function dieses Abstandes, und mithin die Geschwindigkeit ebenfalls eine Function desselben.

190. Dieser Fall ist also mit dem des vorigen Problems einerlei, da auch hier der flüssige Körper sich um eine feste Axe dreht, und jedes Theilchens Geschwindigkeit gleichförmig und einer Function seines Abstandes von der Axe proportional ist. Nur die Art der Entwickelung gab den Formeln den Schein einer gröfsern Allgemeinheit, weil wir die Lage der Axe als unbestimmt annahmen, vorhin aber voraussetzten, sie sey einer der Ordinaten parallel.

## Fünfter Abschnitt.

### *Von denjenigen Fällen der Bewegung flüssiger Körper, wo die Formel* udx + vdy + wdz *integrabel ist.*

---

191. Bei den bisherigen Untersuchungen über die Bewegung flüssiger Körper von unveränderlicher Dichtigkeit fingen wir immer damit an, daſs wir zuerst der Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$ Genüge zu thun suchten, und dann die Fälle bestimmten, wo auch die zweite Bedingung, daſs $Udx + Vdy + Wdz$ ein vollständiges Differential werde, erfüllt würde; man könnte nun versuchen, umgekehrt unter den Fällen, welche der letzten Bedingung entsprechen, diejenigen zu bestimmen, welche der ersten Gleichung angemessen sind. Da aber eine allgemeine Auflösung der zweiten Forderung nicht bekannt ist, so werden wir die folgenden Betrachtungen auf den Fall beschränken, wo $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential ist. Dieses findet, auſser in vielen andern Fällen, auch bei der Bewegung flüssiger Körper in engen Röhren Statt, und die hierauf gebauten Schlüsse leiden selbst auf flüssige Körper, deren Dichtigkeit veränderlich ist, Anwendung.

192. Problem 35. Wenn die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ solche Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$ sind, daſs sich die Formel $udx + vdy + wdz$ integriren läſst, die Gleichung anzugeben, welche den Druck des flüssigen Körpers bestimmt.

Auflösung. Da die Gröſsen $u$, $v$, $w$ auch von $t$ abhängen, so muſs man bei der verlangten Integrabilität der Formel $udx + vdy + wdz$ die Gröſse $t$ als unveränderlich betrachten. Das vollständige Integral dieser Formel sey $= I$, so wird das Differential von $I$, wenn man auch $t$ als veränderlich betrachtet, folgende Form haben:

$$dI = udx + vdy + wdz + \varphi dt.$$

Wegen der vorausgesetzten Integrabilität dieser Formel hat man $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{dw}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)$, daher kann man $U$ jetzt auf folgende Weise ausdrücken:

$$U = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

und aus ähnlichem Grunde

$$V = u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

$$W = u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

Da nun in der Gleichung

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz,$$

wo $S$ die Wirkung der beschleunigenden Kräfte bezeichnet, oder $= \int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ ist, die Zeit $t$ als beständig angenommen wird, so ist hier

$$du = dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right),$$

und eben das gilt für die übrigen Gröfsen. Man sieht daher leicht, dafs $U\,dx + V\,dy + W\,dz = u\,du + v\,dv + w\,dw + d\varphi$ ist, und dafs man erhält

$$2g\int\frac{dp}{q} = 2gS - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \varphi + f:t.$$

Diese Gleichung ist möglich, wenn $q$ blos eine Function von $p$ ist, in andern Fällen aber, wo die Dichtigkeit nicht blos vom Drucke abhängt, ist sie nur dann möglich, wenn $q$ eine Function der Gröfsen $p$ und

$$2gS - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \varphi \text{ ist.}$$

193. Da die Geschwindigkeit des Theilchens $= \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}$ ist, so sieht man, dafs bei dieser Voraussetzung der Druck desto mehr abnimmt, je schneller die Bewegung ist, weil in dem Ausdrucke für $p$ ein negatives,

dem Quadrate dieser Geschwindigkeit proportionales Glied vorkommt.

Die Gröſse $\varphi$ kommt in sofern in dem Werthe von $p$ vor, als die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ auch von der Zeit abhängen; bleibt die Geschwindigkeit an derselben Stelle immerfort unveränderlich, so kommt $\varphi$ nicht vor.

Die unbestimmte Function der Zeit endlich $f:t$ bezeichnet blos die veränderlichen äuſsern Kräfte, welche auf die ganze flüssige Masse wirken: sie muſs den Umständen gemäſs bestimmt werden; in der Bewegung aber bringt sie keine Aenderung hervor.

194. Die bei diesem Probleme zum Grunde gelegte Voraussetzung umfaſst beinahe alle diejenigen Bewegungen flüssiger Körper, mit deren Untersuchung man sich bisher beschäftigt hat. Man könnte daher glauben, daſs sie durchaus nothwendig bei der Bewegung flüssiger Körper Statt finden müsse, wenn nicht schon im Vorigen einige Fälle vorkämen, wo dieser Bedingung nicht Genüge geschah.

Man darf sich z. B. nur des im 33. Problem betrachteten Falles erinnern, wo $u = Ty$, $v = -Tx$ und $w = 0$ war. Unsrer jetzigen Voraussetzung zu Folge sollte hier $u\,dx + v\,dy$, oder $T(y\,dx - x\,dy)$ sich integriren lassen. Diese Formel aber, welche man auch durch $Ty^2 . d . \frac{x}{y}$ ausdrücken kann, läſst sich nur integriren, wenn $Ty^2 = f : \frac{x}{y}$ ist, und diese Bedingung besteht mit der oben gefundenen $T = F : (x^2 + y^2)$ nur dann, wenn $T = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ist, wo $Ty^2 = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$ wird, welches mit der Forderung $Ty^2 = f : \frac{x}{y}$ übereinkommt.

Wir haben aber vorhin gesehen, daſs die Bewegung immer möglich ist, wenn $T$ auch irgend eine andre Function von $(x^2 + y^2)$ bedeutet, und daſs sie folglich auch dann bestehen kann, wenn die Formel $udx + vdy + wdz$ kein vollständiges Integral ist. Die vorige allgemeine Auflösung zeigte, daſs die Bewegung immer bestehen könne, wenn die Geschwindigkeit irgend eine Function des Abstandes von der Axe ist; aber unter allen diesen Fällen paſst für die Integrabilität der eben erwähnten Formel nur der einzige, wo die Geschwindigkeit $= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ ist, oder im umgekehrten Verhältnisse des Abstandes von der Axe steht.

Man kann aber auch aus andern Gründen schlieſsen, daſs die hier angenommene Voraussetzung nicht nothwendig bei allen Bewegungen Statt zu finden brauche. Denn wir haben eben gesehen, daſs, bei einer nicht überall gleichen Dichtigkeit, die Gleichung für $p$ sich nur dann integriren läſst, wenn $q$ als Function von $p$ und von $[2gS - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \varphi]$ darf betrachtet werden. Offenbar aber könnte es Fälle geben, wo der Grad der Wärme, wenn diese nicht überall gleich ist, sich nicht als Function der Gröſse $[2gS - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \varphi]$ ausdrücken lieſse, und wo gleichwohl nothwendig eine Bewegung entstehen müſste, weil auch das Gleichgewicht unmöglich ist. In solchen Fällen würde also eine andre Bewegung erfolgen, welche unter der hier angenommenen Voraussetzung nicht begriffen ist.

Wir müssen nun noch untersuchen, welche Bedingungen sich bei dem hier betrachteten Falle aus der ersten Gleichung ergeben (§. 152.).

195. Problem 36. Wenn die Bewegung flüssiger Körper so beschaffen ist, daſs die Formel $udx + vdy + wdz$ die Integration zuläſst, die Fälle zu bestimmen, wo zugleich der ersten für die Bewegung gefundenen Hauptgleichung Genüge geschieht.

Auflösung. Wenn $q$ die Dichtigkeit des flüssigen Körpers in dem durch die Coordinaten $x$, $y$, $z$ bestimmten Punkte am Ende der Zeit $t$ ist, wo die Geschwindigkeiten durch $u$, $v$, $w$ ausgedrückt werden, so fordert die erste Hauptgleichung, daſs

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ sey.}$$

Nennen wir nun $I$ diejenige Function, deren Differential $dI = udx + vdy + wdz + \varphi dt$ ist, so läſst sich jene Gleichung auch so darstellen:

$$q\left\{\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right)\right\} + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dI}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right)\left(\frac{dI}{dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dI}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Die Function $I$ muſs also so angenommen werden, daſs sie auch dieser Gleichung entspricht.

Um solche Werthe von $I$ zu finden, würde man, wenn $q$ eine veränderliche Gröſse ist, auf den durch die zweite Gleichung bestimmten Werth von $p$ Rücksicht nehmen müssen, von welchem $q$ abhängt; dadurch aber wird die Untersuchung allzuschwierig, und sie möchte sich wohl nur da ausführen lassen, wo $q$ unveränderlich $= b$ ist. In diesen Fällen verschwinden die letzten Glieder der eben entwickelten Gleichung, und man erhält

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right) = 0,$$

und diese Gleichung, in Verbindung mit der für den Druck gefundenen

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \varphi + f:t,$$

bestimmt die Umstände der Bewegung für alle diejenigen Fälle, wo $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential und $q$ eine beständige Gröſse $= b$ ist.

196. Wenn $q$ unveränderlich ist, so ist es nicht schwer, Werthe für $I$ anzugeben, welche den Gleichungen

des vorigen §. Genüge thun, aber eine allgemeine Auflösung der Gleichung für $I$ hat grofse Schwierigkeiten. Man überzeugt sich z. B. leicht, dafs $I = \Gamma : (\alpha x + \beta y + \gamma z)$ ein jener Gleichung entsprechender Werth ist, wofern nur $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, oder $\gamma . \sqrt{-1} = \pm \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ ist; aber diese sehr particuläre Auflösung ist sehr wenig anwendbar. Man kann diesem Werthe von $I$ zwar leicht eine Form geben, worin keine unmögliche Gröfsen vorkommen, wenn man zum Beispiel

$$I = e^{\alpha x + \beta y}\left(A . \text{Sin}[z.\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}] + B . \text{Cos}[z.\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}]\right),$$

oder auch

$$I = e^{z\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}\,[A . \text{Sin.}\,(\alpha x + \beta y) + B . \text{Cos.}(\alpha x + \beta y)]$$

setzt; aber auch so läfst sich von so willkürlich angenommenen Functionen keine Anwendung machen, obgleich diese Formen schon unzählige verschiedene Werthe enthalten, da $A$ und $B$, wie man will, von $t$ abhängen dürfen.

197. Um nur an einem Beispiele zu zeigen, auf welche seltsame Folgerungen man geleitet werden kann, wenn man sich blos der algebraischen Betrachtung einer Formel hingibt, ohne zu untersuchen, ob ihre Anwendung der Natur der Sache entspricht, will ich noch einen Augenblick bei den Formeln des vorigen §. verweilen.

Es sey dort $\beta = 0$ und $B = 0$, also

$$I = e^{\alpha x} . A . \text{Sin.}\,\alpha z, \text{ so wird}$$

$$u = \left(\frac{dI}{dx}\right) = \alpha A . e^{\alpha x} . \text{Sin.}\,\alpha z, \quad v = 0,$$

$$w = \left(\frac{dI}{dz}\right) = \alpha A . e^{\alpha x} . \text{Cos.}\,\alpha z,$$

$$\text{folglich } u^2 + w^2 = \alpha^2 A^2 . e^{2\alpha x}.$$

Nimmt man nun an, dafs blos die Schwere auf den flüssigen Körper wirke, und dafs ihre Richtung den Ordinaten $z$ parallel und entgegengesetzt sey, so kann man $S = h - z$ setzen, und findet

$$p = b\,(h - z) - \frac{\alpha^2 b A^2}{4g} \cdot e^{2\alpha x}.$$

wenn man $\varphi$ wegläſst, oder voraussetzt, daſs die Bewegung sich im Fortgange der Zeit nicht ändere.

Die beständige Gröſse $A\alpha$ ist unbestimmt, wir wollen sie $= 2\sqrt{gh}$ setzen, so wird $p = 0$, wenn $z = h\,(1 - e^{2\alpha x})$ ist. Nimmt man also die gerade Linie $OX$ (Fig. 32.) horizontal, und auf derselben $OX = x$, die niederwärts gehende Ordinate aber $XZ = -z$, so wird die Linie, in welcher der Druck verschwindet, logarithmisch; unterhalb dieser Linie wächst der Druck mit der Tiefe, oberhalb aber wird er negativ, und da hört also der Zusammenhang des flüssigen Körpers auf. Betrachtet man nun die Bewegung selbst, so findet man in $O$, wo $x = 0$ und $z = 0$ ist, $u = 0$ und $w = 2\sqrt{gh}$; der flüssige Körper bewegt sich also hier aufwärts nach einer Gegend zu, wo der Druck negativ wird. Nimmt man ferner auf der Verticale $OF$ die Ordinate $OB = \frac{\pi}{\alpha}$, $OD = \frac{2\pi}{\alpha}$, so wird in $B$ die Bewegung niederwärts, in $D$ aber aufwärts gehen, und die Geschwindigkeit in diesen beiden Punkten gleich $= 2\sqrt{gh}$. Dagegen, wenn $OA = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}$, $OC = \frac{3}{2}\frac{\pi}{\alpha}$ ist, so wird in $A$ die Bewegung horizontal nach der Richtung $Aa$, in $C$ horizontal nach der Richrung $Cc$ gehen, wieder mit der Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gh}$. Auf ähnliche Weise ist auch in andern Verticallinien die Richtung der Bewegung verschieden, und die Geschwindigkeit wächst, je gröſser $x$ wird. Die Gröſsen $u$, $w$ behalten selbst dann noch reelle Werthe, wenn sie sich auf Punkte beziehen, die oberhalb der Linie $OZ$ liegen, obgleich bei einem Fluido, welches sich in Tropfen zerstreut hat, die Gesetze nicht mehr anwendbar sind, auf welche unsre Formeln sich gründen. — — Obgleich nun sich eben nicht geradezu läugnen läſst, daſs eine solche wirbelnde Bewegung, wo die Theilchen neben $A$

horizontal, neben *B* vertical, und neben *C* wieder horizontal rückwärts flöſsen, allenfalls möglich sey, wenn an den gehörigen Stellen der nöthige Zufluſs Statt fände, so sieht man doch leicht, daſs die Betrachtung einer solchen Bewegung von gar keinem Nutzen seyn kann. Ueberhaupt darf man nicht vergessen, daſs die Bewegungen, welche wir hier möglich nennen, es nur in sofern sind, als man annimmt, jedem Theilchen des Flüssigen sey oder werde die gehörige Geschwindigkeit durch äuſsere Kräfte mitgetheilt. Ob dieses möglich sey, daſs nämlich jedem einzelnen Theilchen die Bewegung gegeben werde, die es haben muſs, das kann die Formel nicht angeben, welche blos aussagt, daſs, wofern eine solche Bewegung Statt fände, so könne sie in sofern bestehen, als dabei die Theilchen weder sich in einen zu engen Raum zusammenzupressen strebten, noch auch leere Zwischenräume zwischen sich lieſsen.

Dieses Beispiel zeigt deutlich genug, daſs es zu nichts führt, wenn man willkürlich Werthe für *I* annimmt, welche der Differentialgleichung entsprechen, sondern daſs man die Bestimmung jener Werthe aus den Umständen der Bewegung selbst herleiten muſs. Wie dieses geschehe, will ich noch etwas ausführlicher zeigen.

198. Um die Untersuchung zu vereinfachen, setze ich im Folgenden voraus, daſs in jedem Punkte, so lange die Bewegung dauert, $v = 0$ sey, daſs also jedes Theilchen des Flüssigen in einer mit den Ordinaten $x$, $z$ parallelen Ebene fortrückt, und immerfort in derselben Ebene bleibt, worin es sich anfangs befand; ich setze ferner voraus, daſs die Dichtigkeit des flüssigen Körpers überall gleich und unveränderlich sey, und endlich, daſs auf denselben auſser der Schwere, welche ich $= 1$ setze, keine beschleunigende Kraft wirkt. Beschränkt man die Untersuchung auf diesen Fall, und nimmt dann an, daſs die Formel $u\,dx + w\,dz$ ein vollständiges Differential sey, so läſst sich der Werth

von $u$ und $w$ in vollständigen Integralen mit Hülfe des folgenden Lehrsatzes angeben.

199. Lehrsatz. Problem. Das vollständige Integral der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right) = 0$$

zu bestimmen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung zwischen den partiellen Differentialen der Function $w$, daſs

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = - \left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right),$$

$$\text{oder } \left(\frac{d.\left(\frac{dw}{dx}\right)}{dx}\right) = - \left(\frac{d.\left(\frac{dw}{dz}\right)}{dz}\right)$$

seyn soll, findet nur dann Statt, wenn die Formel

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) dz - \left(\frac{dw}{dz}\right) dx$$

ein vollständiges Differential ist; denn sie ist mit der Gleichung einerlei, welche die Bedingung der Integrabilität dieser Formel ausdrückt; ich kann daher,

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) dz - \left(\frac{dw}{dz}\right) dx = d\omega'$$

setzen. Da nun zugleich

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) dx + \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = dw$$

ist, so erhält man

$$dw.\sqrt{-1} + d\omega' = \left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\sqrt{-1} - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right\} [dx - dz.\sqrt{-1}],$$

und

$$dw.\sqrt{-1} - d\omega' = \left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\sqrt{-1} + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}.[dx + dz.\sqrt{-1}].$$

In diesen beiden Gleichungen ist der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil für sich integrabel, es muſs es also auch der zweite Theil seyn, und dieses kann nur geschehen, wenn der erste Factor sich als Function vom Integrale des zweiten ausdrücken läſst. Wenn aber in der ersten Gleichung der Factor

$$\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\sqrt{-1}-\left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}$$

eine Function von $(x-z\sqrt{-1})$ ist, so ist auch das Integral

$$\int\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\sqrt{-1}-\left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}[dx-dz\sqrt{-1}]$$

eine Function eben dieser Gröſse, und da die Gleichung über die Form dieser Function nichts bestimmt, so thut jede Function ihr Genüge, und man hat allgemein

$$w.\sqrt{-1}+w'=f:(x-z\sqrt{-1}),$$

und aus der zweiten Gleichung

$$w\sqrt{-1}-w'=F:(x-z\sqrt{-1}),$$

wo $f$ und $F$ jede Function der eingeschlossenen Gröſse bedeuten können. Beide Gleichungen addirt, geben, wenn man den beständigen Factor, als in den unbestimmten Functionen mit enthalten, wegläſst,

$$w=F:(x+z\sqrt{-1})+f:(x-z\sqrt{-1})$$

als vollständiges Integral der vorgelegten Differentialgleichung.

200. Problem 37. Auf einen flüssigen Körper von unveränderlicher Dichtigkeit wirkt auſser der Schwere keine beschleunigende Kraft, zugleich ist die Bewegung desselben so beschaffen, daſs die mit der horizontalen Ordinate $y$ parallele Geschwindigkeit überall und immer $=0$ ist, man sucht die allgemeinen Differentialgleichungen für diese Bewegung.

Auflösung. Da in jedem Punkte und während der ganzen Bewegung die mit der Ordinate $y$ parallele Geschwindigkeit $v=0$ seyn soll, also vorausgesetzt wird, daſs alle Theilchen sich in Verticalebenen fortbewegen, die

mit $x$ parallel sind; so fallen in den beiden Hauptgleichungen §. 159. alle Glieder weg, welche $v$ oder dessen Differentiale und $V$ enthalten; zugleich wird in der zweiten Gleichung $P = 0$, $Q = 0$, $R = -1$, wenn die Schwere den Ordinaten $z$ parallel und nach entgegengesetzter Richtung wirkt. Diese beiden Gleichungen geben also

$$\text{I. } \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

$$\text{II. } \frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - U\,dx - W\,dz,$$

wenn $U$, $W$ die Bedeutung haben, wie im §. 151., also wegen $v = 0$ hier folgende Werthe erhalten:

$$U = u\left(\frac{du}{dx}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$W = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Setzt man hier, der ersten Hauptgleichung gemäſs,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

so wird auch

$$U = -u\left(\frac{dw}{dz}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$W = u\left(\frac{dw}{dx}\right) - w\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Die zweite Hauptgleichung erfordert, um integrabel zu seyn, daſs die Formel $U\,dx + W\,dz$ ein vollständiges Differential, mithin $\left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right)$ sey; die Werthe von $U$ und $W$ geben:

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = -\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right) - u\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{du}{dz}\right) + w\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dz\,dt}\right),$$

und

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right) + u\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) - \left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) - w\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2w}{dx\,dt}\right);$$

sollen also beide gleich seyn, so muſs

$$u\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + u\left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right) + \left(\frac{d^2 w}{dx\,dt}\right) = w\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + w\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right) + \left(\frac{d^2 u}{dz\,dt}\right)$$

seyn: und diese Gleichung muſs Statt finden für alle Bewegungen, welche den im Probleme erwähnten Bedingungen gemäſs sind.

201. Die letzte Bedingungsgleichung des vorigen §. gibt allgemein an, was für Functionen $u$ und $w$ seyn müssen, wenn eine solche Bewegung, wie dort angenommen worden, Statt finden soll: aber da die allgemeine Integration dieser Gleichung Schwierigkeit hat, so schränke ich die fernere Untersuchung auf diejenigen Fälle ein, wo zugleich $u\,dx + w\,dz$ ein vollständiges Differential ist. Diese Voraussetzung gibt $\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$, also $\left(\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right) = \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)$; die erste Hauptgleichung aber gibt $\left(\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right) = -\left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right)$; man erhält daher nun $\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right) = 0$, und eben so auch $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0$. Die Voraussetzung der Integrabilität der Formel $u\,dx + w\,dz$ kommt also eben darauf hinaus, als wenn wir in der Bedingungsgleichung des vorigen §. den mit $u$ multiplicirten Coefficienten, und den mit $w$ multiplicirten jeden für sich $= 0$ gesetzt hätten, woraus dann die Gleichheit der beiden übrigen Glieder schon von selbst gefolgt seyn würde.

202. Problem 38. Wenn alle Umstände so sind, wie im vorigen Probleme vorausgesetzt worden, zugleich aber die Formel $u\,dx + w\,dz$ für sich integrabel ist, die vollständigen Werthe der Gröſsen $u$, $w$ zu bestimmen.

Auflösung. Da diese Voraussetzungen zu den Gleichungen $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0$ und $\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right) = 0$

führen, so erhält man nach §. 199.

$$u = F:(x + z\sqrt{-1}) + f:(x - z\sqrt{-1}),$$
$$w = \Gamma:(x + z\sqrt{-1}) + \Delta:(x - z\sqrt{-1}),$$

und $F$, $f$, $\Gamma$, $\Delta$ könnten hier ganz von einander unabhängige Functionen bezeichnen, wenn nicht die erste Hauptgleichung (§. 200.) noch eine Vergleichung zwischen $u$ und $w$ angäbe. Vermöge derselben soll $\left(\frac{du}{dx}\right) = -\left(\frac{dw}{dz}\right)$ seyn; also, wenn ich $\frac{d.F:x}{dx} = F':x$ setze, und so alle Differentiale auf ähnliche Weise bezeichne,

$$F':(x+z\sqrt{-1}) + f':(x-z\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}\,.\,\Gamma':(x+z\sqrt{-1})$$
$$+ \sqrt{-1}\,.\,\Delta':(x-z\sqrt{-1}).$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, mufs, da die Function $F$ nicht von $f$ und die Function $\Gamma$ nicht von $\Delta$ abhängen soll:

$$\Gamma':(x+z\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,.\,F':(x+z\sqrt{-1}),$$
$$\Delta':(x-z\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}\,.\,f':(x-z\sqrt{-1}),$$

oder $\Gamma:(x+z\sqrt{-1}) = \text{Const.} + \sqrt{-1}\,.\,F:(x+z\sqrt{-1}),$

$$\Delta:(x-z\sqrt{-1}) = \text{Const.} - \sqrt{-1}\,f:(x-z\sqrt{-1})$$

seyn; die Werthe von $u$ und $w$ sind also:

$$u = F:(x+z\sqrt{-1}) + f:(x-z\sqrt{-1}),$$
$$w = \text{Const} + \sqrt{-1}\,.\,F:(x+z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,.\,f:(x-z\sqrt{-1}).$$

203. Diese Werthe sind so bestimmt, dafs man auf die Variabilität der Gröfsen $y$ und $t$ gar nicht Rücksicht nahm, weil diese in den Differentialgleichungen nicht vorkommen: es bleibt also gänzlich unbestimmt, wie $u$ und $w$ von $y$ und $t$ abhängen. Die Gleichungen des vorigen §. betreffen nur das Gesetz der Bewegung in jeder der parallelen Verticalebenen einzeln betrachtet; aber über die Verhältnisse der Bewegung in verschiedenen dieser Ebenen lehren sie nichts, weil die Bewegung in einer Ebene nicht als abhängig von der in den übrigen Statt findenden Bewegung ist betrachtet worden. Auch die Zeit $t$ kann noch auf unbestimmte Weise in den Werthen von $u$ und $w$ vorkommen, weil die Glieder in der Bedingungsglei-

chung des 200. §., welche von $t$ abhängen, wegen der Voraussetzung $\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$ sich von selbst aufheben, $u$ und $w$ mögen, wie man will, von $t$ abhängen. Um also $u$ und $w$ für die hier geltenden Bedingungen ganz vollständig auszudrücken, müſste man setzen:

$$u = F:[y, t, (x + z\sqrt{-1})] + f:[y, t, (x - z\sqrt{-1})],$$
$$w = \text{Const.} + \sqrt{-1} \,.\, F:[y, t, (x + z\sqrt{-1})]$$
$$- \sqrt{-1}\, f:[y, t, (x - z\sqrt{-1})],$$

wo statt der Const. auch jede Function von $y$ und $t$ gesetzt werden kann.

204. Die Form der Functionen $F$, $f$ ist hier noch völlig unbestimmt, und muſs erst aus andern gegebenen Umständen der Bewegung hergeleitet werden. Die Figur des Gefäſses gibt hiezu ein Mittel an die Hand, wenigstens dient sie, die Ausdrücke so zu verändern, daſs nur eine unbestimmte Function mehr übrig bleibt.

Um die Sache noch etwas einfacher zu machen, will ich $u$ und $w$ unabhängig von $t$ betrachten, oder annehmen, die Bewegung sey im Beharrungsstande, oder leide im Fortgange der Zeit keine Aenderung.

205. Problem 39. Alle Bedingungen für die Bewegung, welche in den beiden vorigen Problemen angenommen worden, werden auch jetzt vorausgesetzt, zugleich aber ist die Gestalt des Gefäſses, in welchem, oder des Bodens, über welchem das Fluidum sich bewegt, gegeben, man soll bestimmen, wie die Functionen $F$ und $f$ von einander abhängen.

Auflösung. Da alle Umstände so vorausgesetzt werden, wie im vorigen Probleme, so gelten für $u$ und $w$ die im §. 203. angegebenen Werthe, in welchen indeſs, wenn von einer zum Beharrungsstande gelangten Bewegung die Rede ist, die unbestimmten Functionen als von $t$ unabhängig zu betrachten sind.

Wie nun auch die Bewegung des flüssigen Körpers beschaffen seyn mag, so muſs doch allemal da, wo ein fester Boden oder die Wand eines Gefäſses ihn begränzt, die auf diesen Boden oder auf die Wand senkrechte Geschwindigkeit $= 0$ seyn. Das Gegentheil zu behaupten, würde heiſsen, der flüssige Körper ströme dahin, oder komme von da her, wo eine feste Wand seiner Bewegung Gränzen setzt, welches ungereimt wäre.

Hat man also die Gestalt des Bodens oder des Gefäſses durch eine Gleichung zwischen $x$, $y$ und $z$ ausgedrückt, und nennt man $s$ denjenigen Werth von $z$, welchen $z$ an der Oberfläche des Gefäſses erhält, so ist in jedem Punkte die Durchschnittslinie der Oberfläche des Gefäſses mit einer den Ordinaten $x$, $z$ parallelen Ebene gegen die Ordinate $x$ unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente $= \left(\frac{ds}{dx}\right)$ ist, wenn man nämlich bei der Differentiation von $s$ blos $x$ als veränderlich ansieht. Zerlegt man nun die Geschwindigkeiten $u$, $w$ nach der auf jene Durchschnittslinie senkrechten, und der damit parallelen Richtung, so findet man die auf sie senkrechte Geschwindigkeit in jedem Punkte der Oberfläche

$$= \frac{u\left(\frac{ds}{dx}\right) - w}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{ds^2}{dx^2}\right)\right\}}}.$$

Diese muſs nothwendig für jeden Werth von $x$ verschwinden, wenn man für $s$ den der Figur des Gefäſses entsprechenden Werth setzt, weil, der Voraussetzung zu Folge, kein Theilchen des Flüssigen aus derjenigen mit $x$ und $z$ parallel gelegten Ebene, worin es sich einmal befindet, herausgehn soll; man hat also für jeden Punkt der Oberfläche des Gefäſses $w = u\left(\frac{ds}{dx}\right)$, oder, wenn man für $u$, $w$ ihre Werthe setzt,

$$f:(x - s\sqrt{-1}) = \frac{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)\sqrt{-1}}{1 - \left(\frac{ds}{dx}\right)\sqrt{-1}} . F:(x + s\sqrt{-1}),$$

weil $y$ als beständig angesehen wird.

Die Form der Function $f:x$ ist also durch $F:x$ bestimmt, wenn die Figur des Gefäſses bekannt ist.

206. 1. Exempel. Das Fluidum flieſse über einem ebenen horizontalen Boden hin; man sucht die Gleichungen für die Geschwindigkeit und den Druck, wenn die Bewegung den Bedingungen der vorigen Probleme gemäſs ist.

Die Höhe des festen horizontalen Bodens sey $= 0$, oder man rechne die Ordinaten $z$ vom Boden an, so ist $s = 0$ und $ds = 0$; es muſs daher für $z = 0$ auch $w = 0$ werden, und $f:x = F:x$ seyn, das heiſst, die mit $f$ und $F$ bezeichneten Functionen hängen auf einerlei Weise von den Gröſsen ab, worauf sie sich beziehen. Ist die Bewegung nun zugleich so beschaffen, daſs sie von der Zeit und von der Ordinate $y$ gar nicht abhängt, daſs nämlich in allen Punkten, für welche $x$ und $z$ denselben Werth haben, alle Umstände gleich sind, so kann man $y$ und $t$ in den unbestimmten Functionen weglassen, und erhält hier

$$u = F:(x + z\sqrt{-1}) + F:(x - z\sqrt{-1}),$$

$$w = \sqrt{-1} . F:(x + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1} . F:(x - z\sqrt{-1}),$$

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - z) - \frac{u^2 + w^2}{2}, \text{ oder}$$

$$p = b(h - z) - \frac{b}{g} . F:(x + z\sqrt{-1}) . F:(x - z\sqrt{-1}).$$

207. Will man nicht annehmen, daſs die Bewegung in allen parallelen Ebenen ganz gleich, nämlich Geschwindigkeit und Druck in allen Punkten gleich sey, für welche $x$ und $z$ einerlei Werthe haben, so muſs auch $y$, und wenn von einer im Fortgange der Zeit veränderlichen Bewegung die Rede ist, auch $t$ auf unbestimmte Weise in den Functio-

nen vorkommen. Die Const. aber in §. 203. fällt hier weg, weil sie für $z = 0$ verschwinden muſs, und daher als unabhängig von $z$ allemal verschwindet. — —, Bei horizontalem Boden hätte man also, wofern die Bedingungen des 37. und 38. Problems gelten, ganz allgemein

$$u = F : (y, t, x + z\sqrt{-1}) + F : (y, t, x - z\sqrt{-1}),$$

$$w = \sqrt{-1} . F : (y, t, x + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1} . F : (y, t, x - z\sqrt{-1}),$$

und es müſste aus andern Datis bestimmt werden, wie die Function $F$ von den Gröſsen abhängt, worauf sie sich bezieht. Zugleich wird

$$p = b\,(h - z) - \frac{b}{4g}\,(u^2 + w^2) + \varphi,$$

wenn $\varphi$ die Bedeutung behält, die wir ihm in §. 195. gaben, und man die dort beigefügte unbestimmte Function als mit in $\varphi$ enthalten, wegläſst. Wir bezeichneten dort das Integral der Formel $u\,dx + w\,dz + \varphi\,dt$ mit $I$, und da die vorausgesetzte Integrabilität dieser Formel nothwendig fordert, daſs $\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ sey, so ist $\varphi = \int \left(\frac{du}{dt}\right) dx$, wenn dieses Integral so genommen wird, als ob blos $x$ veränderlich wäre. Da diesem Integral eine willkürliche Function von $t$ kann beigefügt werden, so erhellt, daſs die im 195. §. in die Formel gebrachte $f : t$ als mit in $\varphi$ enthalten, kann betrachtet werden.

Gewöhnlich wird man wohl $y$ hier ganz aus der Rechnung weglassen, denn bei einem Canale mit horizontalem Boden und verticalen mit $x$ parallelen Wänden würde meistens die Voraussetzung gelten, daſs in allen Längenprofilen die Bewegung auf einerlei Weise bestimmt werde, oder daſs in jedem verticalen Querschnitt alle in derselben Höhe befindlichen Theilchen sich auf einerlei Art bewegen. Wo diese Voraussetzung nicht gelten sollte, da müſsten Bedingungen gegeben seyn, welche bestimmten, wie $u$ und $w$ von $y$ abhängen.

208. 2. Exempel. Das Fluidum bewege sich über einem ebenen Boden, der zwar auf die durch $x$ und $z$ ge-

legte Ebene senkrecht ist, gegen die Ordinate $x$ aber unter dem Winkel $\eta$ geneigt ist.

Die Gleichung für diesen Boden sey $z = s = -x \tan. \eta$, also $\frac{ds}{dx} = -\tan. \eta$. Folglich muſs dem Probleme zu Folge

$$f:(x + x\sqrt{-1}.\tan.\eta) = \frac{1-\sqrt{-1}.\tan.\eta}{1+\sqrt{-1}.\tan.\eta}.F:(x - x\sqrt{-1}.\tan.\eta)$$

seyn. Ich setze $1 + \sqrt{-1}\,.\,\tan.\,\eta = \alpha$,
und $1 - \sqrt{-1}\,.\,\tan.\,\eta = \beta$,

so erhält die Formel folgende Gestalt:

$$f:\alpha x = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,F:\beta x,$$ und es muſs also

$$f:x = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,F:\frac{\beta x}{\alpha}$$ seyn, daher

$$f:(x - z\sqrt{-1}) = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,F:\left[\frac{\beta}{\alpha}x - \frac{\beta z\sqrt{-1}}{\alpha}\right],$$

und wenn $u$ und $w$ von $y$ und $t$ unabhängig sind,

$$u = F:(x + z\sqrt{-1}) + \frac{\beta}{\alpha}\,.\,F:\left[\frac{\beta x}{\alpha} - \frac{\beta z\sqrt{-1}}{\alpha}\right],$$

$$w = \sqrt{-1}\,.\,F:(x + z\sqrt{-1}) - \frac{\sqrt{-1}\,.\,\beta}{\alpha}\,.\,F:\left[\frac{\beta x}{\alpha} - \frac{\beta z\sqrt{-1}}{\alpha}\right],$$

woraus sich auch $p$ bestimmen läſst.

209. 3. Exempel. Der flüssige Körper bewege sich in einem horizontalen Cylinder, dessen Axe mit den Ordinaten $x$ parallel ist: jedes Theilchen rückt in einer Ebene fort, die mit der Axe parallel ist.

Die Gleichung für die cylindrische Oberfläche des Gefäſses sey $z = s = r - \sqrt{(r^2 - y^2)}$, wo $r$ den Halbmesser des Cylinders bezeichnet, so ist $\left[\frac{ds}{dx}\right] = 0$, und folglich muſs an allen Punkten der Oberfläche des Cylinders $w = 0$ seyn, das ist, wenn man hier auf alle veränderliche Gröſsen Rücksicht nimmt,

$$f:[y, t, (x - r\sqrt{-1} + \sqrt{(y^2 - r^2)})],$$
$$= F:[y, t, (x + r\sqrt{-1} - \sqrt{(y^2 - r^2)})].$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$f:(y, t, x) = F:[y, t, (x + 2r\sqrt{-1} - 2\sqrt{(y^2 - r^2)})]$,

oder $u = F:[y, t, (x + z\sqrt{-1})] +$

$+ F:[y, t, (x + (2r - z)\sqrt{-1} - 2\sqrt{(y^2 - r^2)})]$,

und $w = \sqrt{-1} \,.\, F:[y, t, (x + z\sqrt{-1})] -$

$- \sqrt{-1} \,.\, F:[y, t, (x + (2r - z)\sqrt{-1} - 2\sqrt{(y^2 - r^2)})]$ ist.

210. 4. Exempel. Das Fluidum bewege sich in einem cylindrischen Gefäſse, dessen Axe mit den Ordinaten $y$ parallel ist: jedes Theilchen bewegt sich also in einer auf die Axe senkrechten Ebene.

Die Gleichung für das Gefäſs ist nun, wenn die Ordinaten vom Centro an gerechnet werden $s = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, und $a$ ist des Cylinders Halbmesser; es wird also

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{x}{s},$$

$$1 + \frac{ds}{dx} \,.\, \sqrt{-1} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{s},$$

$$1 - \frac{ds}{dx} \,.\, \sqrt{-1} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{s},$$

also, wenn ich $y$ und $t$ bei Seite setze,

$$f:[x - \sqrt{(x^2 - a^2)}] = \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{-x + \sqrt{(x^2 - a^2)}} \,.\, F:[x + \sqrt{(x^2 - a^2)}].$$

Ich setze $x - \sqrt{(x^2 - a^2)} = \omega$, also $x = \dfrac{\omega^2 + a^2}{2\omega}$,

und $x + \sqrt{(x^2 - a^2)} = \dfrac{a^2}{\omega}$,

folglich wird $f:\omega = -\dfrac{a^2}{\omega^2} \,.\, F:\dfrac{a^2}{\omega}$,

$$u = F:(x + z\sqrt{-1}) - \frac{a^2 \,.\, F:\left[\dfrac{a^2}{(x - z\sqrt{-1})}\right]}{(x - z\sqrt{-1})^2}$$

und $w = \sqrt{-1}\,.\,F:(x+z\sqrt{-1}) + \frac{a^2\sqrt{-1}}{(x-z\sqrt{-1})^2}.F:\left(\frac{a^2}{x-z\sqrt{-1}}\right)$,

der Druck aber wird, wenn die Schwere mit $z$ parallel wirkt,

$$p = b(h-z) + \frac{b}{g}\cdot\frac{a^2}{(x-z\sqrt{-1})^2}F:(x+z\sqrt{-1}).F:\left\{\frac{a^2}{x-z\sqrt{-1}}\right\}.$$

211. Bei dieser ganzen Untersuchung scheint es sehr unbequem, daſs $u$, $w$, $p$ durch unmögliche Gröſsen ausgedrückt werden, aber diese fallen bei der Anwendung auf wirkliche Fälle aus der Rechnung weg. Am allgemeinsten läſst sich dieses zeigen, wenn man die Gleichungen für die Bewegung über einem ebenen horizontalen Boden betrachtet. Es ist nämlich bekannt, daſs man jede Function $F:(x+z)$ durch eine Reihe ausdrücken kann, welche, wenn man

$$\frac{d.F:x}{dx} = F^{I}:x,\quad \frac{d.F^{I}:x}{dx} = F^{II}:x,\quad \frac{d.F^{II}:x}{dx} = F^{III}:x$$

und so ferner setzt, folgende Form erhält:

$$F:(x+z) = F:x + z.F^{I}:x + \frac{z^2}{1.2}F^{II}:x + \frac{z^3}{1.2.3}F^{III}:x + \frac{z^4}{1.2.3.4}F^{IV}:x + \text{etc.}$$

Diesem gemäſs wird in §. 206.

$$u = F:x + z.\sqrt{-1}\,.F^{I}:x - \frac{z^2}{2}F^{II}:x - \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3}F^{III}:x + \frac{z^4}{2.3.4}F^{IV}:x + \frac{z^5\sqrt{-1}}{2\ldots5}F^{V}:x - \text{etc.}$$
$$+ F:x - z\sqrt{-1}\,.F^{I}:x - \frac{z^2}{2}F^{II}:x + \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3}F^{III}:x + \frac{z^4}{2.3.4}F^{IV}:x - \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5}F^{V}:x - \text{etc.}$$

oder

$$u = 2F:x - z^2.F^{II}:x + \frac{z^4}{3.4}F^{IV}:x - \frac{z^6}{3.4.5.6}F^{VI}:x + \text{etc.}$$

und auf ähnliche Weise

$$w = -2z.F^{I}:x + \frac{z^3}{3}F^{III}:x - \frac{z^5}{3.4.5}F^{V}:x$$
$$+ \frac{z^7}{3.4\ldots7}F^{VII}:x - \text{etc.}$$

Hier werden also $u$ und $w$ durch mögliche Gröſsen ausgedrückt, sobald $F:x$, $F^{I}:x$ u. s. w. mögliche Functionen von $x$ sind.

Das Hauptgeschäft, worauf die weitere Auflösung der Gleichungen nunmehr beruht, ist die Bestimmung der Form der Function $F$. Es lassen sich mehrere Wege, um zu derselben zu gelangen, denken, aber in den meisten Fällen wird die Rechnung sehr verwickelt: ich will indeſs einige Untersuchungen über diesen Gegenstand mittheilen, und den Anfang mit einem Beispiele machen, das wir im Vorigen schon betrachtet haben.

212. Problem 40. Wenn die Bewegung des flüssigen Körpers allen vorigen Bedingungen gemäſs ist, und das in ein horizontales cylindrisches Gefäſs eingeschlossene Fluidum sich so bewegt, daſs jedes Theilchen in einer auf die Axe des Cylinders senkrechten Ebene fortrückt, die Werthe von $u$ und $w$ für den bestimmten Fall anzugeben, da jedes Theilchens Abstand von der Axe immerfort ungeändert bleibt, oder jedes Theilchen in einem Kreise fortgeht, dessen Centrum in der Axe liegt.

Auflösung. Da das Problem alle Bedingungen voraussetzt, welche in §. 210. galten, so müssen die dort gefundenen Gleichungen hier zum Grunde gelegt werden; man muſs aber noch die Voraussetzung hinzufügen, daſs jedes Theilchen seinen Abstand von der Axe nicht ändere. Damit dies geschehe, muſs, wie im §. 180., $w = -\frac{ux}{z}$ seyn, folglich, wenn ich für $w$ und $u$ ihre Werthe aus §. 210. setze,

$$(x+z\sqrt{-1}).F:(x+z\sqrt{-1}) = \frac{a^2}{x-z\sqrt{-1}}.F:\left(\frac{a^2}{x-z\sqrt{-1}}\right).$$

Setze ich den Halbmesser des Kreises, welchen irgend ein Theilchen durchläuft, $= \varrho$, so ist $z = \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$, und wenn ich $x + z\sqrt{-1} = x + \sqrt{(x^2 - \varrho^2)} = \omega$ setze, so gibt die vorige Gleichung

$$\omega.F:\omega = \frac{a^2\omega}{\varrho^2}.F:\frac{a^2\omega}{\varrho^2},$$

$$\text{oder } F:\omega = \frac{a^2}{\varrho^2}.F:\frac{a^2\omega}{\varrho^2}.$$

Diese Gleichung muſs für alle Theilchen des flüssigen Körpers gelten, mithin für jeden innerhalb der Gränzen des Gefäſses liegenden Werth von $\varrho$ läſst sich also die $F:\omega$ durch eine Reihe von der allgemeinen Form

$$F:\omega = A + B\omega^\alpha + C\omega^\beta + D\omega^\gamma + +$$

ausdrücken, so muſs für jeden bestimmten Werth von $\varrho$

$$A + B\omega^\alpha + C\omega^\beta + D\omega^\gamma + +$$

$$= \frac{a^2 A}{\varrho^2} + B\frac{a^{2(\alpha+1)}\omega^\alpha}{\varrho^{2(\alpha+1)}} + C\frac{a^{2(\beta+1)}\omega^\beta}{\varrho^{2(\beta+1)}} + D\frac{a^{2(\gamma+1)}\omega^\gamma}{\varrho^{2(\gamma+1)}} + \text{etc.}$$

seyn. Dieses kann nicht anders geschehen, als wenn $A = 0$ und $\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\alpha+1} = 1$, $\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\beta+1} = 1$ u. s. w., oder wenn $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ist. Der Werth der Function $F$ ist also nun ganz bestimmt $F:\omega = +\frac{B}{\omega}$, und es wird

$$u = B\left(\frac{1}{x+z\sqrt{-1}} - \frac{1}{x-z\sqrt{-1}}\right),$$

$$\text{und } w = B\sqrt{-1}\left(\frac{1}{x+z\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-z\sqrt{-1}}\right),$$

$$\text{folglich } \sqrt{(u^2+w^2)} = B.\sqrt{-1}.\sqrt{\left(\frac{2}{x^2+z^2}\right)}.$$

Soll also die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Gefäſses einen gegebnen Werth $\sqrt{(u^2+w^2)} = c$ haben, so

mufs, weil hier $\sqrt{(x^2 + z^2)} = a$ ist, $c = \frac{B\sqrt{-2}}{a}$, folglich $B.\sqrt{-1} = \frac{ac}{\sqrt{2}}$ seyn, und die ganze Bewegung ist nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$u = -\frac{ac.z.\sqrt{2}}{x^2 + z^2}, \quad w = \frac{acx.\sqrt{2}}{x^2 + z^2},$$

und der Druck wird

$$p = b(h - z) - \frac{a^2 c^2}{2g(x^2 + z^2)}.$$

212 *b*). Diese Auflösung stimmt völlig mit der in §. 194. gegebenen überein, und es gilt daher die Bemerkung auch hier, dafs die im vorigen Abschnitte gefundene Auflösung des Problems von rotirenden Bewegungen viel allgemeiner sey. Die Beschränktheit der gegenwärtigen rührt von der Voraussetzung her, dafs $udx + wdz$ eine für sich integrable Formel sey, welches bei den übrigen Fällen nicht Statt findet.

Ich gehe jetzt zu einigen allgemeinern Bestimmungen der Form der Function $F$ über, und werde von nun an blos den Fall betrachten, da der Boden, worüber das Wasser hinfliefst, eine horizontale Ebene ist.

213. Problem 41. Der flüssige Körper bewegt sich in einem Canale über einem ebenen horizontalen Boden, zugleich ist die Bewegung den im 37. und 38. Probleme angenommenen Voraussetzungen gemäfs, und in allen parallelen Ebenen ganz gleich; man soll aus der gegebenen Figur der Oberfläche die Form der Function $F$ bestimmen.

Auflösung. Da die Gleichungen für die Bewegung von $y$ unabhängig seyn sollen, indem, nach der Voraussetzung, was für eine der mit $x$ parallelen Verticalebenen gilt, für alle gelten soll, so ist, wegen des horizontalen Bodens im Beharrungsstande der Bewegung,

$$u = F:(x + z\sqrt{-1}) + F:(x - z\sqrt{-1}),$$
$$w = \sqrt{-1}.F:(x + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}.F:(x - z\sqrt{-1}).$$

Es sey nun die Gestalt der Oberfläche bekannt, und der Werth, welchen $z$ an derselben erhält, sey $= s$, so muſs auch hier die auf die Oberfläche senkrechte Geschwindigkeit $= 0$ seyn, aus ähnlichen Gründen, wie im 39. Problem.

Zerlegt man also die Geschwindigkeiten $u$, $w$ nach der auf die Oberfläche an jeder Stelle senkrechten und der damit parallelen Richtung, so wird die auf die Oberfläche senkrechte Geschwindigkeit $\frac{w\,dx - u\,ds}{\sqrt{(dx^2 + ds^2)}}$, und diese muſs $= 0$, also $w = \frac{u\,ds}{dx}$ an der Oberfläche seyn.

Diese Gleichung, in Verbindung mit den vorigen Werthen von $u$ und $w$, gibt

$$(dx\,.\,\sqrt{-1} - ds)\,.\,F:(x + s\sqrt{-1})$$
$$-(dx\sqrt{-1} + ds)\,F:(x - s\sqrt{-1}) = 0, \text{ oder}$$
$$(dx + ds\sqrt{-1})\,.\,F:(x + s\sqrt{-1})$$
$$= (dx - ds\sqrt{-1})\,.\,F:(x - s\sqrt{-1}), \text{ woraus folgt}$$
$$F:(x + s\sqrt{-1}) = \frac{dx - ds\sqrt{-1}}{dx + ds\sqrt{-1}}\,.\,F:(x - s\sqrt{-1}).$$

Man kann die Abhängigkeit der Gröſsen $F:(x + s\sqrt{-1})$ und $F:(x - s\sqrt{-1})$ von einander noch bequemer darstellen. Bezeichne ich nämlich das Integral $\int d\omega\,.\,F:\omega$ allgemein mit ${}^{\mathrm{I}}F:\omega$, so geben die obigen Formeln, wenn man sie integrirt, sogleich

$${}^{\mathrm{I}}F:(x + s\sqrt{-1}) = {}^{\mathrm{I}}F:(x - s\sqrt{-1}) + \text{Const.}$$

und hiedurch ist die Form der Function ${}^{\mathrm{I}}F$, folglich auch die Form von $F$ völlig bestimmt.

Uebrigens bleibt diese Auflösung richtig, die Oberfläche mag durch einen festen Boden von gegebener Gestalt bestimmt, oder es mag eine freie Oberfläche seyn, wenn nur die Bewegung im Fortgange der Zeit keine Aenderung leidet, und an der Oberfläche keine auf diese senkrechte Geschwindigkeit Statt findet.

213 *b*). Wenn die Oberfläche nicht durch eine feste Wand bestimmt ist, so wäre der Fall einer gegen sie senkrechten Geschwindigkeit nicht gänzlich unmöglich, indeſs setzen wir diese Fälle bei Seite, und betrachten nur die, wo an der Oberfläche die Richtung der Bewegung mit der Richtung der Oberfläche einerlei ist, und alle Umstände unabhängig von der Zeit $t$ sind.

Ob die Oberfläche frei seyn kann, wird erst aus der Form der Function selbst bestimmt. Nach §. 206. würde, wenn man für $F:(x+s\sqrt{-1})$ seinen Werth setzt, in jedem Punkte der Oberfläche der Druck

$$p = b(h-s) - \frac{b}{g} \cdot \frac{dx - ds.\sqrt{-1}}{dx + ds\sqrt{-1}} \cdot [F:(x-s\sqrt{-1})]^2,$$

die Oberfläche kann also nur dann als freie Oberfläche bestehen, wenn dieser Werth = o wird.

213 *c*). Daſs die Form der Function $F$ durch die Gleichung ${}^1F:(x+s\sqrt{-1}) = \text{Const.} + {}^1F:(x-s\sqrt{-1})$ völlig bestimmt sey, läſst sich deutlich übersehen, wenn man die Function nach dem Taylorschen Lehrsatze in eine Reihe auflöst, wie im §. 211. Dann gibt die eben angeführte Gleichung, wenn man die Glieder, welche sich aufheben, und die, allen Gliedern gemeinschaftlichen, beständigen Factoren wegläſst,

$$\text{Const.} = s.F:x - \frac{1}{2\cdot 3}s^3.F^{II}:x + \frac{1}{2.3\cdot 4\cdot 5}s^5.F^{IV}:x$$
$$- \frac{1}{2.3\cdot 4\cdot 5\cdot 6.7}s^7.F^{VI}:x + \text{etc.}$$

Setze ich hier $F:x = y$, so ist $F^I:x = \frac{dy}{dx}$,

$$F^{II}:x = \frac{d^2y}{dx^2},\ F^{III}:x = \frac{d^3y}{dx^3}\ \text{u. s. w., also}$$

$$\text{Const.} = sy - \frac{1}{2.3}s^3.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{s^5}{1.2..5}.\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{s^7}{1.2.3...7}.\frac{d^6y}{dx^6}$$
$$+ \frac{s^9}{1.2.3....9}.\frac{d^8y}{dx^8} - \text{etc.}$$

wo offenbar, da $s$ eine bekannte Function von $x$ ist, $y$ völlig durch $x$ bestimmt ist. Aber die Auflösung dieser Gleichung hat in den meisten Fällen grofse Schwierigkeit, indefs sind die unbestimmten Functionen durch diese Bestimmungen weggeschafft, und die Untersuchung ist auf eine Differentialgleichung zwischen den beiden Gröfsen $x$ und $F : x$ zurückgeführt.

213 *d*). Erstes Exempel. Die Oberfläche sey eine horizontale Ebene.

Da die Oberfläche sowohl als der Boden eine horizontale Ebene ist, so ist der Abstand beider überall gleich, und $s = a$ ist die Gleichung für die Oberfläche. Es mufs daher $F : (x - a\sqrt{-1}) = F : (x + a\sqrt{-1})$ seyn, oder $F : x = F : (x + 2a\sqrt{-1})$.

Dieses kann nicht anders geschehen, als wenn $F : x =$ Const. ist, oder gar nicht von $x$ abhängt. Nimmt man dieses an, so wird überall $w = 0$, und $u$ erhält einen beständigen Werth. Setze ich $F : x = \frac{1}{2} c$, so ist $u = c$, und $c$ bedeutet die überall gleiche horizontale Geschwindigkeit. In diesem Falle bewegt sich also das Fluidum ganz horizontal fort, und wir haben für den Druck, den irgend ein Punkt leidet, die Gleichung $p = (h - z) - \frac{c^2}{4g}$, wenn die Dichtigkeit des flüssigen Körpers $= 1$ ist, und blos die Schwere auf ihn wirkt. — Hier bezeichnet $h$ eine noch unbestimmte beständige Gröfse.

Soll die Oberfläche eine freie Oberfläche seyn, so wird $p = 0$ für $z = a$, und man hat daher jetzt $h = a + \frac{c^2}{4g}$, und der Druck ist allgemein $p = a - z$, genau so, als wenn das Fluidum in Ruhe wäre *).

---

*) Einige Schriftsteller haben geglaubt, dafs dieses nicht der Fall sey, woron man in Langsdorfs Lehrb. der Hydraul. S. 96.

In der Wirklichkeit kann es keinen Canal geben, wo bei freier horizontaler Oberfläche die Bewegung gleichförmig wäre; denn bei jeder Bewegung leidet das Fluidum einigen Widerstand, und um diesen zu überwinden, ist ein Abhang der Oberfläche nothwendig. Wollte man diesen Widerstand mit in Betrachtung ziehen, so käme er als beschleunigende Kraft, die der Richtung der Bewegung entgegenwirkt, in der Rechnung vor; aber dieses würde die Formeln sehr verwickelt machen, weil dann die bisher immer angenommene Voraussetzung, daſs die von den beschleunigenden Kräften abhängenden Glieder im Werthe von $dp$ für sich integrabel sind, nicht mehr so geradezu gelten könnte; denn der Widerstand ist eine Function der Geschwindigkeit, und die Integrabilität jener Glieder findet also nicht ohne Ausnahme Statt.

213 *e*). Zweites Exempel. Die Oberfläche sey eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymtote der horizontale Boden selbst ist.

Rechnet man die Coordinaten der Oberfläche vom Mittelpunkte der Hyperbel an, und setzt ihre halbe Axe $= a$, so hat man $s = \frac{a^2}{2x}$ für jeden Punkt der Oberfläche. Es muſs also hier

$$\text{Const.} = {}^1F : \left(x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right) - {}^1F : \left(x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right)$$

---

und Woltmans Beitr. z. hydr. Archit. Band I. S. 140. mehreres lesen kann. Aus der oben geführten Rechnung erhellt der Grund des Irrthums leicht. Langsdorfs Vertheidigung des Satzes, daſs der Druck bei der horizontalen Bewegung, wenn sie so, wie hier angenommen ist, geschieht, ungeändert bleibe, ist also richtig; aber was in derselben Anmerkung sogleich darauf folgt, daſs man bei nicht horizontalem Boden aus dem eben bestimmten Drucke durch Zerlegung den auf den Boden senkrechten Druck finde, ist ganz fälsch — jener Druck ist selbst der auf jede Fläche, worauf er wirkt, senkrechte Druck. B.

seyn. Man nehme nun an, daſs die Function ${}^1F:x$ durch eine Reihe ausgedrückt werde:

$${}^1F:x = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + +$$

und verstehe unter $\alpha$ die höchste Potenz, welche in der Reihe vorkommt, so daſs $\beta$ kleiner als $\alpha$, und jede folgende Potenz noch niedriger sey, so hätte man

$$\text{Const.} = A\left\{\left[x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right]^\alpha - \left[x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right]^\alpha\right\}$$
$$+ B\left\{\left[x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right]^\beta - \left[x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right]^\beta\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

Entwickelt man diese Reihen, so kommt

$$\text{Const} = A.\alpha.a^2\sqrt{-1}.x^{\alpha-2} - \frac{A.\alpha.(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3.}\frac{}{2^2}.a^6\sqrt{-1}.x^{\alpha-6}$$
$$+ B\beta.a^2\sqrt{-1}.x^{\beta-2} - \frac{B\beta.(\beta-1)(\beta-2).a^6\sqrt{-1}.x^{\beta-6}}{1.2.3.\quad 2^2} + \text{etc.}$$
$$+ C\gamma.a^2\sqrt{-1}.x^{\gamma-2} - + \text{etc.}$$
$$+ \frac{A.\alpha.(\alpha-1)\ldots.(\alpha-4)a^{10}\sqrt{-1}.x^{\alpha-10}}{1.2.3.4.5.\quad 2^4} - \text{etc.}$$

wo man leicht die ähnlichen Reihen, wodurch die folgenden Potenzen ausgedrückt werden, hinzufügen könnte. Da nun $\beta$ die zunächst auf $\alpha$ folgende niedrigere Potenz ist, so kann das Glied, welches $x$ zur Potenz $\beta - 2$ erhoben enthält, nicht das Glied aufheben, wo die Potenz $\alpha - 2$ vorkommt, die Potenz $\gamma - 2$ ist noch kleiner, kurz es kommt kein Glied vor, wo die Potenz von $x$ mit $\alpha - 2$ übereinkäme; das Glied, welches $x^{\alpha-2}$ enthält, muſs also selbst beständig seyn, das ist $\alpha - 2$ muſs $= 0$ seyn. In diesem Falle aber fallen alle folgenden in $A$ multiplicirten Glieder weg, und das Glied, welches den Factor $x^{\beta-2}$ hat, bleibt wieder isolirt stehen, mithin muſs auch $\beta = 2$ seyn; kurz es kommt in der ganzen fingirten Reihe keine andre Potenz vor, als die zweite, und es ist ${}^1F:x = Ax^2$,

$$\text{also } \frac{d.\,{}^1F:x}{dx} = F:x = 2Ax.$$

In jedem Punkte der Oberfläche ist also

$$u = 2A\left[x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right] + 2A\left[x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right],$$

$$\text{oder } u = 4Ax$$

$$\text{und } w = -\frac{2A.a^2}{x}.$$

Der Druck aber ist $p = b\left[h - \frac{a^2}{2x}\right] - \frac{bA^2}{g}\left[4x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right]$,

also nicht in jedem Punkte der Oberfläche gleich, diese kann daher keine freie Oberfläche seyn.

In jedem andern Punkte wird

$$u = 4Ax,$$

$$w = -4Az,$$

$$\text{und } p = b\,(h - z) - \frac{4bA^2}{g}\,(x^2 + z^2),$$

wo $h$ eine unbestimmte beständige Gröſse ist.

Die in jeder Secunde durch irgend einen verticalen Querschnitt laufende Wassermasse ist $= \int u\,dz = 4Axs = 2Aa^2$, wenn also diese gegeben ist, so ist die Zahl $A$ bekannt; um aber $h$ zu bestimmen, müſste der Druck in irgend einem Punkte bekannt seyn.

213 $f$). In dem eben betrachteten Falle kann man die Form der Function $F:x$ auch noch auf einem andern Wege bestimmen. Zufolge der allgemeinen Lehren des letzten Problems muſs nämlich

$$\left[1 + \frac{ds}{dx}\sqrt{-1}\right].F:(x + s\sqrt{-1}) = \left[1 - \frac{ds}{dx}\sqrt{-1}\right].F:(x - s\sqrt{-1})$$

seyn, wenn $s$ die Ordinate der Oberfläche ist, die mit der Abscisse $x$ zusammengehört. Für die hyperbolische Oberfläche ist $\frac{ds}{dx} = -\frac{a^2}{2x^2}$, also muſs hier

$$\left(x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right) . F : \left(x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right)$$
$$= \left(x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right) . F : \left(x - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x}\right)$$

seyn. Nenne ich hier $x - \dfrac{a^2\sqrt{-1}}{2x} = \omega$,

$$\text{und } x + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2x} = \omega + \Delta\omega,$$

wo $\Delta\omega$ eine endliche Differenz $= \dfrac{a^2\sqrt{-1}}{x}$ bezeichnet, um welche $\omega$ wächst, so soll $\dfrac{F:(\omega + \Delta\omega)}{\omega + \Delta\omega} = \dfrac{F:\omega}{\omega}$ seyn.

Bezeichne ich nun die Gröfse, um welche $F:\omega$ wächst, wenn $\omega + \Delta\omega$ aus $\omega$ wird, mit $\Delta(F:\omega)$, so läfst sich diese Gleichung auch so ausdrücken:

$$\omega\,[F:\omega + \Delta(F:\omega)] = (\omega + \Delta\omega)\,F:\omega,$$
$$\text{oder } \omega\,.\,\Delta(F:\omega) = \Delta\omega\,.\,F:\omega,$$

das heifst, die Function $F:\omega$ hat zu ihrer Differenz eben das Verhältnifs, welches die Gröfse $\omega$ zu der ihrigen hat: dieses aber findet Statt, wenn $F:\omega = B\omega$ und $B$ eine beständige Gröfse ist.

Diese Auflösung kommt mit der vorigen überein, wenn man hier statt $B$ den dortigen Werth $= 2A$ setzt: ich führe sie an, weil man vielleicht in andern Fällen bald diese Methode, bald die vorige, mit mehr Vortheil möchte brauchen können. In den meisten Fällen aber wird die Rechnung allzuverwickelt, und die Bestimmung der Function $F$ gelingt nur selten, indefs läfst sich doch hoffen, dafs die Schwierigkeit der Rechnung sich noch in mehrern Fällen möchte besiegen lassen, und dann könnte diese Methode sehr mannigfaltige Anwendung erlauben.

213 *g*). Zuweilen können auch einzelne Umstände der Bewegung dazu dienen, die Function $F$, wenn auch nicht völlig, doch wenigstens etwas näher zu bestimmen. Sollte

z. B. bei horizontalem Boden die Bewegung aller Theilchen, die in der durch den Anfangspunkt der Abscissen $x$ gezognen Verticale liegen, horizontal seyn, so müfste für $x = 0$, $w = 0$ werden bei jedem Werthe von $z$, man hätte also $F:(+z\sqrt{-1}) = F:(-z\sqrt{-1})$, oder die Function $F:z$ müfste so von der Gröfse $z$ abhängen, dafs sie einerlei Werth erhielte, $z$ möchte positiv oder negativ seyn. Gäbe es eine zweite Verticale, wo wieder die Bewegung aller Theilchen horizontal wäre, und wäre für diese Stelle $x = a$, so müfste

$$w = \sqrt{-1}\, F:(a + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,.\,F:(a - z\sqrt{-1}) = 0$$

$$\text{und } F:(a + z\sqrt{-1}) = F:(a - z\sqrt{-1})$$

seyn für jeden Werth von $z$. Aber vermöge der ersten Bedingung ist

$$F:(a - z\sqrt{-1}) = F:(-a + z\sqrt{-1}), \text{ also auch}$$

$$F:(a + z\sqrt{-1}) = F:(-a + z\sqrt{-1}) = F:(-a - z\sqrt{-1}),$$

und $w$ wird wieder $= 0$, wenn $x = -a$ ist: also gibt es noch eine dritte Verticale, wo die Bewegung wieder ganz horizontal ist, wenn sie es in jenen beiden war. Man kann weiter schliefsen: da $a$ eine beständige Gröfse ist, so folgt aus $F:(a + z\sqrt{-1}) = F:(-a + z\sqrt{-1})$, auch

$$F:(2a + z\sqrt{-1}) = F:(+z\sqrt{-1}) = F:(-z\sqrt{-1}),$$

und aus $F:(a - z\sqrt{-1}) = F:(-a + z\sqrt{-1})$,

$$\text{auch } F:(2a - z\sqrt{-1}) = F:(+z\sqrt{-1}) = F:(-z\sqrt{-1}).$$

Es wird also für $x = 2a$, wo

$$w = \sqrt{-1}\,.\,F:(2a + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\, F:(2a - z\sqrt{-1}) \text{ ist,}$$

$w$ abermals $= 0$ für jeden Werth von $z$, und man überzeugt sich leicht, dafs eben das erfolgt, wenn $x = \pm na$ ist, $n$ mag, welche ganze Zahl man will, bedeuten.

Wenn also für $x = 0$ und $x = a$ die Bewegung in allen Höhen horizontal ist, so wird für $x = 0$ oder $x = 2a$, oder $x = \pm 2na$, allemal $u = 2\,.\,F:(+z\sqrt{-1}$, aber für $x = \pm a$, $x = 3a$, $x = \pm(2n + 1)a$, $u = 2F:(a + z\sqrt{-1})$. Betrachtet man hingegen andre Verticallinien, wo $x = y$ oder $= \pm(2a + y)$, oder $= \pm(2na + y)$, so wird in allen diesen um $2a$ von einander entfernten Verticallinien

$$u = F:(y + z\sqrt{-1}) + F:(y - z\sqrt{-1}),$$
$$w = \sqrt{-1}\,.\,F:(y + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,.\,F:(y - z\sqrt{-1}),$$

folglich ist die ganze Bewegung in allen denjenigen Punkten gleich, die in gleichen Höhen um $2a$ von einander abliegen. Hat also der flüssige Körper eine freie Oberfläche, deren höchster Punkt mit der Abscisse $x = y$ zusammengehört, so kommen eben so hohe Punkte der Oberfläche wieder vor, wenn man die Abscisse $x = \pm(2a + y)$ oder $= \pm(2na + y)$ nimmt, und die ganze Oberfläche bildet eine wellenförmige Linie.

Allen diesen Bedingungen für die Form der Function $F$, welche ich aus der Voraussetzung, daſs in zwei verschiedenen Verticallinien die ganze Bewegung horizontal sey, hergeleitet habe, entspricht der Werth

$$F:x = f:\left\{r\,.\,\text{Cos.}\,\frac{x}{r}\right\},$$

wenn ich $r = \frac{a}{\pi}$ annehme. Denn der Cosinus des Bogens $\frac{x}{r}$ erhält einerlei Werthe für positive und negative $x$, und einerlei Werthe, $x$ mag $= y$ oder $= \pm 2nr\pi + y$ seyn. Also thut die Voraussetzung $F:x = f:\left\{r\,\text{Cos.}\,\frac{x}{r}\right\}$ wenigstens den Bedingungen Genüge, obgleich nicht erwiesen ist, daſs sie alle Fälle, wo die Bewegung an einigen Stellen horizontal wird, umfasse. Diese Voraussetzung verdiente daher wohl eine nähere Betrachtung, aber ich habe keinen Fall gefunden, wo die aus der Figur der Oberfläche abgeleiteten Formeln nicht allzuverwickelt und unauflöslich wurden. Nimmt man aber die Form der Function $f$ willkürlich an, so kommt man meistens auf Fälle, deren Untersuchung ohne Nutzen ist, und die gar nicht vorkommen können.

213 *h*). Ich gehe jetzt zu einer andern Methode, um Schlüsse aus den allgemeinen Formeln zu ziehen, über.

Es gelten dabei noch immer die Voraussetzungen: 1) dafs alle Theilchen in parallelen Verticalebenen fortrücken, dafs man daher die auf diese Ebenen senkrechte Geschwindigkeit $v = 0$ setzen kann, 2) dafs blos die Schwere auf den flüssigen Körper wirkt, 3) dafs die Bewegung von der Zeit unabhängig oder im Beharrungsstande ist, und 4) dafs in allen jenen parallelen Ebenen die Bewegung ganz einerlei sey, nämlich wenn man irgend eine Linie senkrecht auf diese Ebenen zieht, alle in derselben Senkrechten liegenden Theilchen sich völlig auf einerlei Weise bewegen, so dafs man nur die Bewegung in einer dieser Ebenen zu betrachten, und auf die dritte Dimension der Theilchen des Flüssigen gar nicht zu sehen braucht. Die folgenden Untersuchungen unterscheiden sich aber von den bisherigen dadurch, dafs wir die Voraussetzung zum Grunde legen: alle Theilchen des flüssigen Körpers rücken auf denjenigen Linien fort, in welchen der Druck gleich grofs ist; so dafs, wenn man sich durch alle Punkte, in welchen einerlei Druck Statt findet, Linien gezogen denkt, diese zugleich den Weg aller in denselben liegenden Theilchen bezeichnen. Ist z. B. die Curve $AB$ (Fig. 32. *a*) durch alle Punkte gezogen, in welchen der Druck $= a$ ist, so ist hier zugleich $AB$ der Weg, welchen jedes in dieser Curve liegende Theilchen $Z$ nimmt. Denkt man sich zwei dieser Curven $ab$, $AB$ sehr nahe an einander gezogen, wo in der einen der Druck $= a$, in der andern $= a + da$ seyn mag, so mufs offenbar die Bewegung so beschaffen seyn, dafs erstlich die Geschwindigkeit der zwischen diesen Curven befindlichen Theilchen dem senkrechten Abstande der Curven von einander umgekehrt proportional sey — weil kein Theilchen aus diesen Gränzen heraustreten soll, also durch alle Querschnitte eine gleiche Quantität fliefsen mufs — und zweitens, dafs der Druck, welchen die zwischen beiden Curven liegenden Theilchen ausüben, überall gleich $= da$ sey. Uebrigens wird hier keine bestimmte Gestalt des Bodens vorausgesetzt, sondern wir betrachten das Fluidum als unbegränzt, wenigstens als

nach der Richtung derjenigen Ebenen unbegränzt, in welchen die Theilchen sich fortbewegen.

214. Problem 42. Alle Theilchen des Flüssigen rücken (indem die Voraussetzungen des vorigen §. gelten) auf denjenigen Linien fort, in welchen der Druck gleich groſs ist; man soll bestimmen, unter welchen Umständen eine solche Bewegung bestehen kann.

Auflösung. Wenn wir die allgemeinen Gleichungen des 195. §. durch die Voraussetzungen beschränken, welche bisher angenommen und im vorigen §. angeführt worden, so ist der Druck $p = C - z - \frac{u^2 + w^2}{4g}$, wenn man die Dichtigkeit des flüssigen Körpers $= 1$ setzt. Für diejenigen Curven also, in welchen einerlei Druck $p = a$ herrscht, muſs $\frac{u^2 + w^2}{4g} = C - z - a$ seyn, und $(u^2 + w^2)$ bezeichnet hier das Quadrat der Geschwindigkeit in dem Punkte, worauf sich auch $z$ bezieht; $C$ aber ist eine unbestimmte beständige Gröſse. Ich will diese Geschwindigkeit $= v$ setzen, um kürzer $\frac{v^2}{4g} = C - a - z$ zu erhalten.

Es sey nun $AB$ (Fig. 32. $a$) ein Theil der Curve, in welcher der Druck $= a$ ist, und $ab$ sey die zunächst oberhalb liegende, wo er $= a - da$ in jedem Punkte ist.

Nimmt man an, daſs für $x = 0$ die Ordinate der Linie $AB$, $z = h$, und die Geschwindigkeit in dem so bestimmten Punkte $v = c$ werde, so erhält man zur Bestimmung der Gröſse $C$

$$\frac{c^2}{4g} = C - a - h, \text{ also } \frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} + h - z.$$

In demselben Punkte, wo $x = 0$ und $z = h$ ist, sey ferner die Richtung der Bewegung horizontal *), und der Nor-

*) Ich werde nachher zeigen, daſs diese anscheinend willkürliche Voraussetzung die Allgemeinheit der Untersuchung nicht einschränkt.

malabstand der beiden Curven $AB$, $ab$ sey hier $= dh$. so wird offenbar an jeder andern Stelle in $Z$ der Normalabstand $= \frac{c\,dh}{v}$ seyn. Es läſst sich also jetzt der Druck bestimmen, welchen das Theilchen $Zy$, welches zwischen beiden Curven liegt, auf den Punkt $Z$ ausübt. Da nämlich die Curve in dem unbestimmten Punkte $Z$ unter einem Winkel gegen den Horizont geneigt ist, dessen Tangente $= \frac{dz}{dx}$ ist, so drückt die Masse $Zy$ nicht mit ihrer ganzen Schwere $= \frac{c\,dh}{v}$ auf die Linie $AB$, sondern nur mit einem Theile derselben, der $= \frac{c\,dh\,.\,dx}{v\,.\,\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ ist.

Wegen der Schwungkraft aber, vermöge welcher es nach der Richtung der Tangente fortzugehen strebt, übt es den Druck $= \frac{c\,dh}{v}\,.\,\frac{v^2}{2gr}$ aus, wenn $r$ den Krümmungshalbmesser an dieser Stelle bezeichnet, und der letztere Druck vereinigt sich mit dem erstern, wenn die Curve gegen die Abscissenlinie convex ist; im entgegengesetzten Falle muſs er davon abgezogen werden. Da diese Verschiedenheit der Zeichen durch die Formeln für den Krümmungshalbmesser selbst angegeben wird, so kann ich allgemein den Druck auf den Punkt $Z$, sofern er nämlich von dem Theilchen $Zy$ herrührt,

$$= \frac{c\,dh}{v}\left\{\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} - \frac{v^2}{2gr}\right\}$$

setzen, und dieser soll überall gleich $= da$ seyn.

Setze ich hier für den Krümmungshalbmesser seinen Werth $r = \frac{dz}{d\,.\,\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}}$, so ist

$$\frac{v\,da}{c\,dh} = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} - v^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}}{2\,g\,dz},$$

oder, weil auch $2\,g\,dz = -v\,dv$ ist, (wegen der Voraussetzung $dp = -dz - \frac{v\,dv}{2\,g} = 0$),

$$\frac{v\,dv \,.\, da}{c\,dh} = \frac{dx\,dv}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} + v \,.\, d \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}},$$

$$\text{also } v^2 \,.\, \frac{da}{2\,c\,dh} = v \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} + \text{Const.}$$

Die Constans wird bestimmt durch die schon erwähnte Voraussetzung, dafs in eben dem Punkte, wo $v = c$ ist, die Richtung der Curve horizontal sey, denn dort wird $\frac{c\,da}{2\,dh} = c +$ Const., also allgemein, wenn ich $\frac{da}{dh} = m$, und für $v^2$ seinen Werth setze,

$$\frac{v\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} = c + \frac{2\,g\,m}{c}\,(h - z).$$

Dieses ist die horizontale Geschwindigkeit in dem Punkte $Z$; die verticale Geschwindigkeit ist daher

$$\frac{v\,dz}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} = 2\sqrt{g} \,.\, \sqrt{(h - z)} \,.\, \sqrt{\left[1 - m - \frac{g\,m^2}{c^2}\,(h - z)\right]}.$$

Quadrirt man die erstern, und setzt für $v^2$ seinen Werth, so ergibt sich

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{g} \cdot \sqrt{(h - z)}}\; \frac{\left[\frac{1}{2}c + \frac{g\,m}{c}\,(h - z)\right]}{\sqrt{\left[1 - m - \frac{g\,m^2}{c^2}\,(h - z)\right]}},$$

und diese Gleichung bestimmt die Natur der Curve $AB$, oder vielmehr im Allgemeinen die Natur aller Curven, in welchen der Druck gleich grofs ist. Diese Curven werden indefs nicht alle gleich, weil $c$, $h$ und $m$ nicht bei allen einerlei sind.

Um diese Gleichung zu integriren, setze ich

$$\frac{gm}{c^2(1-m)}(h-z) = \text{Sin.}\,\varphi^2,$$

dann wird $dz = -\frac{c^2 d\varphi(1-m)}{gm^2}\,\text{Sin.}\,2\varphi$

und $dx = -\frac{c^2 d\varphi}{mg} - \frac{2c^2 d\varphi\,(1-m)\,\text{Sin.}\,\varphi^2}{m^2 g}$,

woraus folgt $x = -\frac{c^2\varphi}{m^2 g} + \frac{c^2(1-m)}{2m^2 g}\,\text{Sin.}\,2\varphi$,

wo keine Constans hinzukommt, weil $x$ verschwindet, wenn $z = h$, oder $\varphi = 0$ ist. Da $z$ einerlei Werth behält, $\varphi$ mag positiv oder negativ seyn, so gehört zu eben dem $z$ auch die Abscisse

$$x = \frac{c^2\varphi}{m^2 g} - \frac{c^2(1-m)}{2m^2 g}\,\text{Sin.}\,2\varphi,$$

und wenn man hier $\frac{c^2}{2m^2 g} = k$

und $\frac{c^2(1-m)}{2m^2 g} = l$ setzt,

also $h - z = l\,(1 - \text{Cos.}\,2\varphi)$

und $\text{Sin.}\,2\varphi = \frac{\sqrt{[2l(h-z) - (h-z)^2]}}{l}$, so wird

$$x = -\sqrt{[2l(h-z) - (h-z)^2]} +$$
$$+ k.\,\text{Arc.}\,\text{Sin.}\,\frac{\sqrt{[2l(h-z) - (h-z)^2]}}{l}.$$

Dieses ist die Gleichung für eine verlängerte Cycloide, wo der Halbmesser des rotirenden Kreises $= k$, der Abstand des die Cycloide beschreibenden Punkts vom Centro $= l$ ist. Im Allgemeinen ist es also gewifs, dafs alle Theilchen in Cycloiden fortrücken, aber es mufs noch bestimmt werden, wie die verschiedenen Cycloiden gegenseitig von einander abhängen.

Aus dem oben angegebenen Werthe der verticalen Geschwindigkeit in jedem Punkte sieht man, dafs dieselbe

zweimal verschwindet, einmal, wenn $z = h$, das anderemal, wenn $z = h - 2l$ ist; in jenem Falle ist die Geschwindigkeit $= c$, in diesem $= \surd(c^2 + 8gl)$, und da dort der Abstand der beiden Curven $AB$, $ab$, $= dh$ war, so muſs er hier $= \frac{c\,dh}{\surd(c^2 + 8gl)}$ seyn. Die Curve $ab$ muſs ebenfalls cycloidisch seyn, wofern also auch für sie der höchste Punkt der Abscisse $x = 0$ zugehört, so kann sie nur darin von der Linie $AB$ verschieden seyn, daſs $k$ und $l$ andre Werthe haben, aber man überzeugt sich leicht, daſs $k$ für alle Cycloiden einerlei Werth haben muſs; denn sonst würden die höchsten Punkte, welche den Abscissen $x = 2k\pi$, $x = 4k\pi$ u. s. w. zugehören, nicht mehr bei allen Cycloiden zusammentreffen, und man könnte $ab$ so weit fortsetzen, daſs der höchste Punkt dieser Cycloide mit dem niedrigsten der $AB$ in einer Verticale läge, welches offenbar nicht bestehen kann. Ich kann also, wenn ich von einer Cycloide zur andern fortgehe, blos $l$ als veränderlich betrachten; da nun für den höchsten Punkt der Cycloide $ab$ die Ordinate $z = h + dh$ wird, für ihren niedrigsten Punkt aber $z = h - 2l + \frac{c\,dh}{\surd(c^2 + 8gl)}$, so ist der Abstand des Punktes, welcher bei der Rotation diese Cycloide beschreibt, vom Centro

$$= l + \tfrac{1}{2}dh \left\{1 - \frac{1}{\surd\left(1 + \frac{8gl}{c^2}\right)}\right\},$$

oder, wenn ich diesen $= l + dl$ setze,

$$\frac{2\,dl}{1 - \frac{1}{\surd\left(1 + \frac{8gl}{c^2}\right)}} = dh.$$

Es läſst sich also $l$ allgemein aus $c$, $h$ und $g$ bestimmen. Aber $c$ ist sehr veränderlich, wir setzten nämlich vorhin

$\frac{c^2}{2gm^2} = k$ und $k(1-m) = l$, also $m = \frac{k-l}{k}$ und

$c^2 = 2g\frac{(k-l)^2}{k}$, ferner $1 + \frac{8gl}{c^2} = 1 + \frac{4kl}{(k-l)^2} = \frac{(k+l)^2}{(k-l)^2}$,

$$\text{folglich } dh = \frac{dl}{l}(k+l),$$

$$h = l + k\log.\frac{l}{f} + \text{Const.}$$

Kennt man nun den Werth von $l$ für irgend einen Werth von $h$, daſs er z. B. da $= nk$ sey, wo $h = h'$ ist, so wird Const. $= h' - nk - k\log. nk$,

$$\text{also } \frac{h - h' + nk - l}{k} = \log.\frac{l}{nk},$$

woraus $l$ sich nicht bequem ausdrücken läſst. Weil aber $h - l$ die Höhe des Mittelpunkts ist, um welchen der die Cycloide beschreibende Punkt sich dreht, so hat man eine Gleichung zwischen dieser und dem Abstande $l$. Und hiemit sind alle Umstände der Bewegung bestimmt *).

214 *b*). Ehe ich weiter gehe, muſs ich einige Voraussetzungen, die im vorigen §. zu leichtsinnig angenommen scheinen könnten, rechtfertigen. Die erste ist, daſs wir annahmen, die Curve habe irgend einen Punkt, wo sie horizontal sey; die zweite ist die allgemeine Bestimmung der Gröſse $l$.

Um die Bestimmung der Curve $AB$ durch gar keine Voraussetzung zu beschränken, nehme ich an, daſs für $x = 0$, $z = h$ und $v = c$ werde, wie vorhin, lasse aber die Richtung der Curve in diesem Punkte unbestimmt, und

---

*) Ich bin hier gröſstentheils Herrn Gerstnern gefolgt. Man vergleiche desselben Abhandlung über die Theorie der Wellen, in den Abh. der böhmischen Gesellsch. zu Prag. — Auch besonders abgedruckt Prag 1804. bei Haase und Widtmann.

nenne den Winkel, welchen sie hier mit dem Horizonte macht, $=\alpha$: dieses ändert die beständige Gröſse, welche in den Werth der horizontalen Geschwindigkeit eingeführt wird. Wir fanden nämlich

$$\frac{v\,dx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}=\text{Const.}+\frac{m}{2c}[c^2+4g(h-z)],$$

also jetzt, weil Const. $= c\,\text{Cos.}\,\alpha-\frac{1}{2}mc$ wird,

$$\frac{v\,dx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}=c\,\text{Cos.}\,\alpha+\frac{2gm}{c}(h-z),$$

und daraus folgt

$$dx=\frac{c\,dz\left\{\text{Cos.}\,\alpha+\frac{2gm}{c^2}(h-z)\right\}}{\sqrt{\left\{c^2\text{Sin.}\alpha^2+4g(h-z)\left[1-m\,\text{Cos.}\,\alpha-\frac{gm^2}{c^2}(h-z)\right]\right\}}}.$$

Da hier der unter dem Wurzelzeichen stehende Theil

$$=-\left[\frac{2gm}{c}(h-z)-\frac{c}{m}(1-m\,\text{Cos}\,\alpha)\right]^2+c^2\left[1-\frac{2\,\text{Cos}\,\alpha}{m}+\frac{1}{m^2}\right]$$

ist, so wird die Gleichung bequemer ausgedrückt, wenn man

$$\frac{2gm(h-z)}{c}-\frac{c}{m}(1-m\,\text{Cos.}\,\alpha)=y \text{ setzt;}$$

auch will ich $1+\frac{1}{m^2}-\frac{2\,\text{Cos.}\,\alpha}{m}=\gamma^2$ nennen.

Hiedurch wird $dz=-\frac{c\,dy}{2gm}$ und

$$dx=-\frac{c\,dy}{2gm}\cdot\frac{\left[y+\frac{c}{m}\right]}{\sqrt{(c^2\gamma^2-y^2)}}$$

$$\text{oder } dx=-\frac{dy}{2gm\gamma}\,\frac{\left[y+\frac{c}{m}\right]}{\sqrt{\left[1-\frac{y^2}{c^2\gamma^2}\right]}},$$

also $x = \frac{c^2}{2gm^2}$ Arc. Cos. $\frac{y}{c\gamma} + \frac{c}{2gm}\sqrt{(\gamma^2c^2 - y^2)}$ + Const.

oder, welches einerlei ist,

$$x = \frac{c^2}{2gm^2} . \text{Arc. Sin} \frac{\sqrt{(c^2\gamma^2 - y^2)}}{c\gamma} + \frac{c}{2gm}\sqrt{(\gamma^2c^2 - y^2)} + \text{Const.}$$

Für $z = h$ wird $y = c \text{ Cos. } \alpha - \frac{c}{m}$, für diesen Werth von $y$ muſs $x$ verschwinden, also, wenn man für $\gamma$ seinen Werth setzt:

$$0 = \text{Const} + \frac{c^2 \text{ Sin } \alpha}{2gm} + \frac{c^2}{2gm^2} \text{ Arc. Sin.} \left[\frac{\text{Sin. } \alpha}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{m^2} - \frac{2 \text{ Cos } \alpha}{m}\right)}}\right]$$

werden. Nenne ich also

$$\text{Arc. Sin.} \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{c^2\gamma^2}\right)} = \varphi$$

$$\text{Arc. Sin.} \left(\frac{\text{Sin. } \alpha}{\gamma}\right) = \psi, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{c^2}{2gm}(\gamma \text{ Sin. } \varphi - \gamma \text{ Sin. } \psi) + \frac{c^2}{2gm^2}(\varphi - \psi).$$

Verändert man aber den Anfangspunkt der Abscissen so, daſs die neue Abscisse $X$ verschwindet, wenn $y = c\gamma$ ist, so wird

$$X = \frac{c^2}{2gm^2} \text{ Arc. Sin.} \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{c^2\gamma^2}\right)} + \frac{c^2\gamma}{2gm}\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{c^2\gamma^2}\right)},$$

und es gehört dann mit der Abscisse $X = 0$ die Ordinate

$$z = h - \frac{c^2}{2gm^2}(1 + \gamma m - m \text{ Cos. } \alpha)$$

zusammen; nimmt man also andre Ordinaten $Z$ so, daſs

$$-Z = h - z - \frac{c^2}{2gm^2}(1 + \gamma m - m \text{ Cos. } \alpha)$$

wird, so findet man

$$-Z = \frac{c}{2gm}(y - c\gamma) \text{ und}$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{c^2 \gamma Z}{g m} - Z^2\right)} + \frac{c^2}{2 g m^2} \text{ Arc. Sin. } \left[\frac{\sqrt{\left\{\frac{c^2 \gamma Z}{g m} - Z^2\right\}}}{\frac{c^2 \gamma}{2 g m}}\right],$$

welches wieder eine Gleichung für die Cycloide ist, wo $l = \frac{c^2 \gamma}{2 g m}$ genommen werden muſs, weil $c$ hier die Geschwindigkeit in demjenigen Punkte bedeutet, wo der Neigungswinkel $= \alpha$ ist; auf eben diesen Punkt bezieht sich auch $m$, und wenn $m$ hier $= \frac{d\alpha}{dh}$ ist, so bedeutet $dh$ den Abstand der beiden Curven in eben diesem Punkte.

Hieraus erhellt also vollständig, daſs bei keiner andern Bewegung, als wenn die Theilchen in Cycloiden fortrücken, die Voraussetzung des Problems, daſs der Weg jedes Theilchens einerlei sey mit der Curve, in welcher gleicher Druck Statt findet, bestehen könne.

214 *c*). Bei der Bestimmung der Gröſse $l$ ist zwar in der Auflösung des Problems bewiesen, daſs kein andrer Werth von $dl$ angenommen werden könne (wenigstens, wenn die höchsten Punkte aller Cycloiden in derselben Verticale liegen); damit aber ist noch nicht erwiesen, daſs bei dem dort angegebenen Werthe von $dl$ wirklich der Normalabstand beider Cycloiden überall $= \frac{c\,dh}{v}$ sey; denn es könnte ja seyn, daſs die angenommene Art der Bewegung ganz unmöglich wäre. Um also zu prüfen, ob der gefundene Werth von $dl$ den Bedingungen entspreche, suche ich einen allgemeinen Ausdruck für den senkrechten Abstand beider Cycloiden von einander in jedem Punkte.

Ich setze für die erste Cycloide $AB$ (Fig. 32 *a.*)

$$h - z = l\,(1 - \text{Cos.}\,\varphi),$$
$$x = k\varphi - l \text{ Sin.}\,\varphi;$$

für die zweite

$$h + dh - z' = (l + dl)\,(1 - \text{Cos.}\,\varphi'),$$
$$x' = k\varphi' - (l + dl) \text{ Sin.}\,\varphi'.$$

Sollen hier die Punkte, deren einer durch die Coordinaten $x, z$, der andre durch $x', z'$ bestimmt ist, sehr nahe bei einander liegen, so ist $\varphi' - \varphi$ sehr klein, und man kann

$$\text{Sin.}\,\varphi' = \text{Sin.}\,\varphi + (\varphi' - \varphi)\,\text{Cos.}\,\varphi,$$

$$\text{Cos.}\,\varphi' = \text{Cos.}\,\varphi - (\varphi' - \varphi)\,\text{Sin.}\,\varphi$$

setzen, also

$$x' - x = (k - l\,\text{Cos.}\,\varphi)(\varphi' - \varphi) - dl\,\text{Sin.}\,\varphi,$$

$$z' - z = dh - l\,\text{Sin.}\,\varphi\,.\,(\varphi' - \varphi) - dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi).$$

Für zwei Punkte also in den beiden Cycloiden, deren Ordinaten gleich $z' = z$ sind, muſs

$$\varphi' - \varphi = \frac{dh - dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi)}{l\,\text{Sin.}\,\varphi}$$

seyn, und der Unterschied der Abscissen beider ist dann

$$x' - x = \frac{(k - l\,\text{Cos.}\,\varphi)\,dh - (k + l)\,dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi)}{l\,\text{Sin.}\,\varphi}.$$

Dieser Ausdruck gibt also den horizontalen Abstand der beiden Cycloiden für jeden durch $\varphi$ bestimmten Punkt der Linie $AB$ an. Da nun die Normallinie von $AB$ auch als senkrecht auf $ab$ kann betrachtet werden, so ist, wenn der Winkel, welchen sie mit der Abscissenlinie macht, $= \omega$ heiſst, das Stück $Zy = Zw\,.\,\text{Cos.}\,\omega$, und $Zw$ ist das, was wir eben $(x' - x)$ genannt haben: Cos. $\omega$ aber ist $= -\frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$, also, weil

$$\frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} = \frac{-\,l\,\text{Sin.}\,\varphi}{\sqrt{(k^2 - 2kl\,\text{Cos.}\,\varphi + l^2)}},$$

$$Zy = \frac{(k - l\,\text{Cos.}\,\varphi)\,dh - (k + l)\,dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi)}{\sqrt{(k^2 - 2kl\,\text{Cos.}\,\varphi + l^2)}}.$$

Dieser Ausdruck für den Normalabstand zweier Cycloiden ist noch allgemein, $dh$ und $dl$ mögen Werthe haben, welche man will: in unserm Probleme aber sind die beiden Curven dem Gesetze unterworfen, daſs

$$Zy = \frac{c\,dh}{v} = \frac{dh}{\sqrt{\left\{1 + \frac{4g(h - z)}{c^2}\right\}}}$$

seyn mufs, oder $= \frac{dh}{\sqrt{\left(1 + \frac{2kl(1 - \text{Cos.}\,\varphi)}{(k-l)^2}\right)}}$,

wenn man für $c^2$ und $h - z$ die gehörigen Werthe setzt. Dieser letzte Werth läfst sich aber auch so ausdrücken:

$$Zy = \frac{(k-l)\,dh}{\sqrt{(k^2 - 2kl\,\text{Cos.}\,\varphi + l^2)}},$$

und da er dem allgemeinen Werthe gleich seyn mufs, so hat man

$$(k-l)\,dk = (k - l\,\text{Cos.}\,\varphi)\,dh - (k+l)\,dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi),$$

$$\text{oder } l\,dh(1 - \text{Cos.}\,\varphi) = (k+l)\,dl(1 - \text{Cos.}\,\varphi)$$

$$\text{und } dh = \frac{(k+l)\,dl}{l}$$

völlig, wie in der Auflösung des Problems. Die Bewegung kann also allerdings bestehen, wenn $k$ unveränderlich, $l$ aber der dortigen Bestimmung gemäfs ist.

214 *d*). Die Voraussetzung, dafs alle Theilchen auf denjenigen Linien fortrücken, in welchen der Druck gleich ist, findet also nur bei einer einzigen Art von wellenförmiger Bewegung Statt, deren Gesetze sich aus dem in der Auflösung des Problems Angegebenen leicht umständlicher ableiten lassen. Verfolgt man den Weg irgend eines Theilchens, so ist die horizontale und verticale Geschwindigkeit schon aus dem Obigen bekannt; man findet aber auch die Zeit, in welcher es von dem Gipfel einer Welle bis zum Gipfel der nächsten fortrückt; denn wenn $dt$ die Zeit bedeutet, welche es nöthig hat, um sich durch den horizontalen Raum $dx$ fortzubewegen, so findet man

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{c\,dx}{c^2 + 2gm\,(h-z)},$$

oder, wenn ich $h - z = l(1 - \text{Cos.}\,\varphi)$ setze, und für $c$ und $m$ und $dx$ ihre Werthe

$$dt = d\varphi \cdot \sqrt{\frac{k}{2g}},$$

$$t = \varphi\sqrt{\frac{k}{2g}}, \text{ welche } = 2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2k}{g}}$$

wird, für den Raum zwischen zwei Wellengipfeln. Die Zeit also, welche ein Wassertheilchen braucht, um über eine ganze Welle fortzulaufen, hängt blos von $k$, blos von der Breite der Welle ab, und wenn diese Zeit $= T$ bekannt ist, nebst der Geschwindigkeit des Wassers auf dem Gipfel der Welle $= c$, so kann man die Höhe der Welle $= 2 . l$ bestimmen, denn diese ist alsdann $= \frac{T}{\pi}\left(\frac{gT}{\pi} - c\right)$. Bei gleicher Breite sind also die Wellen desto höher, je kleiner die Geschwindigkeit des Wassers an ihrer höchsten Stelle ist.

Auch der Druck, den jedes Wassertheilchen leidet, läſst sich nun bestimmen, denn wir fanden

$$m = \frac{-da}{dh} = \frac{-dp}{dh} = +\left(\frac{k-l}{k}\right).$$

Setze ich also hier für $dh$ seinen Werth, so wird

$$da \text{ oder } dp = \frac{-dl(k^2 - l^2)}{kl},$$

und folglich, wenn an der Oberfläche $p = 0$ und $l = nk$ seyn soll, für jede andre Cycloide

$$p = k \log. \frac{nk}{l} - \frac{(k^2 n^2 - l^2)}{2k},$$

und die höchste Stelle derjenigen Cycloide, wo der Druck so groſs ist, liegt um die Tiefe

$$h - h = kn - l - k \log. \frac{l}{nk}$$

unter der höchsten Stelle der Oberfläche. Man darf aber diese Gleichung für den Druck nur da anwenden, wo die Bewegung ununterbrochen fortgeht, z. B. auf die Seitenwände des Canals, nicht aber auf einen die Bewegung hemmenden oder störenden Gegenstand.

214 *e*). Obgleich wir aber hiedurch im Besitze einer Theorie der Wellen zu seyn scheinen, so darf man doch diejenigen Umstände auch nicht übersehen, über welche

unsre Theorie keine genügende Aufschlüsse gibt. Diese sind vorzüglich das Fortlaufen der Welle auf der Oberfläche des Wassers und die Abhängigkeit der Wellenbewegung von der Tiefe des Gewässers. In Rücksicht des letztern Gegenstandes nämlich gibt die Theorie zwar an, daſs die tiefer liegenden Cycloiden immer flacher werden, aber erst in einer unendlichen Tiefe verwandeln sie sich in gerade Horizontallinien, und es könnten daher hiernach über einem horizontalem Boden nur Wellen, deren Höhe gegen die Tiefe des Wassers unendlich klein wäre, entstehen. Man sieht also zwar, daſs sehr hohe Wellen nur auf sehr tiefen Gewässern Statt finden können, aber über das Gesetz, wie Höhe der Wellen und Tiefe des Wassers von einander abhängen, fragt man die Theorie vergebens. Dagegen gibt sie aber ein Gesetz an, wie *l*, und eben dadurch auch wie *c* unterhalb der Oberfläche abnehmen soll, und in der Natur findet höchst wahrscheinlich auch dieses Gesetz nicht Statt; denn die Störung des Gleichgewichts, welche Wellen hervorbringt, findet meistens ursprünglich nur an der Oberfläche Statt, da hingegen unsre Theorie zu verlangen scheint (denn eigentlich fragen wir nach dem Anfange und der Ursache der Bewegung gar nicht), daſs sie nach einem genau bestimmten Gesetze auch in der Tiefe noch wirke.

Das Fortlaufen der Wellen streitet zwar mit der gegenwärtigen Theorie nicht, denn diese besteht allerdings auch dann noch, wenn die ganze Wassermasse mit einerlei Geschwindigkeit horizontal fortgeführt wird; aber wodurch diese allen Theilchen gemeinschaftliche Bewegung hervorgebracht werden mag, darüber belehrt die Theorie uns nicht. Indeſs ist so viel gewiſs — wenn die Geschwindigkeit *c* auf dem Gipfel einer Welle gröſser ist, als sie nach dem Werthe von *l* und *k* seyn sollte, so wird die reguläre Bewegung nicht eher Statt finden können, als bis die Wellen eine, jenem Uebermaaſse von Geschwindigkeit angemessene fortrückende Bewegung angenommen haben.

Ueber die Art, wie diese fortrückende Bewegung hiedurch hervorgebracht wird, liefsen sich allenfalls Untersuchungen anstellen, aber, so viel ich einsehe, dürften diese nicht auf die Voraussetzung gegründet werden, dafs der Weg jedes Theilchens mit den Linien, welche gleichen Druck leiden, einerlei sey. Nimmt man auf dieses Fortlaufen der Wellen Rücksicht, so läfst sich eine Wellenbewegung denken, wobei jedes Wassertheilchen blos einen Kreis beschreibt, also immer auf seine vorige Stelle zurückkommt. Dieses findet nämlich Statt, wenn man annimmt, die ganze Wassermasse werde eben so schnell rückwärts bewegt, als der Mittelpunkt des rotirenden Kreises, welcher die Cycloide beschreibt, vorwärts rückt *).

Ich breche diese Untersuchung hier ab, und schliefse diesen Abschnitt mit noch einigen allgemeinen Betrachtungen über die Fälle, wo die Formel $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ für sich integrabel ist, welchen dieser Abschnitt gewidmet war.

215. Der glückliche Erfolg der Integration in dem Falle, da $w$ nur von zwei veränderlichen Gröfsen abhing (§. 199.), oder $\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right) = 0$ war, könnte die Hofnung zu begründen scheinen, dafs auch die allgemeinere Gleichung des 195. §.

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right) = 0$$

sich werde allgemein integriren lassen — aber diese Hofnung würde zu früh gefafst seyn. Der vollständige Werth von $I$ müfste hier durch zwei Functionen zweier veränderlichen Gröfsen ausgedrückt werden; aber dieses läfst sich wenigstens nicht in zwei Gliedern bewerkstelligen; durch eine Reihe, deren Glieder von zwei unbestimmten Functionen abhingen, wäre es wahrscheinlich möglich.

---

*) Gerstner zeigt dieses umständlich in der erwähnten Abhandlung.

Nach der Analogie könnte man vermuthen, daſs der Werth von $I$ sich durch
$F:[(x+y\sqrt{-1}),(x+z\sqrt{-1})]+f:[(x-y\sqrt{-1}),(x-z\sqrt{-1})]$
ausdrücken lasse, aber es läſst sich allgemein beweisen, daſs wenn $\Omega$ irgend eine Function von $x$ und $y$, $\omega$ irgend eine Function von $x$ und $z$ bezeichnet, $I$ sich nicht durch $F:(\Omega,\omega)$, also auch nicht, wenn $\Omega'$, $\omega'$ ähnliche Bedeutungen haben, durch $F:(\Omega,\omega)+f:(\Omega',\omega')$ ausdrücken lasse.

215 *b*). Um diesen allgemeinen Beweis zu führen, muſs ich noch einiges über die Bestimmung der Differentiale solcher Functionen anführen, welche auf unbestimmte Weise von zwei veränderlichen Gröſsen abhängen. Es sey $z=f:(x,y)$, nämlich eine solche Function, die vielleicht auf ganz andre Weise von $y$, als von $x$ abhängt; so läſst sich das Differential $dz$ auch nur ganz unbestimmt ausdrücken. Um indeſs die Rechnung bequemer zu führen, bezeichne ich die gemeinschaftlichen Factoren der partiellen Differentiale $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ mit $f':(x,y)$, diejenigen Factoren aber, welche jedem dieser partiellen Differentiale eigenthümlich sind, mit $\varrho$, $\sigma$, so daſs

$$dz=(\varrho\,dx+\sigma\,dy).f':(x,y) \text{ ist.}$$

Da nun, wenn auch bestimmt wäre, wie $z$ von $x$ abhängt, damit noch gar nichts über die Abhängigkeit von $y$ bestimmt ist, so müssen $\varrho$ und $\sigma$ als völlig unabhängig von $f':(x,y)$ betrachtet werden. Indeſs hat man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\varrho.f':(x,y) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)=\sigma f':(x,y).$$

Ich differentiire nun abermals, und setze auf ähnliche Weise, wie vorhin,

$$d.f':(x,y)=(\tau\,dx+\varphi\,dy)f'':(x,y),$$

also das partielle Differential

$$\left(\frac{d.f':(x,y)}{dx}\right)=\tau f'':(x,y).$$

Hiedurch wird $\left(\frac{d^2 z}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) \cdot f' : (x, y) + \varrho\varphi \cdot f'' : (x, y)$,

aber auch $\left(\frac{d^2 z}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right) f' : (x, y) + \sigma\gamma\, f'' : (x, y)$,

und da beide Werthe gleich seyn müssen, aber die Functionen $f'$ und $f''$ nicht durch einander bestimmt werden dürfen, so mufs nothwendig $\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)$ oder $\varrho\,dx + \sigma\,dy$ eine für sich integrable Formel seyn, und zweitens mufs $\varrho\varphi = \sigma\gamma$ seyn. Was also auch $f : (x, y)$ für eine Function seyn mag, so werden allemal diese Bedingungen Statt finden, und man wird

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) f' : (x, y) + \varrho\gamma\, f'' : (x, y)$$

und $$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d\sigma}{dy}\right) \cdot f' : (x, y) + \frac{\sigma^2\gamma}{\varrho} f'' : (x, y)$$

setzen können, oder weil

$$d \cdot f' : (x, y) = \frac{\gamma}{\varrho} (\varrho\,dx + \sigma\,dy)\, f'' : (x, y),$$

und man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{\gamma}{\varrho}$ als mit in $f'' : (x, y)$ enthalten, betrachten kann,

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) \cdot f' : (x, y) + \varrho^2 f'' : (x, y),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d\sigma}{dy}\right) f' : (x, y) + \sigma^2 f'' : (x, y),$$

wo nun zwischen $\varrho$ und $\sigma$ blos die Vergleichung $\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)$ Statt findet.

215 *c*). Die Gröfsen $x$, $y$ könnten selbst wieder Functionen andrer Veränderlichen seyn, und dieser Fall ist es eigentlich, den wir betrachten müssen, um zu beweisen, dafs $I$ nicht $= f : (\Omega, \omega)$ seyn könne, wenn $\Omega$ blos von $x$, $y$, und $\omega$ blos von $x$ und $z$ abhängt. Wäre allgemein $\Omega$ eine

Function der drei Gröſsen $x, y, z$, und $\omega$ eine andre Function eben dieser Gröſsen, und nun $I = f:(\Omega, \omega)$, so würden, nach dem Vorigen, die Differentiale sich so ausdrücken lassen:

$$dI = (\varrho d\Omega + \sigma d\omega) f':(\Omega, \omega), \text{ oder}$$

$$dI = \left\{ \varrho \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) dx + \sigma \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \sigma \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy + \varrho \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) dy + \varrho \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) dz + \sigma \left(\frac{d\omega}{dz}\right) dz \right\} f':(\Omega, \omega).$$

$$\text{also } \left(\frac{dI}{dx}\right) = \left\{ \varrho \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \sigma \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} f':(\Omega, \omega).$$

Weil nun, wie im vorigen §. bewiesen ist,

$$d.f':(\Omega, \omega) = (\varrho d\Omega + \sigma d\omega) f'':(\Omega, \omega), \text{ so wird}$$

$$\left(\frac{d.f':(\Omega, \omega)}{dx}\right) = \left\{ \varrho \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \sigma \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} f'':(\Omega, \omega), \text{ also}$$

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) = \left\{ \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \varrho \left(\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \sigma \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \right\} f':(\Omega, \omega) + \left\{ \varrho \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \sigma \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\}^2 . f'':(\Omega, \omega).$$

Die partiellen Differentiale $\left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right)$ werden auf ganz ähnliche Weise ausgedrückt. Wir wissen aber, daſs $\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ seyn muſs, also wird

$$\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = \left(\frac{d\varrho}{d\Omega}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right), \text{ daher}$$

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) = f':(\Omega, \omega) . \left\{ \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\Omega}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\}$$
$$+ f':(\Omega, \omega) \left\{ \varrho \left(\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right) + \sigma \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \right\} + f'':(\Omega, \omega) . \left\{ \varrho \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \sigma \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\}^2,$$

und man kann jetzt auch $\left(\frac{d^2 I}{d y^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2 I}{d z^2}\right)$ ausdrücken, wenn man nur immer $dy$ oder $dz$ statt $dx$ schreibt.

Soll nun $f:(\Omega, \omega)$ eine völlig unbestimmte Function bleiben, so darf man die Gröſsen $f':(\Omega, \omega)$, $f'':(\Omega, \omega)$ und $\varrho$, $\sigma$ gar nicht als von einander abhängig betrachten. Wenn also eine Gleichung zwischen den partiellen Differentialen von $I$ gegeben ist, so müſste man daraus die Werthe von $\Omega$, $\omega$ herleiten, aber alles, was die Form der Function $f$ betrift, unbestimmt lassen; denn die einzige Vergleichung zwischen $\varrho$ und $\sigma$, welche, ohne $f$ zu beschränken, Statt findet, haben wir schon in dem letzten Ausdrucke benutzt.

Soll also $\left(\frac{d^2 I}{d x^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{d y^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{d z^2}\right) = 0$ seyn, so wird

$$
\begin{aligned}
0 = &\left|\frac{d\varrho}{d\Omega}\right| \left( \left|\frac{d\Omega}{dx}\right|^2 + \left|\frac{d\Omega}{dy}\right|^2 + \left|\frac{d\Omega}{dz}\right|^2 \right) f':(\Omega, \omega) \\
&+ \left|\frac{d\sigma}{d\omega}\right| \left( \left|\frac{d\omega}{dx}\right|^2 + \left|\frac{d\omega}{dy}\right|^2 + \left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 \right) f':(\Omega, \omega) \\
&+ 2 \left|\frac{d\varrho}{d\omega}\right| \left( \left|\frac{d\Omega}{dx}\right| \left|\frac{d\omega}{dx}\right| + \left|\frac{d\Omega}{dy}\right| \left|\frac{d\omega}{dy}\right| + \left|\frac{d\Omega}{dz}\right| \left|\frac{d\omega}{dz}\right| \right) f':(\Omega, \omega) \\
&+ \varrho \left( \left|\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right| + \left|\frac{d^2\Omega}{dy^2}\right| + \left|\frac{d^2\Omega}{dz^2}\right| \right) f':(\Omega, \omega) \\
&+ \sigma \left( \left|\frac{d^2\omega}{dx^2}\right| + \left|\frac{d^2\omega}{dy^2}\right| + \left|\frac{d^2\omega}{dz^2}\right| \right) f':(\Omega, \omega) \\
&+ f'':(\Omega, \omega) \left\{ \left( \varrho \left|\frac{d\Omega}{dx}\right| + \sigma \left|\frac{d\omega}{dx}\right| \right)^2 + \left( \varrho \left|\frac{d\Omega}{dy}\right| + \sigma \left|\frac{d\omega}{dy}\right| \right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left( \varrho \left|\frac{d\Omega}{dz}\right| + \sigma \left|\frac{d\omega}{dz}\right| \right)^2 \right\},
\end{aligned}
$$

wo man das letzte Glied noch vollständiger entwickeln, und dann jedes einzelnen Gliedes Coefficienten $= 0$ setzen müſste.

Aber die Coefficienten des vierten und fünften Gliedes haben eben die Form, wie die Differentialgleichung für $I$

selbst, man müſste daher hiernach für $\Omega$ und $\omega$ irgend einen der Differentialgleichung für $I$ entsprechenden particulären Werth setzen; wir kennen als solchen die Function

$F:(x+y\pm 2z\sqrt{-1})$, setze ich also

$$\Omega = F:(x+y+2z\sqrt{-1}),$$

$$\omega = F:(x+y-2z\sqrt{-1}), \text{ so ist}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = F':(x+y+2z\sqrt{-1}),$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = F':(x+y+2z\sqrt{-1}),$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = 2\sqrt{-1}\,.\,F':(x+y+2z\sqrt{-1}),$$

und die Coefficienten der beiden ersten Glieder, welche die Summe der Quadrate der drei partiellen ersten Differentiale enthalten, verschwinden von selbst; der Coefficient des dritten Gliedes aber wird

$$= (1+1+2)\,F':(x+y+2z\sqrt{-1})\,.\,F':(x+y-2z\sqrt{-1}),$$

und verschwindet also nicht: man könnte ihn verschwinden machen, wenn man $\omega = \Omega$ setzt, aber dann hätte man für $I$ nichts weiter, als den schon bekannten beschränkten Werth $I = f:(x+y+2z\sqrt{-1})$.

Wollte man die Voraussetzung versuchen, daſs $\Omega$ und $\omega$ jede blos von zwei veränderlichen Gröſsen abhingen, nämlich $\Omega$ blos von $x$ und $y$, $\omega$ blos von $x$ und $z$, so verschwinden die Glieder, welche $\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ und $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$ enthalten. Die Coefficienten des vierten und fünften Gliedes geben, $=0$ gesetzt, dann $\Omega = F:(x+y\sqrt{-1})$, $\omega = F:(x+z\sqrt{-1})$, oder, weil man hier blos particuläre Werthe zu nehmen braucht, $\Omega = x+y\sqrt{-1}$, $\omega = x+z\sqrt{-1}$. Es wird daher wieder $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = 0$ und $\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)^2 = 0$, aber der Coefficient des dritten Gliedes $\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ wird $=1$,

und verschwindet nicht. — — Es gibt also keine Werthe für $\Omega$ und $\omega$, wodurch $I = f : (\Omega, \omega)$ ein der Differentialgleichung entsprechender Werth würde, wenigstens dann gewifs nicht, wenn jede dieser Gröfsen nur von zwei Veränderlichen abhängen soll *).

---

*) Die hier vorgetragenen Sätze werden besser durch ein Beispiel erläutert werden, wo die Auflösung gelingt. Ein solches gibt die Gleichung $\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 I}{dy\,dz}\right) = 0$, denn wenn man hier $I = f : (\Omega, \omega)$ annimmt, und voraussetzt, dafs $\Omega$ blos von $x$ und $y$, $\omega$ aber blos von $x$ und $z$ abhängen soll, so wird $\left(\frac{dI}{dy}\right) = \varrho\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) f' : (\Omega, \omega)$ und

$$\left(\frac{d \cdot f' : (\Omega, \omega)}{dz}\right) = \sigma\left(\frac{d\omega}{dz}\right) f'' : (\Omega, \omega), \text{ also}$$

$$\left(\frac{d^2 I}{dy\,dz}\right) = \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) f' : (\Omega, \omega) + \varrho\sigma\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) f'' : (\Omega, \omega),$$

zugleich aber ist $\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) = \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right)$, folglich

$$2\left(\frac{d^2 I}{dy\,dz}\right) = 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) f' : (\Omega, \omega)$$
$$+ 2\varrho\sigma\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) f'' : (\Omega, \omega).$$

Addirt man dieses Glied zu den schon oben gefundnen dreien, ordnet sie gehörig zusammen, und nimmt darauf Rücksicht, dafs wir jetzt $\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \left(\frac{d\omega}{dy}\right) = 0$ setzen, so müssen folgende Coefficienten verschwinden:

$$\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)^2 = 0,\ \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = 0,$$

$$2\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + 2\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = 0, \text{ endlich}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\Omega}{dy^2}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\omega}{dz^2}\right) = 0.$$

Den beiden ersten und beiden letzten geschieht Genüge, wenn man $\Omega = x \pm y\sqrt{-1}$ und $\omega = x \pm z\sqrt{-1}$ setzt; dann aber wird, weil $\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 1$ und $\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = -1$ ist,

215 *d*). Man mufs sich also mit dem Werthe

$$I = \Gamma:(x+y+2z\sqrt{-1}) + \Delta:(x+y-2z\sqrt{-1}).$$ oder auch

$$I = \Gamma:(x+y+2z\sqrt{-1}) + \Delta:(x+y-2z\sqrt{-1}) + \Sigma:(x+z+2y\sqrt{-1}) + Z:(x+z-2y\sqrt{-1})$$

begnügen, woraus dann für $u$, $v$, $w$ die allgemeinen Werthe

$$u = F:(x+y+2z\sqrt{-1}) + f:(x+y-2z\sqrt{-1}) + \Theta:(x+z+2y\sqrt{-1}) + H:(x+z-2y\sqrt{-1}),$$

$$v = F:(x+y+2z\sqrt{-1}) + f:(x+y-2z\sqrt{-1}) + 2\sqrt{-1}\,.\,\Theta:(x+z+2y\sqrt{-1}) - 2\sqrt{-1}\,.\,H:(x+z-2y\sqrt{-1}),$$

$$w = 2\sqrt{-1}\,.\,F:(x+y+2z\sqrt{-1}) - 2\sqrt{-1}\,.\,f:(x+y-2z\sqrt{-1}) + \Theta:(x+z+2y\sqrt{-1}) + H:(x+z-2y\sqrt{-1})$$

folgen. Man könnte auch hier durch Voraussetzungen über die Gestalt des Gefäfses oder der festen Wände die Anzahl der unbestimmten Functionen vermindern. Bewegte sich z. B. das Fluidum über einem horizontalen Boden, dessen Höhe $z = 0$ wäre, so müfste

$$f:(x+y) = F:(x+y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,\Theta:(x+2y\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,H:(x-2y\sqrt{-1})$$

seyn, woraus folgt

$$f:(x+y-2z\sqrt{-1}) = F:(x+y-2z\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,\Theta:(x+2z-z\sqrt{-1}+2y\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,H:(x-2z-z\sqrt{-1}-2y\sqrt{-1});$$

wenn man nämlich in jener Gleichung überall $x - z\sqrt{-1}$ statt $x$, und $y - z\sqrt{-1}$ statt $y$ setzt. Aber die Anwendungen würden hier noch weit schwerer seyn, als sie es dort waren, und ich lasse mich daher auf diese sehr schwierigen Untersuchungen gar nicht weiter ein.

---

auch die dritte Gleichung von selbst $= 0$, wie es seyn mufs, wenn $I$ sich durch $f:(\Omega, \omega)$ ausdrücken läfst. Man hat also
$I = F:[(x+y\sqrt{-1}), (x+z\sqrt{-1})] + f:[(x-y\sqrt{-1}), (x-z\sqrt{-1})]$,
als Auflösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2 I}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 I}{dz^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 I}{dy\,dz}\right) = 0;$$

aber wenn das letzte Glied fehlt, so ist eine vollständige Auflösung auf diesem Wege nicht möglich.

215 e). Uebrigens verdient es hier noch bemerkt und bewiesen zu werden, dafs für Bewegungen, die sich im Fortgange der Zeit ändern, die Formel $udx + vdy + wdz$ in jedem Augenblicke integrabel ist, wenn sie es irgend einmal ist. In dem Falle, wo wir die veränderliche Gröfse y nicht in Betrachtung zogen, erhellt dies aus §. 200 ff. von selbst, weil die von $dt$ abhängigen Glieder der Differentialgleichung durch die Voraussetzung, dafs $\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$ sey, von selbst aus der Rechnung wegfallen; also über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von $t$ durchaus nichts bestimmt wird. Allgemein aber läfst sich dieses folgendermafsen beweisen.

Wenn die Formel $udx + vdy + wdz$ in irgend einem Augenblicke einem vollständigen Differentiale $dI$ gleich ist, wird sie offenbar im nächsten Augenblicke

$$= dI + dt\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)dx + \left(\frac{dv}{dt}\right)dy + \left(\frac{dw}{dt}\right)dz\right\},$$

und damit sie jetzt noch ein vollständiges Differential sey, mufs der in $dt$ multiplicirte Theil für sich integrabel seyn. Wir setzten vorhin (§. 192.) $\left(\frac{dI}{dt}\right) = \varphi$, oder mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von $t$, $dI = udx + vdy + wdz + \varphi dt$, woraus $\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ u. s. w. folgt, also

$$\left(\frac{du}{dt}\right)dx + \left(\frac{dv}{dt}\right)dy + \left(\frac{dw}{dt}\right)dz = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz,$$

welches $= d\varphi$ ist, wenn man die Zeit als beständig betrachtet. Im 192. §. fanden wir aber auch

$$\frac{2gdp}{b} = 2gdS - udu - vdv - wdw - d\varphi,$$

$$\text{oder } d\varphi = 2gdS - \frac{2gdp}{b} - udu - vdv - wdw,$$

wo der nach dem Gleichheitszeichen stehende Theil für sich integrabel ist, also auch $d\varphi$ ein vollständiges Differen-

tial seyn mufs. Mithin ist in der ersten Gleichung der Coefficient von $dt$ für sich integrabel, und $udx + vdy + wdz$ bleibt im nächsten Augenblick, also in jedem folgenden integrabel *).

215 *f*). Wir wollen jetzt zu einer andern Methode, die Bewegung flüssiger Körper zu untersuchen, übergehn. Die bisher gebrauchten Formeln gaben immer an, wie in jedem bestimmten Punkte des Raums die Bewegung beschaffen sey, und wir betrachteten jedes Theilchen des flüssigen Körpers nur in dem Augenblicke, da es durch diesen Punkt ging, ohne seine fernere Bewegung, oder den Ort, wohin dasselbe Theilchen nach einer gewissen Zeit gelangt sey, zu bestimmen. Gleichwohl ist es in manchen Fällen wichtig, die Bewegung jedes Theilchens zu verfolgen, z. B. bei der Untersuchung der wellenförmigen oder der schwingenden Bewegung (motus vibratorius); ich werde daher jetzt die Untersuchung auf diese Weise anstellen. Die Formeln erhalten alsdann eine andre Gestalt, indem die Geschwindigkeiten nicht darin vorkommen, sondern dagegen andre veränderliche Gröfsen eingeführt werden, welche den Zustand des flüssigen Körpers in einem gegebnen Zeitpunkte bestimmen.

---

*) Vergl. Laplace Mechanik des Himmels. 1. Buchs 8. Abschn.

## Sechster Abschnitt.

### *Von der Bestimmung der Bewegung flüssiger Körper aus ihrem anfänglichen Zustande.*

---

216. Problem 43. Wenn der anfängliche Zustand des flüssigen Körpers bekannt ist, die veränderlichen Gröſsen anzugeben, durch welche man den Zustand desselben für jeden folgenden Zeitpunkt bestimmt.

Auflösung. Im anfänglichen Zusande, oder in dem Zeitpunkte, wo wir $t = o$ (Fig. 33.) setzen, ist die Lage eines gewissen Theilchens des flüssigen Körpers durch die Coordinaten $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$ bestimmt, betrachten wir also nur die Bewegung dieses Theilchens, so bleiben die Gröſsen $X, Y, Z$, welche die anfängliche Lage desselben bestimmen, ungeändert; geht man aber zur Betrachtung andrer Theilchen über, so muſs man sie als veränderlich ansehen. Nach Verlauf einer gewissen Zeit $= t$ sey eben dieses Theilchen $Z$ nach $z$ gekommen, für welchen Punkt die Ordinaten $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ sind, so werden diese Coordinaten als Functionen von $X$, $Y$, $Z$ und der Zeit $t$ betrachtet werden müssen.

Läſst man also den Gröſsen $X, Y, Z$ ihre bestimmten Werthe, und sieht blos $t$ als veränderlich an, so zeigen die Werthe, welche die Coordinaten $x, y, z$ erhalten, den Weg an, welchen dasjenige Theilchen nimmt, dessen Lage anfangs durch $X, Y, Z$ bestimmt ward. Zerlegt man die Bewegung dieses Theilchens nach der Richtung der Coordinaten, so erhält man die Geschwindigkeit nach der Richtung $Ox = \left|\frac{dx}{dt}\right|$, nach $xy = \left|\frac{dy}{dt}\right|$, nach $yz = \left|\frac{dz}{dt}\right|$, folglich die Beschleunigungen nach eben diesen Richtungen, nach $Ox = \left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$, nach $xy = \left|\frac{d^2y}{dt^2}\right|$, nach $yz = \left|\frac{d^2z}{dt^2}\right|$.

Ueberdies haben die Gröſsen $x$, $y$, $z$ offenbar die Eigenschaft, daſs für $t = 0$, $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ wird, und man erhält daher aus den angeführten Gleichungen die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für den anfänglichen Zustand desselben Theilchens, wenn man darin $t = 0$ setzt.

Bezeichnet nun $q$ die Dichtigkeit, welche das in $z$ am Ende der Zeit $t$ befindliche Theilchen hat, so wird auch $q$ eine Function der Gröſsen $X$, $Y$, $Z$ und $t$, und muſs durch diese bestimmt werden. Eben so muſs der Druck $p$, welchen das Theilchen am Ende der Zeit $= t$, da es nach $z$ gekommen ist, leidet, als eine Function derselben vier Gröſsen ausgedrückt werden, und die ganze Untersuchung beruht darauf, daſs man die Gröſsen $x, y, z, p, q$ als Functionen von $X$, $Y$, $Z$ und $t$ ausdrücke.

217. Da $x$ und die übrigen Gröſsen hier von $X$, $Y$, $Z$ und $t$ abhängen, so erhalten ihre Differentiale die Form

$$dx = dX \left|\frac{dx}{dX}\right| + dY \left|\frac{dx}{dY}\right| + dZ \left|\frac{dx}{dZ}\right| + dt \left|\frac{dx}{dt}\right|.$$

Wenn man also annimmt, das Theilchen $z$ sey in der kleinen Zeit $dt$ nach $z'$ gerückt, so erhält man für die Coordinaten des Punktes $Z'$ folgende Werthe, weil $X$, $Y$, $Z$ als unveränderlich betrachtet werden, $Ox' = x + dt \left|\frac{dx}{dt}\right|$, $x'y' = y + dt \left|\frac{dy}{dt}\right|$, $y'z' = z + dt \left|\frac{dz}{dt}\right|$. Die Dichtigkeit ist alsdann $= q + dt \left|\frac{dq}{dt}\right|$ und der Druck $= p + dt \left|\frac{dp}{dt}\right|$ geworden. Wollte man dagegen bestimmen, wohin, während der Zeit $t$, ein andres Theilchen gekommen ist, das sich anfangs in $Z'$ nahe bei $Z$ befand, so müſste man die übrigen Glieder der Differentiale, welche von der Veränderlichkeit der Gröſsen $X$, $Y$, $Z$ abhängen, gebrauchen; $dt$ hingegen $= 0$ setzen. — Wir wollen jetzt die Aenderung

der Dichtigkeit zu bestimmen suchen, welche bei einer kleinen Masse während der Bewegung Statt findet.

218. Problem 44. Aus der gegebnen anfänglichen Dichtigkeit eines gewissen Theilchens zu bestimmen, wie diese Dichtigkeit sich ändert, während dasselbe bis zu einem andern Punkte, dessen Lage gegeben ist, fortrückt.

Auflösung. Wir nehmen an, dafs das Theilchen im anfänglichen Zustande die Form einer rechtwinklichten Pyramide $ZLMN$ (Fig. 25.) hatte, und, weil wir es als unendlich klein voraussetzen, so können wir es auch, nachdem es nach $zlmn$ gelangt ist, noch als pyramidalisch betrachten. Waren nun im anfänglichen Zustande die Coordinaten des Winkelpunktes $Z$, $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$ und $ZL = dX$, $ZM = dY$, $ZN = dZ$, und die Dichtigkeit des Theilchens $= \varrho$, so ist die Masse desselben $= \frac{1}{6}\varrho . dX dY dZ$. Eben diese Masse füllet jetzt den pyramidalischen Raum $zlmn$, für dessen Winkelpunkte wir folgende Coordinaten haben:

für $z$, $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$,

für $l$, $Or = x + dX \left|\frac{dx}{dX}\right|$, $rp = y + dX \left|\frac{dy}{dX}\right|$, $pl = z + dX \left|\frac{dz}{dX}\right|$,

für $m$, $Os = x + dY \left|\frac{dx}{dY}\right|$, $sq = y + dY \left|\frac{dy}{dY}\right|$, $qm = z + dY \left|\frac{dz}{dY}\right|$,

für $n$, $Ot = x + dZ \left|\frac{dx}{dZ}\right|$, $zo = y + dZ \left|\frac{dy}{dZ}\right|$, $on = z + dZ \left|\frac{dz}{dZ}\right|$.

Die Seiten dieser kleinen Pyramide sind daher folgende:

$$zl = dX . \sqrt{\left(\left|\frac{dx}{dX}\right|^2 + \left|\frac{dy}{dX}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dX}\right|^2\right)},$$

$$zm = dY . \sqrt{\left(\left|\frac{dx}{dY}\right|^2 + \left|\frac{dy}{dY}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dY}\right|^2\right)},$$

$$zn = dZ . \sqrt{\left(\left|\frac{dx}{dZ}\right|^2 + \left|\frac{dy}{dZ}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dZ}\right|^2\right)}.$$

Ferner wird

$$lm^2 = \left(\left|\frac{dx}{dX}\right| dX - \left|\frac{dx}{dY}\right| dY\right)^2 + \left(\left|\frac{dy}{dX}\right| dX - \left|\frac{dy}{dY}\right| dY\right)^2 + \left(\left|\frac{dz}{dX}\right| dX - \left|\frac{dz}{dY}\right| dY\right)^2,$$

$$ln^2 = \left(\left|\frac{dx}{dX}\right| dX - \left|\frac{dx}{dZ}\right| dZ\right)^2 + \left(\left|\frac{dy}{dX}\right| dX - \left|\frac{dy}{dZ}\right| dZ\right)^2 + \left(\left|\frac{dz}{dX}\right| dX - \left|\frac{dz}{dZ}\right| dZ\right)^2,$$

$$mn^2 = \left(\left|\frac{dx}{dY}\right| dY - \left|\frac{dx}{dZ}\right| dZ\right)^2 + \left(\left|\frac{dy}{dY}\right| dY - \left|\frac{dy}{dZ}\right| dZ\right)^2 + \left(\left|\frac{dz}{dY}\right| dY - \left|\frac{dz}{dZ}\right| dZ\right)^2;$$

und für die Winkel

$$\text{Cos.}\, lzm = \left(\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dY}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right| + \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right|\right)\frac{dX.dY}{zl.zm},$$

$$\text{Cos.}\, lzn = \left(\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| + \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right)\frac{dX.dZ}{zl.zn},$$

$$\text{Cos.}\, mzn = \left(\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right| + \left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| + \left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right)\frac{dY.dZ}{zm.zn},$$

woraus man das Volumen der Pyramide $zlmn$ findet, welches $= \frac{1}{6} zl.zm.zn.\sqrt{(1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}$ ist, wenn man Cos. $lzm = \nu$, Cos. $lzn = \mu$, Cos. $mzn = \lambda$ setzt. Entwickelt man jenen Ausdruck für das Volumen, und setzt

$$K = \left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| + \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|$$
$$- \left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right|,$$

so findet man das Volumen der Pyramide $= \frac{1}{6} K . dX dY dZ$, und folglich ihre Masse $= \frac{1}{6} K q \, dX dY dZ$, welche $= \frac{1}{6} \varrho . dX dY dZ$ seyn muſs, daher ist nothwendig $Kq = \varrho$.

219. Die Gröfse $Q$ hängt nicht von der Zeit $t$ ab, indem sie die Dichtigkeit eines bestimmten Theilchens im anfänglichen Zustande bezeichnet; es erhellt also, dafs auch $Kq$ von der Zeit unabhängig sey, und daher

$$Kq = f:(X, Y, Z)$$

kann gesetzt werden.

Die Gröfse $K$ wird durch die Bedingungen bestimmt, nach welchen die Coordinaten $x, y, z$ von den $X, Y, Z$ abhängen, wo nämlich jene die Lage desselben Theilchens am Ende der Zeit $t$ bestimmen, dessen anfängliche Lage durch die letztern angegeben wird. Offenbar sind die Gröfsen $x, y, z$ Functionen von $t$, ihre Abhängigkeit von dieser Gröfse mufs aber so beschaffen seyn, dafs $Kq$ für jeden Werth von $t$ einerlei bleibt.

220. Um vollständiger zu übersehen, dafs der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{6} K . dX . dY . dZ$ wird, setze ich

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = A, \quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = B, \quad \left(\frac{dz}{dZ}\right) = C, \quad \left(\frac{dx}{dY}\right) = D,$$

$$\left(\frac{dy}{dZ}\right) = E, \quad \left(\frac{dz}{dX}\right) = F, \quad \left(\frac{dx}{dZ}\right) = G, \quad \left(\frac{dy}{dX}\right) = H, \quad \left(\frac{dz}{dY}\right) = I,$$

dann wird $z l^2 . z m^2 . z n^2 (1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)$

$$= dX^2\, dY^2\, dZ^2 \begin{cases} (A^2+H^2+F^2)(B^2+I^2+D^2)(C^2+G^2+E^2) \\ -(AD+BH+IF)^2\ (C^2+G^2+E^2) \\ -(AG+EH+CF)^2\ (B^2+I^2+D^2) \\ -(DG+BE+CI)^2\ (A^2+H^2+F^2) \\ +2(AD+BH+FI).(AG+EH+CF) \\ \qquad\qquad (DG+BE+CI) \end{cases}$$

Entwickelt man diese Glieder weiter, so geben die beiden ersten zusammen

$$(C^2+G^2+E^2).[(AB-DH)^2+(DF-IA)^2+(IH-BF)^2],$$

die Summe des dritten und vierten Gliedes ist

$$-C^2[F^2(B^2+D^2)+2F^2I^2+I^2(A^2+H^2)]$$
$$-G^2[2A^2D^2+A^2(B^2+I^2)+D^2(H^2+F^2)]$$
$$-E^2[2B^2H^2+H^2(I^2+D^2)+B^2(A^2+F^2)]$$

$$-2CG[AF(B^2+I^2+D^2)+DI(A^2+H^2+F^2)]$$
$$-2CE[HF(B^2+I^2+D^2)+BI(A^2+H^2+F^2)]$$
$$-2EG[AH(B^2+I^2+D^2)+BD(A^2+H^2+F^2)].$$

Alle diese Glieder zusammen lassen sich so ausdrücken:

$$C^2(AB-DH)^2+G^2(IH-BF)^2+E^2(DF-AI)^2$$
$$-2(AD+BH+FI)(C^2FI+G^2AD+E^2BH)$$
$$-2(CGAF+CEHF+EGAH)(B^2+I^2+D^2)$$
$$-2(CGDI+CEBI+EGBD)(A^2+H^2+F^2).$$

Endlich wird das letzte Glied des vorhin angegebenen Ausdruckes =

$$+2(AD+BH+FI)(C^2FI+G^2AD+E^2BH)$$
$$+2A^2(BE+CI)GD+2B^2(AG+CF)HE$$
$$+2D^2.AG.(EH+CF)+2F^2(DG+BE)CI$$
$$+2H^2.(DG+CI).BE+2I^2.(AG+EH).CF.$$
$$+ADEC(BF+HI)+BCGH(AI+DF)+EFGI(AB+DH),$$

und wenn man dieses zu der Summe der ersten Glieder addirt, die Summe aller

$$=C^2(AB-DH)^2+G^2(IH-BF)^2+E^2(DF-IA)^2$$
$$+2CG(AB-DH)(IH-BF+2CE(AB-DH)(DF-AI)$$
$$+2EG(IH-BF).(FD-AI),$$

welches offenbar

$$=[C(AB-DH+G(IH-BF+E(DF-IA)]^2$$
$$=K^2 \text{ ist.}$$

221. Wenn die Dichtigkeit $q$ unveränderlich ist, so mufs $K$ von der Zeit unabhängig seyn; bei einer veränderlichen Dichtigkeit aber läfst sich immer $q$ durch die Formel

$q = \frac{Q}{K}$ bestimmen.

Da hier $q$ immer die Dichtigkeit eben des Theilchens bedeutet, so lange man für $X$, $Y$, $Z$ einerlei Werthe behält, so kann $q$ ungeändert bleiben, wenn auch das Fluidum nicht homogen, sondern die Dichtigkeit an andern Stellen verschieden ist, wenn nur die Dichtigkeit eines bestimmten Theilchens sich während der Bewegung nicht

ändert. Diese Methode scheint daher für die Untersuchung der Bewegung heterogener flüssiger Körper vorzüglich passend zu seyn, indem hier die Voraussetzung, daſs jedes Theilchen seine Dichtigkeit unverändert behalte, unmittelbaren Einfluſs auf die Erleichterung der Rechnung hat. Bei der vorigen Methode bezeichnete $q$ die Dichtigkeit desjenigen Theilchens, welches in einem bestimmten Augenblicke durch einen gegebnen Punkt ging, und da konnte also $q$ sich im Fortgange der Zeit für einerlei Punkt allerdings ändern, obgleich jedes Theilchen seine anfängliche Dichtigkeit unverändert behielt.

222. Diese Gleichung $Kq = Q$ enthält die eine Hauptgleichung für die Bewegung flüssiger Körper; wir müssen jetzt auch den Druck zu bestimmen suchen, und um dieses auf einem ähnlichen Wege, wie vorhin, auszurichten, wird es zur Vorbereitung dienen, wenn wir bestimmen, wie die anfängliche Lage eines Theilchens ausgedrückt wird, wenn die anfängliche Lage eines sehr nahe dabei liegenden gegeben ist.

223. Problem 45. Die Lage eines Theilchens $z$ (Fig. 33.) am Ende der Zeit $t$ ist gegeben; desselben Theilchens anfängliche Lage in $Z$ ist gleichfalls bekannt; man soll bestimmen, wo sich das nahe bei $z$ liegende Theilchen $z'$, dessen Lage am Ende der Zeit $t$ bestimmt ist, anfangs befand.

Auflösung. Für den Punkt $z$, wo sich ein Theilchen des Flüssigen am Ende der Zeit $t$ befindet, sind die Coordinaten $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$; für das sehr nahe liegende Theilchen $z'$ mögen sie $Ox' = x + \alpha$, $x'y' = y + \beta$, $y'z' = z + \gamma$ heiſsen; und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bedeuten hier unendlich kleine Linien. Ferner ist die Lage des Punktes $Z$, wo das jetzt in $z$ befindliche Theilchen anfangs war, durch die Coordinaten $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$ bestimmt; und es wird eine Bestimmung der Coordinaten des Punktes $Z'$ gesucht, wo das Theilchen $z'$ sich anfangs befand; wir

nennen die Coordinaten desselben $OX' = X + dX$, $X'Y' = Y + dY$, $Y'Z' = Z + dZ$.

Aus §. 217. weiſs man, daſs

$$\alpha = dX\left|\frac{dx}{dX}\right| + dY\left|\frac{dx}{dY}\right| + dZ\left|\frac{dx}{dZ}\right|,$$

$$\beta = dX\left|\frac{dy}{dX}\right| + dY\left|\frac{dy}{dY}\right| + dZ\left|\frac{dy}{dZ}\right|,$$

$$\gamma = dX\left|\frac{dz}{dX}\right| + dY\left|\frac{dz}{dY}\right| + dZ\left|\frac{dz}{dZ}\right|,$$

und man braucht daher nur $dX$, $dY$, $dZ$, aus diesen Gleichungen zu bestimmen, um die anfängliche Lage des Theilchens $z'$ anzugeben. Um $dZ$ zu eliminiren, multiplicire ich die erste Gleichung mit $\left(\frac{dy}{dZ}\right)$, die zweite mit $\left(\frac{dx}{dZ}\right)$, so ist die Differenz beider

$$\alpha\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \beta\left|\frac{dx}{dZ}\right| = dX\left\{\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|\right\}$$
$$+ dY\left\{\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dx}{dZ}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right|\right\},$$

und eben so wird aus den beiden letzten

$$\beta\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \gamma\left|\frac{dy}{dZ}\right| = dX\left\{\left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right|\right\}$$
$$+ dY\left\{\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right|\right\}.$$

Setzen wir nun, um abzukürzen,

$$\left|\frac{dx}{dX}\right|\left\{\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right|\right\}$$
$$+ \left|\frac{dx}{dY}\right|\left\{\left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right\}$$
$$+ \left|\frac{dx}{dZ}\right|\left\{\left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right| - \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right|\right\} = K,$$

wie in §. 218., so wird

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right|\right) \\ +\beta\left(-\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| + \left|\frac{dz}{dY}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|\right) \\ +\gamma\left(\left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|\right) \end{array}\right\},$$

$$dY = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right) \\ +\beta\left(\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|\right) \\ +\gamma\left(-\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dZ}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dZ}\right|\right) \end{array}\right\},$$

$$dZ = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(-\left|\frac{dy}{dY}\right|\left|\frac{dz}{dX}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right|\right) \\ +\beta\left(\left|\frac{dz}{dX}\right|\left|\frac{dx}{dY}\right| - \left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dz}{dY}\right|\right) \\ +\gamma\left(\left|\frac{dx}{dX}\right|\left|\frac{dy}{dY}\right| - \left|\frac{dx}{dY}\right|\left|\frac{dy}{dX}\right|\right) \end{array}\right\};$$

wodurch die Lage des Punktes $Z'$ bestimmt ist.

224. Um diese Ausdrücke abzukürzen, will ich statt der partiellen Differentiale wieder folgende Buchstaben gebrauchen:

$$\left|\frac{dx}{dX}\right| = A, \quad \left|\frac{dy}{dY}\right| = B, \quad \left|\frac{dz}{dZ}\right| = C,$$

$$\left|\frac{dx}{dY}\right| = D, \quad \left|\frac{dy}{dZ}\right| = E, \quad \left|\frac{dz}{dX}\right| = F,$$

$$\left|\frac{dx}{dZ}\right| = G, \quad \left|\frac{dy}{dX}\right| = H, \quad \left|\frac{dz}{dY}\right| = I,$$

dann wird

$K = A(BC - EI) + D(EF - CH) + G(HI - BF)$ und

$$dX = \frac{\alpha(BC-EI)+\beta(GI-CD)+\gamma(DE-BG)}{K},$$

$$dY = \frac{\alpha(EF-CH)+\beta(AC-FG)+\gamma(GH-AE)}{K},$$

$$dZ = \frac{\alpha(HI-BF)+\beta(DF-AI)+\gamma(AB-DH)}{K}.$$

225. Problem 46. Wenn auf den flüssigen Körper beschleunigende Kräfte wirken, eine Gleichung für den Druck zu finden, welchen jedes Theilchen des Fluidi leidet.

Auflösung. Die Auflösung dieses Problems läfst sich ganz so einrichten, wie im 22. und 23. Problem. Man betrachte am Ende der Zeit $t$ (Fig. 27.) das kleine parallelepipedische Theilchen $ZLMNzlmn$, in welchem des Punktes $Z$ Lage durch die Coordinaten $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ bestimmt ist; die Seiten dieses Parallelepipedi sind $ZL = \alpha$, $ZM = \beta$, $Zz = \gamma$, also sein Volumen $= \alpha\beta\gamma$, und seine Masse, da die Dichtigkeit mit $q$ bezeichnet wird, $= \alpha\beta\gamma . q$. Der Druck sey in dem Punkte $Z$, $= p$, wo also $p$ eine Funktion der Gröfsen $X$, $Y$, $Z$ und $t$ ist, wenn $X$, $Y$, $Z$ die Coordinaten des Punktes sind, wo sich im Anfange der Zeit $t$ dieses Theilchen befand. Da wir hier $t$ als beständig betrachten, so wird der allgemeine Ausdruck für den Druck in einem nahe an $Z$ liegenden Punkte

$$= p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right) + dY\left(\frac{dp}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dp}{dZ}\right),$$

wo man aber $dX$, $dY$, $dZ$ auf die im vorigen Problem angegebene Art ausdrücken mufs, weil hier $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als gegeben betrachtet werden. Wenden wir daher die Formeln des vorigen §. auf den Punkt $L$ an, dessen Coordinaten $x + \alpha$, $y$ und $z$ sind, so erhalten wir für die anfängliche Lage des Theilchens $L$ die Coordinaten

$$X + \frac{\alpha(BC-EI)}{K},\ Y + \frac{\alpha(EF-CH)}{K},\ Z + \frac{\alpha(HI-BF)}{K},$$

daher wird der Druck in $L$

$$= p + \frac{\alpha(BC - EI)}{K}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \frac{\alpha(EF - CH)}{K}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \frac{\alpha(HI - BF)}{K}\left(\frac{dp}{dZ}\right),$$

und der Unterschied zwischen diesem Drucke und dem Drucke in $Z$ ist derjenige, welchen jeder Punkt der Fläche $LNln$ nach der Richtung $AO$ leidet. Die Gröſse dieser Fläche ist $= \beta\gamma$, und daher die aus dem Drucke auf diese ganze Fläche entspringende bewegende Kraft, gleich dem Producte aus jenem Unterschiede in $\beta\gamma$; diese bewegende Kraft aber, mit der Masse $q.\alpha\beta\gamma$ dividirt, gibt die beschleunigende Kraft.

Wir nehmen an, daſs zugleich beschleunigende, der Schwere ähnliche Kräfte auf den flüssigen Körper wirken, und drücken die Summe der nach der Richtung der drei Coordinaten wirkenden Kräfte durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ aus; daher ist die gesammte beschleunigende Kraft, welche das kleine Parallelepipedum nach der Richtung $OA$ zur Bewegung antreibt,

$$= \mathfrak{P} - \frac{1}{Kq}\left\{(BC - EI)\left(\frac{dp}{dX}\right) + (EF - CH)\left(\frac{dp}{dY}\right) + (HI - BF)\left(\frac{dp}{dZ}\right)\right\}.$$

Nach unsrer jetzigen Bezeichnung ist die Geschwindigkeit nach eben dieser Richtung $= \left(\frac{dx}{dt}\right)$ und die Beschleunigung $= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$; wir erhalten daher folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 2g\mathfrak{P} - \frac{2g}{Kq}\left\{(BC - EI)\left(\frac{dp}{dX}\right) + (EF - CH)\left(\frac{dp}{dY}\right) + (HI - BF)\left(\frac{dp}{dZ}\right)\right\},$$

und eben so für die Richtung der beiden andern Coordinaten

$$\left[\frac{d^2 y}{dt^2}\right] = 2g\mathfrak{Q} - \frac{2g}{Kq}\left\{(GI-CD)\left[\frac{dp}{dX}\right] + (AC-FG)\left[\frac{dp}{dY}\right] + (DF-AI)\left[\frac{dp}{dZ}\right]\right\},$$

$$\left[\frac{d^2 z}{dt^2}\right] = 2g\mathfrak{R} - \frac{2g}{Kq}\left\{(DE-BG)\left[\frac{dp}{dX}\right] + (GH-AE)\left[\frac{dp}{dY}\right] + (AB-DH)\left[\frac{dp}{dZ}\right]\right\}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die Werthe der partiellen Differentiale $\left[\frac{dp}{dX}\right]$, $\left[\frac{dp}{dY}\right]$, $\left[\frac{dp}{dZ}\right]$ herleiten. Wenn man nämlich alle drei mit $\frac{q}{2g}$ multiplicirt, dann aber die erste mit $A$, die zweite mit $H$, die dritte mit $F$ multiplicirt, und alle addirt, so erhält man, weil
$ABC - AEI + HGI - HCD + FDE - FBG = K$ ist,

$$\left[\frac{dp}{dX}\right] = q(A\mathfrak{P} + H\mathfrak{Q} + F\mathfrak{R}) - \frac{q}{2g}\left\{A\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + H\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + F\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]\right\},$$

und auf ähnliche Weise

$$\left[\frac{dp}{dY}\right] = q(D\mathfrak{P} + B\mathfrak{Q} + I\mathfrak{R}) - \frac{q}{2g}\left\{D\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + B\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + I\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]\right\},$$

$$\left[\frac{dp}{dZ}\right] = q(G\mathfrak{P} + E\mathfrak{Q} + C\mathfrak{R}) - \frac{q}{2g}\left\{G\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + E\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + C\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]\right\}.$$

Multiplicirt man nun die erste Formel mit $dX$, die zweite mit $dY$, die dritte mit $dZ$, so gibt ihre Summe

$$dp = q(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - \frac{q}{2g}\left\{dx\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + dy\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + dz\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]\right\},$$

weil
$$AdX + DdY + Gdz = dx,$$
$$HdX + BdY + EdZ = dy,$$
$$FdX + IdY + CdZ = dz$$

ist, wenn man $t$ als beständig betrachtet, welches bei der Integration der für $dp$ gefundenen Gleichung geschehen muſs.

226. Da $x$ eine Function von $X$, $Y$, $Z$ und $t$ ist, so hätte das vollständige Differential von $x$ die Form

$$dx = A\,dX + D\,dY + G\,dZ + L\,dt,$$

und man könnte $\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \left(\frac{dL}{dt}\right)$ setzen; dagegen müſste man statt $dx$ setzen $A\,dX + D\,dY + G\,dZ$, weil in der Gleichung für $p$ die Zeit als beständig betrachtet wird.

227. Die Gröſse $Kq$ hängt, wie wir gesehen haben (§. 219.), nicht von der Zeit ab, dagegen können hier die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ von der Zeit abhängig seyn, wenn sie an verschiedenen Stellen, wohin das Theilchen des flüssigen Körpers kommt, verschieden sind. Das Glied $\mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz$ bezeichnet hier wieder, wie in der vorhin (§. 39.) für den Druck gefundnen Gleichung, die Wirkung der beschleunigenden Kräfte, welche auf das Theilchen wirken. Das Differential $dp$ aber hat hier in sofern eine andre Bedeutung, weil man $p$ als eine Function andrer veränderlicher Gröſsen betrachtet, als vorhin. Ferner darf man (wie auch aus dem ersten Abschnitte bekannt ist) die Gröſsen $\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$ nicht mit $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ der vorigen Abschnitte verwechseln, obgleich $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ hier die Geschwindigkeiten bezeichnen, sondern jene Gröſsen sind vielmehr mit den vorhin mit $U$, $V$, $W$ bezeichneten einerlei. Die jetzt gefundene Gleichung kommt also mit der vorigen ganz überein, und unterscheidet sich nur dadurch, daſs alle Gröſsen als Functionen von $X$, $Y$, $Z$ und $t$ müssen betrachtet werden.

227 *b*). Man kann die im letzten Probleme gefundene Gleichung für $p$ auf einem leichtern Wege finden. Man betrachte nämlich im anfänglichen Zustande zwei einander sehr nahe Theilchen $Z$ und $Z'$ (Fig. 33.), deren Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ sind, und nehme an, daſs dieselben Theilchen während der Zeit $t$

nach $z$ und $z'$ gerückt sind, wo ihre Coordinaten $x, y, z$ und $x+dx, y+dy, z+dz$ sind, so bezeichnen hier $dx$, $dy$, $dz$ die Differentiale von $x, y, z$ so genommen, daſs man $t$ als beständig betrachtet. Man nenne den Abstand $zz' = ds$, und stelle sich in diesem Raume eine kleine prismatische Masse des Flüssigen vor, deren Länge $= ds$, ihr Querschnitt $= ff$, so wird, wenn man die Dichtigkeit $= q$ setzt, die Masse dieses kleinen Prisma's $= qff.ds$. Weil nun der Druck in $z = p$ gesetzt wird, so wird er in $z'$ $= p + dp$ seyn, wenn $dp$ so genommen wird, daſs man $t$ als beständig betrachtet. Dieses Theilchen leidet also in jedem Punkte seiner Basis in $z'$ einen um $dp$ gröſsern Druck, als in $z$, und wird daher mit der beschleunigenden Kraft $= \frac{dp}{q\,ds}$ nach der Richtung $z'z$ getrieben. Auſserdem aber wirken die beschleunigenden Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ auf dieses Theilchen nach der Richtung der drei Coordinaten, und aus ihnen entsteht nach der Richtung $zz'$ die zusammengesetzte Kraft $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds}$, daſs also die gesammte beschleunigende Kraft, welche das Theilchen nach der Richtung $zz'$ treibt, $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds} - \frac{dp}{q\,ds}$ ist.

Die Beschleunigung der Bewegung dieses Theilchens nach der Richtung der Coordinaten ward aber durch $\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]$, $\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right]$, $\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]$ ausgedrückt, und folglich ist die Beschleunigung nach der Richtung $zz'$

$$= \frac{dx}{ds}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + \frac{dy}{ds}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + \frac{dz}{ds}\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right],$$

woraus die Gleichung

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - dx\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] - dy\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] - dz\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right].$$

folgt, wenn die Kraft der Schwere $= 1$, und der Raum des freien Falles eines Körpers in der ersten Secunde $= g$ gesetzt wird. Diese Gleichung ist ganz einerlei mit der vorhin gefundenen.

228. Problem 47. Wenn der anfängliche Zustand eines flüssigen Körpers, und die Kräfte, welche auf denselben wirken, gegeben sind, die erfolgende Bewegung und den Zustand des flüssigen Körpers für jeden Zeitpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Man betrachte im anfänglichen Zustande irgend ein in $Z$ (Fig. 33.) befindliches Theilchen des flüssigen Körpers, und nenne die Coordinaten dieses Punktes $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$. Die anfängliche Dichtigkeit dieses Theilchens sey $= \varrho$, der Druck, welchen es leidet, $= P$. Ferner bewege es sich so fort, dafs seine Geschwindigkeit nach der Richtung $OX = U$, nach der Richtung $XY = V$, nach der Richtung $YZ = W$ sey; so werden die Gröfsen $\varrho, P, U, V, W$ gegebene Functionen von $X, Y, Z$ seyn, weil der anfängliche Zustand als bekannt angenommen wird.

Dasselbe Theilchen, welches sich anfangs in $Z$ befand, sey während der Zeit $t$ nach $z$ gekommen, und die Lage dieses Punktes durch die Coordinaten $x, y, z$ bestimmt, welche daher als Functionen von $X, Y, Z$ und $t$ zu betrachten sind, und so von diesen Gröfsen abhängen müssen, dafs für $t = 0$, $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ wird, folglich alsdann auch $\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1$, $\left(\frac{dy}{dY}\right) = 1$, $\left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$, aber $\left(\frac{dx}{dY}\right)$ und alle übrigen partiellen Differentiale, die vorhin mit $D, E, F, G, H, I$ bezeichnet wurden, $= 0$. Die Geschwindigkeiten dieses Theilchens, wenn es am Ende der Zeit $= t$ in $z$ ankommt, sind: nach $Ox = \left(\frac{dx}{dt}\right) = u$, nach $xy = \left(\frac{dy}{dt}\right) = v$, nach $yz = \left(\frac{dz}{dt}\right) = w$, welche sich also für

$t = 0$ in $u = U$, $v = V$, $w = W$ verwandeln müssen. Ferner bezeichnen wir des Theilchens Dichtigkeit am Ende der Zeit $t$ mit $q$, den Druck mit $p$, welche Gröſsen ebenfalls Functionen der Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ und der Zeit $t$ sind, und für $t = 0$ in $q = Q$, $p = P$ übergehen müssen. Endlich nehmen wir an, daſs die beschleunigenden Kräfte, welche in $Z$ auf das Theilchen wirken, wenn man sie nach der Richtung der Coordinaten zerlegt, durch eine Kraft $\mathfrak{P}$ mit der Richtung $Ox$ parallel, $\mathfrak{Q}$ mit $xy$, $\mathfrak{R}$ mit $yz$ parallel ausgedrückt werden.

Man sieht hieraus, daſs die ganze Kenntniſs der Bewegung darauf ankomme, daſs man bestimme, was für Functionen von $X$, $Y$, $Z$ und $t$ die Gröſsen $x, y, z, q$ und $p$ sind; und dieses erhält man aus zwei Gleichungen, die wir oben gefunden haben.

Wir fanden nämlich vorhin $Kq = Q$, und $K$ ist hier

$$= \left|\frac{dx}{dX}\right| \left|\frac{dy}{dY}\right| \left|\frac{dz}{dZ}\right| + \left|\frac{dy}{dX}\right| \left|\frac{dz}{dY}\right| \left|\frac{dx}{dZ}\right| + \left|\frac{dz}{dX}\right| \left|\frac{dx}{dY}\right| \left|\frac{dy}{dZ}\right|$$

$$- \left|\frac{dx}{dX}\right| \left|\frac{dz}{dY}\right| \left|\frac{dy}{dZ}\right| - \left|\frac{dy}{dX}\right| \left|\frac{dx}{dY}\right| \left|\frac{dz}{dZ}\right| - \left|\frac{dz}{dX}\right| \left|\frac{dy}{dY}\right| \left|\frac{dx}{dZ}\right|,$$

woraus für $t = 0$, $K = 1$ wird: man müſste also aus den veränderlichen Gröſsen $x$, $y$, $z$ den Werth von $K$ bestimmen, um die Dichtigkeit $q = \frac{Q}{K}$ zu erhalten.

Die zweite Gleichung ist die im letzten Problem gefundene; in derselben kommt $g$ vor, welches den Raum bezeichnet, welchen ein freifallender, von der natürlichen Schwere beschleunigter Körper in der ersten Secunde durchläuft, weil man annimmt, daſs $t$ in Secunden ausgedrückt ist. Sie war

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - dx\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$- dy\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - dz\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

und es wird in derselben die Zeit $t$ als beständig, und blos die Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ als veränderlich betrachtet. Auch müssen hier die Differentiale $dx$, $dy$, $dz$ so genommen werden, daſs man $t$ als beständig betrachtet. Nach der Integration dieser Gleichung muſs man ihr statt der beständigen Gröſse eine unbestimmte Function von $t$ hinzufügen.

229. Die letzte Gleichung ist aus dreien entstanden, und enthält auch drei Bestimmungen, weil die Differentiale $dX$, $dY$, $dZ$ von einander unabhängig sind, und die Integrabilität der Gleichung drei Bedingungen voraussetzt. Verbindet man hiemit die erste Gleichung, und endlich das aus der Natur des flüssigen Körpers bekannte Gesetz, nach welchem die Dichtigkeit vom Drucke abhängt, so erhält man fünf Gleichungen, welche also zu Bestimmung der fünf unbekannten Gröſsen hinreichen.

230. Wenn man das Integral der letzten Gleichung gefunden hat, und dann in dasselbe nach und nach verschiedene Werthe für die Zeit $t$ setzt, aber immer einerlei Werthe von $X$, $Y$, $Z$ beibehält, so erhält man die ganze Bewegung des Theilchens, welches sich anfangs in $Z$ befand, und kann für jeden Zeitpunkt seine Geschwindigkeit, Dichtigkeit, und den Druck, welchen es leidet, angeben.

231. Ist die Dichtigkeit dieses Theilchens unveränderlich $q = Q$, so hat man immer $K = 1$, und wenn man diese Gleichung auflöst, so erhält man eine gewisse Bestimmung, wie die Functionen $x$, $y$, $z$ von $X$, $Y$, $Z$ abhängen müssen.

232. Wir wollen jetzt noch diese allgemeinen Formeln auf einige besondre Fälle anwenden.

Wenn alle Theilchen des flüssigen Körpers mit paralleler Bewegung fortrücken, so kann man $x = X + L$, $y = Y + M$, $z = Z + N$ setzen, wo $L$, $M$, $N$ Functionen der Zeit $t$ sind, welche für $t = 0$ verschwinden. Man hat daher hier $\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1$, $\left(\frac{dy}{dY}\right) = 1$, $\left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$, und die übri-

gen partiellen Differentiale verschwinden, folglich wird $K = 1$ und $q = \varrho$, das heifst, jedes Theilchen mufs seine Dichtigkeit ungeändert behalten, obgleich die Dichtigkeit nicht überall gleich grofs zu seyn braucht, sondern $\varrho$ eine Function von $X$, $Y$ und $Z$ seyn kann. Nimmt man nun an, dafs blos die Schwere mit den Coordinaten $Z$ parallel und der Richtung derselben entgegen, auf den flüssigen Körper wirkt, so ist $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{R} = -1$, und die zweite Gleichung erhält hier folgende Gestalt:

$$\frac{2g\,dp}{\varrho} = -2g\,dZ - dX\frac{d^2L}{dt^2} - dY\frac{d^2M}{dt^2} - dZ\frac{d^2N}{dt^2}.$$

Soll diese Gleichung sich allgemein integriren lassen, so mufs $\varrho$ eine beständige Gröfse $= b$ seyn, und alsdann ist

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - Z) - X\frac{d^2L}{dt^2} - Y\frac{d^2M}{dt^2} - Z\frac{d^2N}{dt^2} + f:t,$$

wo $h$ und $f:t$ die bei der Integration hinzukommenden Gröfsen sind. Wenn die Bewegung gleichförmig ist, so verschwinden die zweiten Differentiale von $L$, $M$, $N$, und die Punkte, wo der Druck verschwindet, liegen also dann in einer horizontalen Ebene; aber bei einer beschleunigten Bewegung ist dieses nicht der Fall, weil alsdann die mit $X$ und $Y$ multiplicirten Glieder nicht $= 0$ werden.

232 *b*). In einigen Fällen brauchte $\varrho$ nicht beständig zu seyn; wäre z. B. $L = 0$, $M = 0$; so liefse sich die Gleichung

$$2g\,dp = -\left[2g + \frac{d^2N}{dt^2}\right]\varrho\,dZ$$

allemal integriren, wenn $\varrho$ eine Function von $Z$ ist. Bei jeder verticalen Bewegung kann also das aus verschiedenen Materien bestehende Fluidum sich ganz wie ein fester Körper bewegen, wenn jede horizontale Schichte durchaus gleich dicht ist, oder die verschiednen Fluida sich in horizontale Schichten geordnet haben. Wenn hingegen die Bewegung horizontal, oder gegen den Horizont geneigt ist, so kann dieses nur Statt finden, wenn die zweiten

Differentiale von $L$, $M$, $N$ verschwinden, oder beständig sind. Verschwinden diese Differentiale, oder ist die Bewegung gleichförmig, so thut ein aus horizontalen gleichartigen Schichten bestehendes Fluidum den Bedingungen der Integrabilität Genüge; sind aber die Differentiale beständige Gröfsen $\frac{d^2 L}{dt^2} = \lambda$, $\frac{d^2 M}{dt^2} = \mu$, $\frac{d^2 N}{dt^2} = \nu$, so wird die Gleichung

$$\frac{2g\,dp}{\varrho} = -\lambda dX - \mu dY - (2g + \nu) dZ$$

sich integriren lassen, wenn $\varrho$ eine Function von

$$\lambda X + \mu Y + (2g + \nu) Z$$

ist, oder wenn $\varrho$ in allen denjenigen parallelen Ebenen, in welchen der Druck gleich grofs ist, einerlei Werth hat. Wären $\lambda$, $\mu$, $\nu$ Functionen von $t$, so würde die letzte Gleichung zwar sich integriren lassen, wenn $\varrho$ eine Function von $\lambda X + \mu Y + (2g + \nu) Z$ ist; aber dieses wäre den Bedingungen der ersten Gleichung, und selbst der Natur der Sache entgegen, weil $\varrho$ als anfängliche Dichtigkeit nicht von der Zeit abhängen kann: in solchen Fällen also würde die letzte Gleichung nur dann integrabel seyn, wenn $\varrho =$ Const. ist, das heifst, bei einem aus heterogenen Lagen bestehenden Fluido kann keine solche Bewegung, wo alle Theilchen ihre Lage gegen einander unverändert behalten, Statt finden, wenn diese Bewegung nicht entweder ganz vertical ist, oder bei nicht verticaler Bewegung, wenn nicht die Geschwindigkeit entweder gleichförmig ist (wo $\lambda = \mu = \nu = 0$ wird), oder gleichförmig beschleunigt in einfachem Verhältnisse der Zeit wächst.

233. Auch das Problem des 174. §. läfst sich nach dieser Methode auflösen. Es ward nämlich dort vorausgesetzt, dafs die drei Geschwindigkeiten für jeden Punkt immerfort ein beständiges Verhältnifs behalten sollten, nämlich $u = \alpha s$, $v = \beta s$, $w = \gamma s$; und es sollte bestimmt werden, unter welchen Bedingungen eine solche Bewegung

bestehen könne. Da hier $u = \left|\frac{dx}{dt}\right|$, $v = \left|\frac{dy}{dt}\right|$, $w = \left|\frac{dz}{dt}\right|$ ist, so wird, wenn $s$ nicht von $t$ abhängt, $x = X + \alpha s t$, $y = Y + \beta s t$, $z = Z + \gamma s t$, folglich

$$\left|\frac{dx}{dX}\right| = 1 + \alpha t \left|\frac{ds}{dX}\right|, \quad \left|\frac{dx}{dY}\right| = \alpha t \left|\frac{ds}{dY}\right|, \quad \left|\frac{dx}{dZ}\right| = \alpha t \left|\frac{ds}{dZ}\right|,$$

$$\left|\frac{dy}{dX}\right| = \beta t \left|\frac{ds}{dX}\right|, \quad \left|\frac{dy}{dY}\right| = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \left|\frac{dx}{dY}\right|, \quad \left|\frac{dy}{dZ}\right| = \frac{\beta}{\alpha} \left|\frac{dx}{dZ}\right|,$$

$$\left|\frac{dz}{dX}\right| = \frac{\gamma}{\beta} \left|\frac{dy}{dX}\right|, \quad \left|\frac{dz}{dY}\right| = \frac{\gamma}{\alpha} \left|\frac{dx}{dY}\right|, \quad \left|\frac{dz}{dZ}\right| = \frac{\gamma}{\alpha} \left|\frac{dx}{dZ}\right| + 1,$$

$$\text{und } K = 1 + t \left\{\alpha \left|\frac{ds}{dX}\right| + \beta \left|\frac{ds}{dY}\right| + \gamma \left|\frac{ds}{dZ}\right|\right\}.$$

Soll also die Dichtigkeit jedes Theilchens unveränderlich $q = Q$ seyn, so muſs $K = 1$ von der Zeit unabhängig, folglich $\alpha \left|\frac{ds}{dX}\right| + \beta \left|\frac{ds}{dY}\right| + \gamma \left|\frac{ds}{dZ}\right| = 0$ seyn. Da aber auch, wenn $s$ nicht von $t$ abhängt,

$$ds = \left|\frac{ds}{dX}\right| dX + \left|\frac{ds}{dY}\right| dY + \left|\frac{ds}{dZ}\right| dZ, \text{ so wird}$$

$$\alpha ds = \left|\frac{ds}{dY}\right| (\alpha dY - \beta dX) + \left|\frac{ds}{dZ}\right| (\alpha dZ - \gamma dX),$$

$$\text{und } s = F : [(\alpha Y - \beta X), (\alpha Z - \gamma X)]$$

eben die Gleichung, welche wir oben fanden, wenn $s$ von $t$ unabhängig angenommen ward. Wir finden dann auch hier, wie dort, aus der zweiten Gleichung

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - Z),$$

wenn $Q$ eine beständige Gröſse $= b$ ist.

234. Wir wollen jetzt noch den Fall betrachten, wo jedes Theilchen in einer horizontalen Ebene sich um eine verticale Axe bewegt, und seinen Abstand von dieser Axe nicht ändert. Es sey der Winkel $\eta$ eine Function der Zeit $t$, und man setze $x = X \operatorname{Cos} \eta - Y \operatorname{Sin} \eta$, $y = Y \operatorname{Cos} \eta + X \operatorname{Sin} \eta$,

$z = Z$, so wird $\left(\frac{dx}{dX}\right) = \text{Cos}\,\eta$, $\left(\frac{dx}{dY}\right) = -\text{Sin}\,\eta$,

$$\left(\frac{dy}{dY}\right) = \text{Cos}\,\eta,\ \left(\frac{dy}{dX}\right) = \text{Sin}\,\eta,\ \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1,$$

daher $K = \text{Cos}\,\eta^2 + \text{Sin}\,\eta^2 = 1$.

Es muſs also hier $q = Q$, oder die Dichtigkeit jedes Theilchens unveränderlich seyn.

Man findet ferner

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -(X\,\text{Sin}\,\eta + Y\,\text{Cos}\,\eta)\frac{d\eta}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -(X\,\text{Sin}\,\eta + Y\,\text{Cos}\,\eta)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (Y\,\text{Sin}\,\eta - X\,\text{Cos}\,\eta)\frac{d\eta^2}{dt^2},$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (X\,\text{Cos}\,\eta - Y\,\text{Sin}\,\eta)\frac{d\eta}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (X\,\text{Cos}\,\eta - Y\,\text{Sin}\,\eta)\frac{d^2\eta}{dt^2} - (X\,\text{Sin}\,\eta + Y\,\text{Cos}\,\eta)\frac{d\eta^2}{dt^2},$$

daher erhält, wenn man blos auf die Wirkung der Schwere Rücksicht nimmt, die zweite Gleichung folgende Gestalt*):

$$\frac{2\,gdp}{Q} = -2gdZ + (YdX - XdY)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (XdX + YdY)\frac{d\eta^2}{dt^2}.$$

---

*) Euler gibt diese Formel anders an; er findet nämlich das in $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ multiplicirte Glied $= (YdX + XdY)\frac{d^2\eta}{dt^2}$, und dann das Integral dieses Giedes $= XY\frac{d^2\eta}{dt^2}$, daher er auch zum Schlusse sagt, man könne hier für $\eta$ jede Function von $t$ setzen, und diese Gleichung sey also viel allgemeiner, als die nach der ersten Methode gefundene Auflösung. Es scheint mir, daſs dieses ein Rechnungsfehler seyn muſs, der Eulern leicht entgehen konnte, da er gar nicht länger bei diesem Beispiele verweilt, und keine weitern Schlüsse auf diese Gleichung baut. (B.)

Diese Gleichung läſst sich nicht integriren, wenn nicht $\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$ ist, das heiſst, nur in dem Falle, wo jedes Theilchen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe bewegt. In diesem Falle wird, wenn $\varrho = b$ beständig ist,

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - Z) + \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)\frac{d\eta^2}{dt^2} + f:t.$$

In derselben horizontalen Schichte ist also der Druck in gleichen Abständen von der Axe gleich, und unveränderlich, wenn $f:t =$ Const. ist, denn $\frac{d\eta}{dt}$ ist beständig.

Wäre $\varrho$ nicht allenthalben gleich, so würde die vorausgesetzte Bewegung bestehen können, wenn der flüssige Körper blos träge wäre, und die Dichtigkeit eine Function des Abstandes von der Axe; die verschiedenen flüssigen Materien müſsten also cylindrische Schichten bilden, deren Axe mit der Umdrehungsaxe einerlei wäre. Ist hingegen der flüssige Körper der Schwere unterworfen, so wird die Bedingung für $\varrho$ zusammengesetzter. Ich will den Abstand von der Axe $\sqrt{(X^2 + Y^2)} = U$ nennen, so muſs offenbar $\varrho$ eine Function von

$$2g(h - Z) + \tfrac{1}{2} U^2 \frac{d\eta^2}{dt^2}$$

seyn, oder in den durch diese Gleichung ausgedrückten Schichten die Dichtigkeit gleich seyn, wenn die Bewegung bestehen soll. Die Oberflächen der verschiedenen flüssigen Materien werden also parabolische Conoide bilden, deren Scheitel in der Axe in der Höhe $Z = h$ liegt, wo also $h$ für jede der verschiedenen Materien einen andern Werth erhält. Dieses stimmt mit dem 185. §. überein, denn was dort von der freien Oberfläche eines gleichartigen Flüssigen galt, das gilt hier von den Oberflächen der flüssigen Materien, deren Dichtigkeit verschieden ist.

Uebrigens ist die hier gegebene Auflösung beschränkter, als die dortige, weil sie nur den einen Fall umfaſst, da alle Theilchen ihren Umlauf in einerlei Zeit vollenden. — Dieser Fall ist also ganz einerlei mit dem, wo in §. 185. $n = 1$ gesetzt ward.

235. Diese Beispiele sind hinreichend, um von der Anwendung dieser Methode wenigstens einen Begrif zu geben; eine weitere Entwickelung dieser Methode sowohl, als der vorigen, hat noch immer groſse Schwierigkeit, weil manche Aufgaben sich mit unsern jetzigen Kenntnissen in der Analysis nicht auflösen lassen. Um die Untersuchung zu erleichtern, und gleichsam stufenweise vom Leichtern zum Schwerern fortzuschreiten, wird es vortheilhaft seyn, wenn man mit Untersuchung solcher Bewegungen flüssiger Körper anfängt, welche von weniger veränderlichen Gröſsen abhängen. Wir erreichen diesen Zweck, wenn wir zuerst die linearischen oder diejenigen Bewegungen flüssiger Körper betrachten, wo alle Theilchen als nur eine einzige Linie bildend angesehen werden, und wo alle Theilchen auf dieser Linie fortrücken; wenn wir alsdann zur ebenen Bewegung übergehen, wo die ganze Bewegung in einer bestimmten Fläche vorgeht, oder die auf diese Fläche senkrechte Geschwindigkeit verschwindet, und alsdann erst, wenn diese einfachern Fälle mit Glück behandelt sind, wird man in der ganz allgemeinen Betrachtung jeder Bewegung flüssiger Körper etwas auszurichten hoffen dürfen.

Die linearische und ebene Bewegung kommen zwar im strengsten Sinne in der Natur nicht vor, da die erste nur für unendlich enge Röhren, und die zweite nur für unendlich schmale Canäle oder Gefäſse paſst, indeſs kann man doch auch von den Untersuchungen über diese Bewegungen unmittelbare Anwendungen machen, weil z. B. die Bewegung in Röhren, die auch nicht ganz

enge sind, sehr nahe den Gesetzen gemäſs ist, welche man für die linearische Bewegung findet. Wir werden im Folgenden sehen, wie sich die Formeln für die linearische Bewegung aus den bisherigen Untersuchungen herleiten lassen, und die Anwendung auf diesen einfachern Fall weiter aus einander setzen.

---

## *Zweite Abtheilung.*

# Anwendung der allgemeinen Formeln auf die linearische Bewegung flüssiger Körper, besonders des Wassers.

---

## Erster Abschnitt.

### *Von den Principien der linearischen Bewegung flüssiger Körper.*

---

236. Erklärung.

Man nennt die Bewegung eines flüssigen Körpers linearisch, wenn er sich nach einer gewissen Linie $DE$ (Fig. 34.) so fortbewegt, daſs in jedem Punkte $Z$ die Richtung der Bewegung mit dieser Linie übereinstimmt, und zugleich in jedem Punkte des auf diese Richtungslinie senkrechten Querschnitts $UV$ die Geschwindigkeit gleich groſs ist.

237. Wenn also eine Bewegung linearisch heiſsen soll, so muſs sie folgende zwei Eigenschaften haben, erstlich, daſs die Bewegung allenthalben der Richtung einer gewissen Linie $DE$ folge, zweitens, daſs die Theilchen, welche in demselben auf diese Richtungslinie senkrechten Querschnitt liegen, mit gleicher Geschwindigkeit nach derselben Richtung fortgehen.

Eine solche Bewegung würde man also vollständig kennen, wenn die Richtungslinie *DE* und die Geschwindigkeit in jedem Punkte *Z* bekannt wäre; denn die Bewegung aller Theilchen in dem durch *Z* gehenden Querschnitte *UV* ist völlig der Bewegung des Punktes *Z* gleich.

238. Wenn der flüssige Körper durch eine sehr enge Röhre *DE* (Fig. 35.) fliefsen mufs, so kann man die Bewegung für eine wirklich linearische, wie sie hier beschrieben ist, halten; denn wegen der Enge der Röhre kann in jedem Punkte *Z* die Richtung der Bewegung keine andre seyn, als welche mit dem ganzen Laufe der Röhre übereinstimmt. Man kann sich durch die Mitte der Querschnitte der Röhre eine Linie *DZE* gezogen denken, welche die Richtungslinie der Bewegung darstellt, und nimmt alsdann an, dafs jedes Theilchen *Z* nach der Richtung dieser Linie fortrücke, und dafs in dem ganzen Querschnitt *UV* die Geschwindigkeit einerlei, und die Richtung der Bewegung der an *Z* gezogenen Tangente der Richtungslinie parallel ist. Fände dieses nicht Statt, sondern wäre in einem Theile desselben Querschnitts die Bewegung schneller, als in einem andern Theile, so würde eine solche Bewegung nicht zu denjenigen gehören, deren Betrachtung wir hier unter dem Namen der linearischen Bewegung unternehmen. Eine solche Ungleichheit der Bewegung in verschiedenen Theilen desselben Querschnitts wird aber desto weniger Statt finden können, je enger die Röhre ist, und diese Ungleichheit fiele ganz weg, wenn man sich die Röhre als unendlich enge dächte. Indefs hat man nicht nöthig, die Röhre allenthalben gleich weit anzunehmen, sondern man kann die Untersuchung auch auf Röhren von ungleicher Weite erstrecken, wenn man nur voraussetzt, dafs an keiner Stelle die Continuität durch plötzliche Erweiterungen oder Verengungen, wie in der Figur bei *F*, unterbrochen werde, denn an solchen Stellen würde ein Theil des Flüssigen fast ganz in Ruhe bleiben, und die Bewegung also nicht, den Voraussetzungen gemäfs, durch den ganzen Querschnitt einerlei seyn.

239. Obgleich also die linearische Bewegung eigentlich unendlich enge Röhren erfordert, so ist doch auch oft die Bewegung in weitern Röhren den Gesetzen gemäſs, welche wir für die linearische Bewegung finden; in solchen Fällen kann man also die folgenden Lehrsätze auch bei weitern Röhren anwenden. Ueberdies kommt es in manchen Fällen nicht darauf an, wenn die Rechnung auch ein wenig von der Erfahrung abweicht, und man hat daher diejenigen Sätze, welche eigentlich nur für die linearische Bewegung gelten, auch auf die Bewegung des Wassers, welches aus weitern Gefäſsen ausflieſst, angewandt, und die Resultate, wenigstens in mancher Rücksicht, der Erfahrung gemäſs, befunden. Indeſs erfordert die völlig strenge Theorie, daſs wir hier diese Untersuchungen, welche eigentlich nicht die linearische Bewegung betreffen, ausschliefsen, und bei der Betrachtung der Bewegung in sehr engen Röhren stehen bleiben.

240. Diese Untersuchung umfaſst sehr viele verschiedene Fälle, da die Röhren gerade oder gekrümmt, und ihre Querschnitte alle gleich oder ungleich seyn können; ferner, da das Fluidum sich entweder blos in der Röhre fortbewegt, oder aber irgendwo ausflieſst, und endlich, da die Natur des flüssigen Körpers und die auf ihn wirkenden beschleunigenden Kräfte bei der Bestimmung der Bewegung in Betrachtung gezogen werden müssen.

241. Problem 48. Der flüssige Körper bewegt sich in einer geraden, sehr engen Röhre, man sucht die allgemeinen Formeln für seine Bewegung nach der ersten, vorhin angegebenen Methode.

Auflösung. Die Richtungslinie $OA$ (Fig. 34.) der Röhre, durch welche das Fluidum sich bewegt, sey gerade, die Weite der Röhre $OIaA$ aber ungleich. Man betrachte am Ende der Zeit $t$ das Theilchen des flüssigen Körpers, welches den Raum $XxvV$ einnimmt, und setze die Entfernung $OX$ von einem bestimmten Anfangspunkte $O$

$= x$, den Querschnitt der Röhre bei $X$, $XV = \omega$, so ist $\omega$ eine gegebene Function von $x$, weil die Gestalt der Röhre bekannt ist. Ferner sey in dem Querschnitte $XV$ die Geschwindigkeit des flüssigen Körpers nach der Richtung $XA = u$, die Dichtigkeit $= q$, der Druck $= p$, so werden $u$, $q$ $p$ Functionen der beiden veränderlichen Gröſsen $x$ und $t$ seyn, und man wird aus der Natur des flüssigen Körpers wissen, wie $q$ von $p$, oder von $p$ und der Wärme $r$, wenn man auf diese Rücksicht nehmen muſs, abhängt. Das Theilchen $XxvV$ nehme nach der Länge der Röhre den Raum $Xx = dx$ ein, so ist sein Volumen $= \omega dx$, seine Masse $= q\omega dx$. Dasselbe Theilchen rückt während der Zeit $dt$ nach $X'x'v'V'$, und da seine Geschwindigkeit in $X = u$ war, so ist $XX' = udt$; hingegen wird die Geschwindigkeit in $x$ durch $= u + dx \left(\frac{du}{dx}\right)$ ausgedrückt, und es ist daher $xx' = udt + dtdx \left(\frac{du}{dx}\right)$, folglich

$$X'x' = dx + dtdx \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Der Querschnitt, in welchem $X'$ liegt, ist $= \omega + udt.\frac{d\omega}{dx}$, folglich das Volumen $X'V'v'x'$ dieses Theilchens

$$= \omega dx + dtdx.\left\{\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + u\frac{d\omega}{dx}\right\}.$$

Die Dichtigkeit $q$ betrachten wir als eine Function von $x$ und $t$, wenn daher $x$ um die Gröſse $udt$, und $t$ um die Gröſse $dt$ wächst, so wird die Dichtigkeit

$$= q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

man erhält also jetzt die Masse des Theilchens $X'V'v'x'$

$$= q\omega dx + dxdt\left\{q\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + qu.\frac{d\omega}{dx} + \omega u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right)\right\},$$

welche $= q\omega dx$ seyn muſs, weil die Masse desselben Theilchens während der Bewegung ungeändert bleibt. Wir

erhalten daher die erste Gleichung zur Bestimmung der Bewegung $q\omega \left(\frac{du}{dx}\right) + qu . \frac{d\omega}{dx} + \omega u \left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$, oder

$$qu . \frac{d\omega}{\omega dx} + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Um zur Bestimmung der zweiten Gleichung zu gelangen, mufs man überlegen, dafs während der Zeit $dt$ die Geschwindigkeit desselben Theilchens in

$$u + udt \left(\frac{du}{dx}\right) + dt \left(\frac{du}{dt}\right)$$

übergegangen ist, die Beschleunigung der Bewegung desselben ist also $= u \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$, und diese mufs mit den beschleunigenden Kräften, deren Wirkung sie ist, übereinstimmen. Um diese zu bestimmen, müssen wir zuerst auf die Ungleichheit des Druckes in $X$ und $x$ Rücksicht nehmen; der Druck in $X$ ist $= p$, in $x$ aber $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$, also die beschleunigende Kraft, welche das Theilchen zurücktreibt,

$$= \frac{\omega dx \left(\frac{dp}{dx}\right)}{q\omega dx} = \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right).$$

Wirken nun aufserdem beschleunigende, der Schwere ähnliche Kräfte auf den flüssigen Körper, und entsteht aus dieser nach der Richtung $XA$ die beschleunigende Kraft $= P$, so ist die gesammte Kraft, welche die Bewegung nach dieser Richtung beschleunigt, $= P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right)$, und man erhält daher folgende zweite Gleichung für die Bewegung des flüssigen Körpers:

$$2gP - \frac{2g}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right) = u \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

oder, weil hier $t$ als beständig betrachtet wird,

$$\frac{2g dp}{q} = 2g P dx - u du - dx \left(\frac{du}{dt}\right).$$

Diese Gleichung, verbunden mit der vorigen

$$qu \frac{d\omega}{\omega dx} + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

und mit der Gleichung, welche nach der Natur des flüssigen Körpers $p$ durch $q$ ausdrückt, bestimmen die ganze Bewegung.

242. Betrachtet man auch in der zuerst gefundenen Gleichung die Zeit $t$ als unveränderlich, so kann man sie so ausdrücken:

$$d.qu\omega + \omega dx \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

woraus folgt, daſs wenn $q$ eine beständige Gröſse ist, $d.u\omega = 0$, also $u\omega =$ Const. ist, oder eigentlich $u\omega = f:t$, weil bei der Integration die Zeit als unveränderlich betrachtet worden. Man sieht aus dieser Gleichung, daſs die Geschwindigkeiten in verschiedenen Querschnitten in einem bestimmten Augenblicke den Querschnitten umgekehrt proportional sind, welches eine sehr bekannte Bedingung der Bewegung flüssiger Körper in Röhren ist, wenn $q$ unveränderlich ist.

243. Wenn hingegen $q$ vom Drucke abhängt, so muſs man nothwendig beide Gleichungen verbinden, und es hat dann mehr Schwierigkeit für $u$, $p$, $q$, solche Functionen anzugeben, die allen Bedingungen entsprechen.

244. Man kann diese Formeln auch leicht aus den allgemeinern der ersten Abtheilung herleiten. Bei der zweiten Gleichung fällt die Uebereinstimmung mit der des 152. §. sogleich in die Augen, weil diejenigen Glieder, welche dort $dy$, $dz$, oder $v$ und $w$ enthielten, hier wegfallen. Die erste Gleichung scheint sich aber durch das Glied $qu . \frac{d\omega}{\omega dx}$ von der dortigen zu unterscheiden, und nur mit jener übereinzustimmen, wenn die Röhren durchaus gleich weit sind, also $d\omega = 0$ ist. Indeſs läſst sich auch

diese Gleichung aus der allgemeinen Form herleiten. Denn wenn die Röhre sich von $V$ gegen $V'$ zu erweitert, so wird die Richtung der Bewegung bei $V$ um etwas weniges von der Richtung $OA$ divergiren. Man setze also $XV = y$, und die mit der Ordinate $y$ parallele Geschwindigkeit $v = \alpha y$, damit $v$ verschwinde, wenn $y = 0$ ist; nehmen wir nun, damit $w = 0$ werde, an, daſs $z =$ Const. $= \gamma$, oder die Röhre nach dieser Richtung unendlich schmal sey, so ist $\omega = \gamma y$. Weil aber die Dichtigkeit nicht von $y$ abhängt, sondern in dem ganzen Querschnitte gleich ist, so wird $\left(\frac{d.qv}{dy}\right) = q\alpha$. Ferner ist $y$, wenn man ihm seinen ganzen Werth $XV$ gibt, eine Function von $x$, daher $X'V' = y + udt \left(\frac{dy}{dx}\right)$, zugleich aber, wegen der Geschwindigkeit $v$, $X'V' = y + vdt = y(1 + \alpha dt)$, also $\alpha y = \frac{udy}{dx}$, oder $\alpha = \frac{ud\omega}{\omega dx}$, daher $\left(\frac{d.qv}{dt}\right) = qu\frac{d\omega}{\omega dx}$, welches mit dem ersten Gliede unsrer Gleichung einerlei ist. Man übersieht leicht, daſs, wenn wir $z$ nicht $=$ Const. gesetzt hätten, $\omega$ von beiden Gröſsen $y$ und $z$ abhinge, und sich durch ähnliche Schlüsse die Uebereinstimmung unsrer Gleichung mit der des 152. §. zeigen lieſse.

245. Problem 49. Die Bewegung eines flüssigen Körpers in einer geraden Röhre, nach der zweiten Methode, durch den anfänglichen Zustand zu bestimmen.

Auflösung. Man nehme an, daſs dasjenige Theilchen des flüssigen Körpers, dessen Bewegung wir betrachten wollen, anfangs, da $t = 0$ war, den Raum $XVV'X'$ (Fig. 37.) in der Röhre eingenommen habe, und nenne $OX = X$, $XX' = dX$, den Querschnitt der Röhre bei $X$ $= \Omega$, so ist das Volumen $= \Omega dX$, die Masse dieses Theilchens $= Q\Omega dX$, wenn seine anfängliche Dichtigkeit $= Q$ ist. Es sey ferner im Anfange der Zeit $t$ die Geschwindigkeit nach der Richtung $XA = U$, welche in

allen Punkten dieses Querschnitts einerlei ist, und der Druck $= P$.

Eben dieses Theilchen befinde sich am Ende der Zeit $t$ in $x v v' x'$, und es sey $O x = x$, der Querschnitt $x v = \omega$, die Dichtigkeit sey hier $= q$, der Druck $= p$, und die Geschwindigkeit nach der Richtung $x A = u$, so sind die Gröfsen $x$, $q$, $p$, $u$ Functionen von $X$ und $t$; $\omega$ aber eine bekannte Function von $x$, welche von der Gestalt der Röhre abhängt.

Da in eben der Zeit, in welcher $XV$ nach $xv$ rückte, $X'V'$ nach $x'v'$ gekommen ist, so ist $x x' = d X \left(\frac{dx}{dX}\right)$, und des Theilchens $x v v' x'$ Masse $= q \omega d X \left(\frac{dx}{dX}\right)$; dieser Ausdruck mufs dem für die Masse desselben Theilchens im anfänglichen Zustande gefundnen Ausdrucke gleich seyn, also $q \omega \left(\frac{dx}{dX}\right) = \rho \Omega$, welches die erste zur Bestimmung der Bewegung dienende Gleichung ist.

Da ferner die Geschwindigkeit in $x$, $= u = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, also die Beschleunigung $= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ist, so findet man leicht auch die zweite Gleichung. Es entstehe nämlich aus den auf dieses Theilchen wirkenden beschleunigenden Kräften nach der Richtung $x A$ die beschleunigende Kraft $= \mathfrak{P}$; wegen des Druckes aber, welcher in $x'v' = p + d X \left(\frac{dp}{dX}\right)$ ist, entsteht nach der entgegengesetzten Richtung die beschleunigende Kraft

$$= \frac{\omega d X \left(\frac{dp}{dX}\right)}{q \omega d X \left(\frac{dx}{dX}\right)} = \frac{1}{q \left(\frac{dx}{dX}\right)} \left(\frac{dp}{dX}\right);$$

daher die Summe aller Kräfte, welche die Bewegung der kleinen Masse nach der Richtung $xA$ beschleunigen,

$$= \mathfrak{P} - \frac{1}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right),$$

woraus man durch Vergleichung mit der wirklich Statt findenden Beschleunigung

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 2g\mathfrak{P} - \frac{2g}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right)$$

findet, oder, weil man $t$ als beständig betrachtet,

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\mathfrak{P}\,dx - dx\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

die zweite Gleichung, welche die Umstände der Bewegung bestimmt.

245 *b*). Bei der Integration mufs man die Functionen $x$, $p$, $q$, $u$ so bestimmen, dafs sie für $t = 0$ in $X$, $P$, $Q$, $U$ übergehen.

Die Gröfse $\omega$ ist zwar eine bekannte Function von $x$; da aber $x$ selbst von $X$ und $t$ abhängt, so ist auch $\omega$ als Function dieser Gröfsen zu betrachten.

246. Da dieses Problem nur einen besondern Fall des 47ten Problems enthält, so müssen unsre eben gefundenen beiden Gleichungen auch mit den dortigen übereinstimmen. Von der zweiten ist dieses von selbst einleuchtend, denn man braucht dort nur die Glieder, welche $y$ und $z$ enthalten, wegzulassen, um die eben gefundenen zu erhalten. Um die Uebereinstimmung der ersten Gleichung mit der dortigen allgemeinen zu übersehen, müssen wir wieder auf die ungleiche Weite der Röhre Rücksicht nehmen. Wir betrachten daher jetzt alle drei Abmessungen der Röhre, nehmen aber an, dafs $Y$ und $Z$ unendlich klein gegen $X$ sind, und dafs $Z$ für die ganze Röhre einerlei Werth behalte, daher $z = Z$, $\left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$. Es wird nun $\Omega = YZ$,

und wenn man $y = LY$ setzt, wo $L$ eine Function der Zeit $t$ ist, so wird $\left(\frac{dy}{dY}\right) = L$, $\left(\frac{dy}{dX}\right) = 0$, und auch die übrigen Differentiale verschwinden; der Querschnitt der Röhre in $x$ ist jetzt $= \omega = LYZ = L\Omega$. Sucht man nach diesen Voraussetzungen den Werth der Gröſse $K$ (im 47. Probl.), so wird $K = \left(\frac{dx}{dX}\right) \cdot L$, oder, weil $L = \frac{\omega}{\Omega}$, $K = \frac{\omega}{\Omega}\left(\frac{dx}{dX}\right)$, und es sollte nach der allgemeinen Gleichung $Kq = Q$ seyn, welches nun mit dem hier gefundenen $q\omega\left(\frac{dx}{dX}\right) = Q\Omega$ übereinstimmt.

Die Auflösung dieses speciellen Falles ist also in jener allgemeinen Auflösung enthalten.

247. Problem 50. Wenn die Richtungslinie $IYK$ (Fig. 38.) der Röhre eine krumme Linie ist, die in einer Ebene liegt, und die Querschnitte $VY$ der Röhre ungleich sind, die Bewegung des flüssigen Körpers in dieser Röhre nach der ersten Methode zu bestimmen.

Auflösung. Am Ende der Zeit $t$ betrachte man das Theilchen des flüssigen Körpers, das den Raum $YVvy$ der Röhre einnimmt, und setze für den Punkt $Y$ die beiden Coordinaten $OX = x$, $XY = y$, deren Abhängigkeit von einander durch die Figur der Richtungslinie bestimmt ist, so daſs man $y$ als eine Function von $x$ betrachten kann. Die sehr geringe Weite der Röhre in $Y$ sey $= \omega$, welches wir ebenfalls als eine bekannte Function von $x$ betrachten. Ferner bedeutet $q$ die Dichtigkeit, $p$ den Druck im Punkte $Y$, und $z$ die Geschwindigkeit des flüssigen Körpers nach der Richtung $Yy$, und diese drei Gröſsen sind also Functionen von $x$ und $t$, welche bestimmt werden müssen.

Nennt man den kleinen Bogen $Yy$ der Richtungslinie $= ds$, so ist die Geschwindigkeit nach der Richtung $OX$

oder $u = \frac{z\,dx}{ds}$, die Geschwindigkeit nach $XY = v = \frac{z\,dy}{ds}$, ferner des Theilchens $YVvy$ Volumen $= \omega ds$, weil der Querschnitt $YV$ auf $ds$ senkrecht ist, die Masse desselben $= q\omega ds$. Rückt dasselbe Theilchen in der kleinen Zeit $dt$ nach $Y'V'v'y'$, so ist

$$XX' = u\,dt = \frac{z\,dx.dt}{ds},\ X'Y' - XY = \frac{z\,dt.dy}{ds},$$

$$X'x' = dx + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right),\ x'y' - X'Y' = dy + dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

folglich $Y'y' = \surd[X'x'^2 + (x'y' - X'Y')^2]$

$$= ds + \frac{dt.dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right);$$

die Weite der Röhre ist in $Y' = \omega + u\,dt.\frac{d\omega}{dx}$,

die Dichtigkeit $= q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$,

daher dieses Theilchens $Y'y'v'V'$ Masse

$$= q\omega ds + \frac{q\omega.dt\,dx}{ds}\left\{dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}$$
$$+ q\,u\,dt\,ds.\frac{d\omega}{dx} + \omega\,ds\,dt\left\{u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right)\right\},$$

welche eben so groſs seyn muſs, als am Anfange der Zeit $dt$, nämlich $= q\omega ds$; daher erhalten wir

$$q\frac{dx}{ds}.\left\{\frac{dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dx}\right)}{ds}\right\} + qu.\frac{d\omega}{\omega dx} + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

oder, weil $u = z.\frac{dx}{ds}$, $v = \frac{z\,dy}{ds}$ ist;

$$qz.\frac{d\omega}{\omega ds} + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d.qz}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

In $Y'$ sind die Geschwindigkeiten nach den Richtungen der Coordinaten $x$ und $y$, $= u + u\,dt\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)dt$, und

$= v + u\,dt\left(\frac{dv}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$, also die Beschleunigungen nach diesen Richtungen $= u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$ und $= \left(\frac{dv}{dx}\right)u + \left(\frac{dv}{dt}\right)$; diese müssen die Wirkung der beschleunigenden Kräfte seyn, welche auf das Theilchen $YyvV$ wirken. Da nun der Druck in $y = p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ist, so wird dieses Theilchen des flüssigen Körpers wegen der Ungleichheit des Drucks von einer beschleunigenden Kraft, welche $= \frac{dx}{q\,ds}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ist, nach der Richtung $yY$ getrieben, und wenn man diese nach der Richtung der Coordinaten zerlegt, und die übrigen auf den flüssigen Körper wirkenden beschleunigenden Kräfte dazu nimmt, welche wir mit $P$, $Q$ bezeichnen, so ist die Summe aller Kräfte, welche die Bewegung nach der Richtung der Coordinaten beschleunigen, nach der Richtung $OX = P - \frac{dx^2}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, und nach der Richtung $XY = Q - \frac{dx\,dy}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, und daher

$$2gP - \frac{2g\,dx^2}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$= \frac{zz}{ds}.d.\frac{dx}{ds} + \frac{z\,dx^2}{ds^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{dt}\right);$$

$$2gQ - \frac{2g\,dx\,dy}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right),$$

$$= \frac{z^2}{ds}.d.\frac{dy}{ds} + \frac{z\,dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{dz}{dt}\right);$$

woraus folgt, wenn man die erste Gleichung mit $dy$, die zweite mit $dx$ multiplicirt, und die letzte von der ersten abzieht,

$$2g\,(P\,dy - Q\,dx) = \frac{zz}{ds}\left(\frac{dy.d^2x - dx\,d^2y}{ds}\right),$$

hingegen, wenn man die erste Gleichung mit $dx$, die zweite mit $dy$ multiplicirt und beide addirt, so wird

$$2g(Pdx + Qdy) - \frac{2g.dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) + ds\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Die erste Gleichung, welche die Wirkung der beschleunigenden Kräfte senkrecht auf die Richtung der Bewegung oder die Wand der Röhre angibt, geht uns hier nichts an, da sie auf die Bewegung des Flüssigen keinen Einfluſs hat; die letzte aber gibt, wenn man blos $x$ als veränderlich betrachtet,

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(Pdx + Qdy) - u\,du - ds\left(\frac{du}{dt}\right).$$

248. Die letzte Gleichung hätte sich leichter finden lassen, wenn man sogleich die aus den Kräften $P$, $Q$ zusammengesetzte nach der Richtung $Yy$ gesucht hätte; man findet diese $= \frac{Pdx}{ds} + \frac{Qdy}{ds}$, daher die Summe aller Kräfte, welche des Theilchens Bewegung nach der Richtung der Röhre beschleunigen, $= \frac{Pdx + Qdy}{ds} - \frac{dx}{qds}\left(\frac{dp}{dx}\right)$.

Die Geschwindigkeit aber ist aus $u$ in

$$u + \frac{u\,dx\,dt}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$$

übergegangen, also die Beschleunigung nach der Richtung der Röhre $= u\frac{dx}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$, woraus, wenn man sie mit den Kräften vergleicht, dieselbe Gleichung, wie oben, folgt

$$\frac{2g\,dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = 2g(Pdx + Qdy) - u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) - ds\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Hätte man im Gegentheil diejenige Kraft gesucht, welche aus $P$ und $Q$ senkrecht auf die Richtung der Bewegung entspringt, so würde man sie $= \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ gefunden haben: aus der Verschiedenheit des Druckes entspringt keine beschleunigende Kraft nach dieser Richtung. Wenn man nun ferner aus den Geschwindigkeiten, mit welchen das be-

trachtete Theilchen des Flüssigen am Anfange und am Ende der Zeit $dt$ sich nach der Richtung der Coordinaten fortbewegt, die Geschwindigkeit senkrecht auf die Tangente in $Y$ sucht, so findet man diese zu Anfang der Zeit $dt = 0$, am Ende der Zeit $dt$ aber $= \frac{z^2}{ds^3}(dy\,d^2x - dx\,d^2y)$, weil nämlich die Röhre sich in dem Zwischenraume $YY'$ krümmt. Man darf aber nicht glauben, daſs diese Beschleunigung die einzige Wirkung jener Kraft sey, sondern diese Wirkung wird durch die feste Wand der Röhre zum Theil zerstört; nennt man diesen Theil $= R$, so würde

$$2g\left(\frac{Pdy - Qdx}{ds} - R\right) = \frac{z^2}{ds^3}(dy\,d^2x - dx\,d^2y),$$

oder, weil $\frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y} =$ dem Krümmungshalbmesser der Curve $IYK$ im Punkte $Y$ ist, welchen ich $= r$ nennen will, $R = -\frac{z^2}{2gr} + \frac{Pdy}{ds} - \frac{Qdx}{ds}$, wo das Glied $\frac{z^2}{2gr}$ die Schwungkraft ist, welche das Theilchen nach der Richtung $YV$ treibt.

249. Die in der Auflösung des Problems gefundenen beiden Hauptgleichungen für die Bewegung des flüssigen Körpers stimmen sehr nahe mit denen überein, welche wir für gerade Röhren im 48. Problem fanden. Die erste läſst sich auf eine noch bequemere Form bringen, indem $\frac{dx}{ds}\left(\frac{d.qz}{dx}\right) = \left(\frac{d.qz}{ds}\right)$ ist, weil $s$ blos von $x$ abhängt. Daher läſst sich die erste Gleichung so ausdrücken:

$$qz\frac{d\omega}{\omega\,ds} + \left(\frac{d.qz}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0;$$

$$\text{oder } \left(\frac{d.qz\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0;$$

die zweite aber war

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(Pdx + Qdy) - z\,dz - ds\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

und diese Gleichungen sind nun ganz von der Gestalt der Röhre unabhängig, da die Differentiale der Formeln $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, welche die Krümmung bestimmen, aus der Rechnung wegfallen: man sieht hieraus, daſs die Krümmung der Röhre die Bewegung des flüssigen Körpers nicht ändert. — Indeſs gelten diese Schlüsse nur, wenn die Röhre nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmt ist; bei scharfen Winkeln sind die Differentialformeln nicht anwendbar.

250. Ich habe die Auflösung dieses Problems deswegen auf einem, sonst nicht nothwendigen, Umwege gesucht, damit es deutlich erhelle, daſs die Krümmung der Richtungslinie auf die Bewegung des flüssigen Körpers keinen Einfluſs habe. Jetzt aber ist es überzeugend dargethan, daſs derjenige Theil der Kräfte, welcher zur Aenderung der Richtung der Bewegung dient, bei der Berechnung der Geschwindigkeit nicht in Betrachtung kommt, sondern daſs diese und alle Umstände der Bewegung so bleiben, als ob die Röhre gerade wäre. Nur muſs man in Rücksicht der auf den flüssigen Körper wirkenden Kräfte bemerken, daſs für jedes Theilchen nur diejenige beschleunigende Kraft dürfe gesucht werden, welche nach der Richtung der Bewegung wirkt.

Man übersieht nun, daſs die Formeln für eine krumme Röhre sich aus den für gerade Röhren angegebenen hätten herleiten lassen, wenn man $s$ statt $x$, und $v$ statt $u$ gesetzt hätte, statt $P$ aber die nach der Richtung der Bewegung wirkende Kraft $= P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}$. Diese Bemerkung wird uns die Auflösung der folgenden Probleme sehr erleichtern.

251. Noch einem Zweifel glaube ich hier begegnen zu müssen. Bei der Ungleichheit des Druckes, welchen die Flächen $yv$ und $YV$ leiden, nahm ich keine Rücksicht auf die ungleiche Gröſse dieser Flächen: die Höhe, welche

den Druck auf $yv$ bestimmt, war $= p + dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$, und die Gröſse dieser Fläche $yv = \omega + dx \left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, also der ganze Druck, den die Fläche leidet,

$$= p\omega + p \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \omega \left(\frac{dp}{dx}\right) dx,$$

statt daſs der Druck auf $YV$ nur $= p\omega$ war; man muſs sich aber hiebei erinnern, daſs der Druck auf $YV$ sich durch den flüssigen Körper so fortpflanzt, daſs auf jeden Punkt der Fläche $yv$ ein Druck entsteht, welcher der Höhe $p$ entspricht, so daſs also auf die Gröſse dieser Fläche nichts ankommt, sondern beide Pressungen sich einander aufheben würden, wenn $\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$ wäre. Es erhellet daher, daſs nur das Glied $\omega dx \left(\frac{dp}{dx}\right)$ bei Betrachtung der Ungleichheit des Drucks braucht erwogen zu werden.

252. Problem 51. Wenn die Richtungslinie $IK$ (Fig. 39.) der Röhre eine krumme, in einer Ebene liegende Linie ist, die Bewegung des flüssigen Körpers in dieser Röhre nach der zweiten Methode zu bestimmen.

Auflösung. Im anfänglichen Zustande sind für den Punkt $Y$ eines gewissen Theilchens $YVY'V'$ des flüssigen Körpers, die Coordinaten $OX = X$, $XY = Y$, der Bogen $IY = S$, der Querschnitt der Röhre $YV = \Omega$; $Q$ bedeutet wieder die Dichtigkeit, $P$ den Druck in $Y$, und Y bezeichne die Geschwindigkeit des Theilchens nach der Richtung der Röhre. Setzt man nun $YY' = dS$, so ist dieses Theilchens Masse $= Q\Omega dS$. In der Zeit $t$ sey dieses Theilchen nach $yvv'y'$ gekommen, und es sey $Ox = x$, $xy = y$, der Bogen $Iy = s$, der Querschnitt $yv = \omega$, die Dichtigkeit $= q$, der Druck $= p$, so läſst sich durch eben die Schlüsse, wie im 49. Problem, die Bewegung bestimmen, weil die Krümmung der Röhre die Bewegung nicht

ändert: nur muſs man hier $S$ statt des dortigen $X$ setzen, und statt $\mathfrak{P}$ die Summe der beschleunigenden Kräfte, welche nach der Richtung der Bewegung auf das betrachtete Theilchen wirkte. Nennt man nämlich hier die nach der Richtung der Coordinaten $x$, $y$ wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so entsteht aus ihnen nach der Richtung der Röhre die beschleunigende Kraft $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy}{ds}$, und wenn man diese statt des dortigen $\mathfrak{P}$ setzt, so werden die beiden Gleichungen für die Bestimmung der Bewegung $q\omega \left(\frac{ds}{dS}\right) = Q\Omega$, und $\frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy) - ds\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, wo in der letzten Gleichung $t$ als beständig betrachtet wird.

253. Diese Gleichungen bestimmen $x$, $q$ und $p$ als Functionen von $X$ und $t$, und diese Functionen müssen so beschaffen seyn, daſs sie für $t = 0$, $x = X$, folglich auch $s = S$, ferner $q = Q$, $p = P$ geben. Man findet ferner die Geschwindigkeit $= \left(\frac{ds}{dt}\right)$, und auch diese muſs für $t = 0$ in $\left(\frac{ds}{dt}\right) = Y$ übergehen. Man darf aber für den anfänglichen Zustand weder $P$, noch $Y$ willkürlich annehmen, sondern man muſs sie so annehmen, wie es den aus den Gleichungen gefundenen Werthen für $p$ und $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ gemäſs ist, wenn man in diesen $t = 0$ setzt. Denn selbst bei der gröſsten Allgemeinheit der Integration ist es doch unmöglich, daſs für jedes Theilchen $Y$ und $P$ willkürlich angenommene Werthe erhalten, da z. B. bei flüssigen Körpern, die keine Zusammendrückung zulassen, die Geschwindigkeit in allen Querschnitten bestimmt ist, sobald man sie in einem bestimmt hat, und vom Drucke etwas ähnliches gilt — man übersieht leicht, daſs auch bei veränderlicher Dichtigkeit, Geschwindigkeit und Druck an verschiedenen

S 2

Stellen nicht so gänzlich von einander unabhängig sind, daſs man sie für den anfänglichen Zustand willkürlich annehmen dürfte.

254. Problem 52. Wenn die Richtungslinie $IZzK$ (Fig. 40.) der Röhre eine doppelt gekrümmte Linie ist, und die verschiedenen Querschnitte der Röhre ungleich; die Gesetze der Bewegung in dieser Röhre nach der ersten Methode zu bestimmen.

Auflösung. Wir betrachten am Ende der Zeit $t$ ein Theilchen des Flüssigen in $zv$, und nennen $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, wo $y$ und $z$ als bekannte Functionen von $x$ betrachtet werden müssen. Der Bogen $Iz$ der Richtungslinie sey $= s$, der Querschnitt $zv = \omega$, welches eine Function von $s$ oder $x$ ist; $p$, $q$ behalten ihre gewöhnliche Bedeutung, $u$ ist die Geschwindigkeit in $zv$ nach der Richtung der Röhre, und diese Gröſsen sind Functionen von $s$ und der Zeit $t$. Wenn auf den flüssigen Körper beschleunigende Kräfte wirken, so bezeichnen wir für den Punkt $z$ die nach der Richtung der drei Coordinaten wirkenden mit $P$, $Q$, $R$, und es erhellet, daſs aus ihnen nach der Richtung der Röhre $zK$ sich die Kraft $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ ergibt. Wir können daher, nach den vorhin entwickelten Gründen, da die Krümmung der Röhre die Bewegung nicht ändert, die beiden Gleichungen bestimmen, welche die Umstände der Bewegung angeben: sie sind

$$\left(\frac{d.\,qu\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ und}$$

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(Pdx + Qdy + Rdz) - u\,du - ds\left(\frac{du}{dt}\right),$$

wo in der letzten $t$ als beständig betrachtet wird.

255. Problem 53. Die Bewegung eines flüssigen Körpers in einer Röhre, deren Richtungslinie nicht in einer Ebene liegt, nach der zweiten Methode aus dem anfänglichen Zustande zu bestimmen.

Auflösung. Für irgend einen Punkt $Z$ (Fig. 40.) der Richtungslinie sind die Coordinaten $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, die Länge des Bogens $IZ = S$, der Querschnitt $ZV = \Omega$. An dieser Stelle befand sich am Anfange der Zeit $t$ ein Theilchen des Flüssigen, dessen Dichtigkeit $= Q$, seine Geschwindigkeit nach der Richtung der Röhre $= Y$ war, und welches den Druck $= P$ litt: diese Gröfsen sind also als Functionen der Gröfse $S$ zu betrachten, und als bekannt anzusehen. Am Ende der Zeit $t$ ist dasselbe Theilchen nach $z$ gekommen, und es ist $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, der Bogen $Iz = s$, die Weite der Röhre $zv = \omega$, ferner jetzt in $zv$ die Dichtigkeit $= q$, der Druck $= p$, die Geschwindigkeit nach der Richtung der Röhre $= \left(\frac{ds}{dt}\right) = s$: alle diese Gröfsen sind Functionen der beiden veränderlichen Gröfsen $S$, $t$; aber $x$, $y$, $z$ und $\omega$ sind bekannte Functionen von $s$, welches selbst von $S$ und $t$ abhängt. Die im Punkte $z$ auf den flüssigen Körper wirkenden beschleunigenden Kräfte sind, wenn man sie nach der Richtung der Coordinaten zerlegt, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, und die beiden Gleichungen für die Bewegung sind

$$q\omega \left(\frac{ds}{dS}\right) = Q\Omega \text{ und}$$

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(\mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz) - ds\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right).$$

256. So haben wir also für alle Verschiedenheiten der Gestalt der Röhre die Bewegung des flüssigen Körpers auf allgemeine Formeln gebracht, und diese mit Hülfe der zwei verschiedenen Methoden auf verschiedene Weise ausgedrückt. Man wird bei der Anwendung bald die eine, bald die andre Methode mit mehr Vortheil gebrauchen, und wenn man beide anwendet, so wird nicht nur ihre Uebereinstimmung die Wahrheit desto mehr bestätigen, sondern jede wird auch etwas zur genauern Kenntnifs der Natur der Bewegung beitragen. Die Haupteintheilung der folgenden Untersuchungen gründet sich nun auf die Verschiedenheit

der flüssigen Körper, je nachdem ihre Dichtigkeit veränderlich ist, oder nicht; man könnte auch noch den Fall hinzufügen, wo die Fluida gemischt sind, wenn z. B. der Zusammenhang durch Blasen unterbrochen ist. Wir werden zuerst bei der Bewegung des Wassers in Röhren stehen bleiben, und zuerst den Fall betrachten, da die Röhre überall gleich weit ist. — Uebrigens betrachten wir hier das Wasser als einen vollkommen flüssigen Körper, und was von der Bewegung des Wassers gilt, gilt von allen Fluidis, die nicht compressibel sind.

---

## Zweiter Abschnitt.

### *Von der Bewegung des Wassers in Röhren, welche allenthalben gleich weit sind.*

---

257. Problem 54. Die Bewegung des Wassers in einer allenthalben gleich weiten Röhre, deren Richtungslinie irgend eine krumme Linie ist, zu bestimmen, wenn blos die Schwere auf dasselbe wirkt.

Auflösung. Die Richtungslinie $IZzK$ (Fig. 40.) der Röhre $IikK$ sey irgend eine Curve, deren Gestalt durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ gegeben ist, so ist auch der Bogen $Iz = S$ bekannt, und da sein Differential $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ist, so können die Gröfsen $x, y, z$ als Functionen von $s$ betrachtet werden. Die Querschnitte der Röhre, welche an jeder Stelle einerlei sind, wollen wir mit $\alpha$, die Dichtigkeit des Wassers mit $b$ bezeichnen, also in den allgemeinen Gleichungen $\omega = \alpha$, $q = b$ setzen. Am Ende der Zeit $= t$ sey der Druck des Wassers in $z = p$, die Geschwindigkeit nach der Richtung $zK — u$; die beschleunigenden Kräfte

werden hier, wo wir blos auf die Schwere Rücksicht nehmen, $P = 0$, $Q = 0$, $R = -1$, wenn wir $yz$ als vertical betrachten; und die allgemeinen Gleichungen des 52. Problems werden nun $\left[\frac{d\varkappa}{ds}\right] = 0$ und

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - \varkappa\,d\varkappa - ds\left[\frac{d\varkappa}{dt}\right].$$

Aus der ersten erhellt, daſs die Geschwindigkeit $\varkappa$ blos von der Zeit abhängen dürfe, also $\varkappa = \Gamma : t$ sey; man erhält daher in der zweiten, wo blos $s$ als veränderlich betrachtet wird, $d\varkappa = 0$, aber $\left[\frac{d\varkappa}{dt}\right] = \Gamma' : t$, folglich

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds\,.\,\Gamma' : t \text{ und}$$

$$\frac{2gp}{b} = 2g\,(h-z) - s\,\Gamma' : t + \Delta : t,$$

wo $\Delta : t$ die unbestimmte, bei der Integration hinzukommende Function von $t$; $h$ aber eine unbestimmte beständige Gröſse ist.

In einem bestimmten Augenblicke also ist die Geschwindigkeit des Wassers in der ganzen Röhre einerlei, zu verschiedenen Zeiten aber kann sie veränderlich seyn, und diese allgemeine Auflösung enthält keine nähern Bestimmungen dieser Veränderlichkeit; der Druck aber hängt nicht blos von diesen Aenderungen der Geschwindigkeit ab, sondern kann auch noch auſserdem durch äuſsere Kräfte, welche durch die Function $\Delta : t$ ausgedrückt sind, verändert werden.

258. Obgleich also hier noch sehr vieles unbestimmt bleibt, so läſst sich doch behaupten, daſs die Bewegung immer möglich sey, was für eine Function von $t$ man auch für $\varkappa$ setze, wofern man nur äuſsere Kräfte anbringt, welche die Beschleunigung oder Verzögerung, so wie man sie voraussetzt, zu bewirken im Stande sind.

259. Es ist wohl der Mühe werth, die Auflösung dieses Problems auch nach der zweiten Methode zu suchen. Behält man alle Bezeichnungen des 53. Problems bei, setzt aber, weil die Dichtigkeit unveränderlich ist, und alle Querschnitte der Röhre gleich grofs sind, $q = Q = b$, $\omega = \Omega = \alpha$, so erhält man aus der ersten Gleichung $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, oder $s = S + F : t$, die Geschwindigkeit wird also $= \left(\frac{ds}{dt}\right) = F' : t$ für jeden Punkt $z$. Die zweite Gleichung gibt $\frac{2gdp}{b} = -2gdz - ds \,.\, F'' : t$, woraus, weil $t$ als beständige Gröfse betrachtet wird,

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - z) - s \,.\, F'' : t + \Delta : t$$

folgt, welches ganz mit der vorhin gefundnen Auflösung übereinstimmt, weil hier $F' : t$ gleich dem dortigen $\Gamma : t$ ist.

Man könnte vielleicht einwenden, da $z$ und $s$ von den beiden veränderlichen Gröfsen $S$ und $t$ abhängen, in der letzten Gleichung aber $t$ als unveränderlich betrachtet wird, so müsse man für $dz$, $ds$ nicht die vollständigen Differentiale nehmen, sondern nur diejenigen Theile, welche aus der Veränderlichkeit von $S$ entspringen, und dürfe nicht so integriren, wie wir eben gethan haben. Um diesen Zweifel näher zu beleuchten, will ich $dz = MdS + Ndt$ setzen, dafs man also in der letzten Gleichung $MdS$ statt $dz$ schreiben mufs, weil $t$ als beständig angesehen wird; alsdann aber ist wiederum $\int MdS = z$, welchem man noch eine unbestimmte Function von $t$ hinzufügen kann, die in der obigen Auflösung in der Form $\Delta : t$ mit enthalten ist. Es erhellet also, dafs die Integration ganz richtig ausgeführt, und dieser Zweifel ungegründet sey.

260. Die Auflösung dieses Problems umfafst alle Fälle der Bewegung in gleich weiten Röhren, und läfst sich bei allen äufsern Kräften, die auf den flüssigen Körper wirken

können, anwenden; in jedem bestimmten Falle mufs die Beschaffenheit der Bewegung aus diesen Kräften gefunden werden. Da aber das Wasser sich in der Röhre befindet, und die Röhre als fest und von unveränderlicher Gestalt betrachtet wird, so können keine andre äufsere Kräfte auf dasselbe wirken, als welche an jedem Ende auf die Wassermasse drücken. Nimmt man nämlich keinen neuen Zuflufs von Wasser, und keinen Ausflufs aus der Röhre an, sondern betrachtet blos das Fortrücken der Wassermasse in der Röhre, deren Länge hier als unbegränzt angenommen wird, so können auf beide Enden dieser Wassermasse äufsere Kräfte drücken. Wir wollen die Bewegung, welche bei der Wirkung solcher äufsern Kräfte entsteht, näher betrachten, dabei aber, weil die Krümmung der Röhre nicht weiter in Betrachtung kommt, als die Höhe $z$ davon abhängt, die Röhre so ansehen, als ob sie gerade, zugleich aber die Höhe jedes Punktes über einer bestimmten horizontalen Ebene gegeben wäre.

261. Problem 55. Wenn eine gewisse Wassermasse, welche sich in einer durchaus gleich weiten Röhre fortbewegt, von beiden Seiten durch äufsere Kräfte gedrückt wird, alle Umstände der Bewegung für jeden Zeitpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Wir können uns die Röhre, sie mag, wie man will, gekrümmt seyn, allemal als gerade ausgedehnt vorstellen, und blos dabei voraussetzen, dafs die Höhe jedes Punktes $z$ (Fig. 41.) über einer bestimmten horizontalen Ebene gegeben und $= z$ sey. Nach Verlauf der Zeit $t$ nehme die Wassermasse in der Röhre den Raum $MN$ ein, so wird die Länge dieses Raumes für jeden Zeitpunkt gleich grofs, $MN = l$ eine beständige Gröfse seyn. Es sey nun, von einem bestimmten Punkte $A$ an gerechnet, die Länge der Röhre $AM = m$, $AN = n$, folglich $l = n - m$ die Höhe des Punktes $M$ über der horizontalen Ebene, von welcher an die Höhen $z$ gerechnet werden, sey $= \mu$, die Höhe des Punktes $N = \nu$, die Geschwindigkeit, mit wel-

cher jeder Theil der Wassermasse nach der Richtung der Röhre fortrückt, $= s = \Gamma : t$, eine Function, welche näher bestimmt werden mufs. Wir nehmen nun an, dafs die Wassermasse in $M$ einen äufsern Druck $= M$, in $N$ einen Druck $= N$ leide, und dafs $M$, $N$ gegebene Functionen der Zeit $t$ sind, und werden die allgemeine Gleichung des vorigen Problems auf diesen bestimmtern Fall anwenden.

Wenn nämlich irgend eines Punktes z Entfernung von $A$, $Az := s$, seine Höhe $= z$, der Druck in diesem Punkte $= p$ ist, so fanden wir

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h-z) - s \,.\, \Gamma' : t + \Delta : t.$$

Aus dem gegebenen Druck in $M$ und $N$ aber haben wir, wenn wir $z = \mu$, $s = m$ setzen,

$$\frac{2gM}{b} = 2g(h-\mu) - m \,.\, \Gamma' : t + \Delta : t,$$

und eben so für N, wenn $z = \nu$; $s = n$ genommen wird,

$$\frac{2gN}{b} = 2g(h-\nu) - n\Gamma' : t + \Delta : t,$$

$$\text{daher } \frac{2g}{b}(M-N) = 2g(\nu-\mu) + (n-m)\,\Gamma' : t.$$

$$\text{folglich } \Gamma' : t = \frac{2g}{b\,.\,(n-m)}\,[M-N-b(\nu-\mu)],$$

$$\text{und } \Delta : t = \frac{2g(Mn-Nm)}{b\,.\,(n-m)} - 2gh + \frac{2g(n\mu-m\nu)}{n-m}.$$

Weil aber die Endpunkte einerlei Geschwindigkeit haben, und in dem Zeitraum $dt$ durch $dm$ und $dn$ fortrücken, so ist $s = \Gamma : t = \frac{dm}{dt} = \frac{dn}{dt}$, und folglich erhält man für $\Gamma' : t$ auch $\Gamma' : t = \frac{d^2m}{dt^2}$, und wenn man beide Werthe gleich, und $(n-m) = l$ setzt, so ist

$$bl\frac{d^2m}{dt^2} = 2g\,(M-N) - 2gb\,(\nu-\mu)$$

eine Gleichung für die Gröfsen $m$ und $\frac{dm}{dt} = u$. Es sind aber in dieser Gleichung $M$, $N$ gegebene Functionen von $t$, $\nu$ und $\mu$ veränderliche Gröfsen, die von $m$ und $n$, oder von $m$ und $m + l$ abhängen, und, wenn hieraus $m$ für irgend einen Zeitpunkt bestimmt ist, so erhält man für eben den Werth von $t$ den Druck in irgend einem Punkte $z$

$$p = \frac{(Mn - Nm)}{l} + \frac{b(n\mu - m\nu)}{l} - bz - \frac{s[M - N - b(\nu - \mu)]}{l},$$

$$\text{oder } p = \frac{M(n-s) + N(s-m) + b\mu(n-s) + b\nu(s-m)}{l} - bz,$$

$$\text{oder } p = \frac{(M + b\mu)(n - s) + (N + b\nu)(s - m)}{l} - bz,$$

der Druck für jeden Punkt $z$ ist also bestimmt, wenn die Lage des Endpunkts $M$ und die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bekannt sind.

262. Drückten gar keine Kräfte auf die Wassermasse, so hätte man $M = 0$, $N = 0$, und zur Bestimmung von $m$ die Gleichung $\frac{d^2 m}{dt^2} = \frac{2g(\mu - \nu)}{l}$, für den Druck aber

$$p = \frac{b\mu(n - s) + b\nu(s - m)}{l} - bz.$$

Wenn beide Kräfte nicht verschwinden, aber gleich grofs sind, $M = N$, so bleibt die erste Gleichung dieselbe, der Druck aber wird um das Glied $+ M$ vergröfsert. Der erste Fall $M = N = 0$ kann nur im luftleeren Raume Statt finden, denn bei der Bewegung in freier Luft drückt wenigstens immer die Atmosphäre auf beide Enden der Wassermasse, und dieser Druck ist, wenn die Röhre nicht sehr hoch ist, an beiden Enden gleich grofs, etwa einer Wassersäule von 32 Fufs hoch gleich. Nennt man diese Höhe $= k$, und setzt die Dichtigkeit des Wassers $= 1$, so ist $M = N = k$, und wenn das bewegte Fluidum in der Röhre ebenfalls Wasser ist, also $b = 1$, so wird der Druck

$$p = k - z + \frac{\mu(n - s) + \nu(s - m)}{l}.$$

Diesen Druck der Atmosphäre in Betrachtung zu ziehen, darf man nie vergessen; denn, wenn man denselben übersieht, so kann $p$ negative Werthe zu erhalten scheinen, auch da, wo der Zusammenhang der flüssigen Masse nicht unterbrochen wird. Würde aber in irgend einem Falle, auch dann, wenn man auf den Druck der Atmosphäre Rücksicht nimmt, $p$ negativ, so würde an einer solchen Stelle die Continuität des Flüssigen aufhören, wenn nicht etwa die Cohäsion der Wassertheilchen die Masse zusammenzuhalten im Stande wäre.

263. Erstes Exempel. Die Röhre sey gerade und unter einem bekannten Winkel $= \eta$ gegen den Horizont geneigt, man sucht die Bewegung des Wassers für den Fall, wo beide Enden der Wassersäule blos den freien Druck der Atmosphäre leiden.

Da wir die Ordinaten $z$ (Fig. 41.) positiv nennen, wenn sie aufwärts gerichtet sind, so erhält man, wenn $M$, $z$, $N$ oberhalb des Anfangspunktes $A$ liegen, $\mu = m \,.\, \text{Sin}\, \eta$, $z = s \,.\, \text{Sin}\, \eta$, $\nu = n \,.\, \text{Sin}\, \eta$ als positive Größen. Die erste Gleichung des 261. §. wird jetzt $\frac{d^2 m}{dt^2} = -2g \,.\, \text{Sin}\, \eta$, weil $m - n = -l$ ist, also $\frac{dm}{dt} = 2g(f - t \,.\, \text{Sin}\, \eta)$, wenn für $t = 0$ die Geschwindigkeit $= 2gf$ war. Soll also die Bewegung aufwärts gerichtet, oder $\frac{dm}{dt}$ positiv seyn, so muſs $f > t\, \text{Sin}\, \eta$ und $f$ positiv seyn; dann aber wird, wenn im Anfange der Zeit $t$, $M$ sich in $A$ befand, oder $t$ und $m$ zugleich $= 0$ werden, $m = g\,(2ft - t^2 \,.\, \text{Sin}\, \eta)$. Zur Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte $z$ aber erhalten wir, weil $M = N = k$ und

$$\mu\,(n - s) = m\,(m + l - s)\,\text{Sin}\,\eta,$$
$$-\nu\,(m - s) = (m + l)\,(s - m)\,\text{Sin}\,\eta$$

ist, die Gleichung $p = k - z + s\,\text{Sin}\,\eta = k$, wenn $b = 1$ ist. Jeder Punkt leidet also blos den Druck der At-

mosphäre, und die Wassermasse bewegt sich, sie mag nun steigen oder sinken, völlig so, wie ein fester Körper.

264. Zweites Exempel. Die Röhre sey so gekrümmt, daſs sie zwei gerade Schenkel $AB$, $CD$ (Fig. 42.) hat, welche durch den mittlern gekrümmten Theil $BC$, dessen Form ebenfalls bekannt ist, verbunden sind; man sucht die Gleichungen für die Bewegung der in dieser Röhre enthaltnen Wassermasse, unter der Voraussetzung, daſs die Endpunkte derselben $M$ und $N$ immer in den geraden Schenkeln $AB$, $CD$ bleiben, und daſs die auf $Mm$, $Nn$ drückenden Kräfte $M$, $N$ während der Bewegung unveränderlich sind.

Am Ende der Zeit $t$ nehme das Wasser in der Röhre den Raum $MBCN$ ein, daſs also $MB + BC + CN = l$ ist; es sey $AB = f$, $BC = \lambda$, $AM = m$, und die Röhre $AB$ unter dem Winkel $\eta$, $CD$ unter dem Winkel $\zeta$ gegen den Horizont geneigt, so ist, wenn die Höhen von der Horizontallinie $BC$ an gerechnet werden, $\mu = (f - m)$ Sin $\eta$, $\nu = CN$. Sin $\zeta$, also auch

$$l = \lambda + \frac{\mu}{\text{Sin}\,\eta} + \frac{\nu}{\text{Sin}\,\zeta}, \text{ oder } \nu = (l - \lambda)\,\text{Sin}\,\zeta - \frac{\mu\,\text{Sin}\,\zeta}{\text{Sin}\,\eta},$$

$$\text{ferner } \frac{dm}{dt} = -\frac{d\mu}{dt\,.\,\text{Sin}\,\eta} \text{ und } \frac{d^2m}{dt^2} = -\frac{d^2\mu}{dt^2\,.\,\text{Sin}\,\eta}.$$

Die allgemeine Gleichung des 261. §., wo ich $b = 1$ setze,

$$\frac{d^2m}{dt^2} = \frac{2g}{l}(M - N + \mu - \nu),$$

wird also jetzt

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = \frac{2g\,\text{Sin}\,\eta}{l}(N - M) + \frac{2g}{l}[(l - \lambda)\,\text{Sin}\,\zeta\,.\,\text{Sin}\,\eta$$
$$- \mu(\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta)],$$

und daher, wenn ich $N - M + (l - \lambda)$ Sin $\zeta = \alpha$ setze, die Gleichung mit $2d\mu$ multiplicire und integrire,

$$\frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g\mu\,\text{Sin}\,\eta}{l}\left\{\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\mu(\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta)}{\text{Sin}\,\eta}\right\} + \text{Const.},$$

oder, wenn man die beständige Gröſse $= \frac{4gh^2 \operatorname{Sin}\eta}{l}$ setzt,

$$\frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g \cdot \operatorname{Sin}\eta}{l} \left\{ h^2 + \alpha\mu - \tfrac{1}{2} \frac{\mu^2 (\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta)}{\operatorname{Sin}\eta} \right\},$$

wo die Gröſse $h$ noch unbestimmt ist. Diese beständige Gröſse wird bestimmt, wenn man den Werth von $\mu$ für den Augenblick kennt, wo die Geschwindigkeit $= 0$ ist, oder wo $\frac{d\mu}{dt}$ verschwindet: befand sich nämlich in diesem Augenblicke $Mm$ in $Aa$, oder war $\mu = f \operatorname{Sin}\eta$, so ist $h^2 = \frac{1}{2} f^2 \operatorname{Sin}\eta (\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta) - \alpha f \operatorname{Sin}\eta$, also allgemein

$$\frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g\operatorname{Sin}\eta}{l} \left\{ \alpha(\mu - f\operatorname{Sin}\eta) - \tfrac{1}{2} \frac{(\mu^2 - f^2 \operatorname{Sin}\eta^2)(\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta)}{\operatorname{Sin}\eta} \right\},$$

oder

$$\frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g}{l} (f\operatorname{Sin}\eta - \mu) [\tfrac{1}{2}(\mu + f\operatorname{Sin}\eta)(\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta) - \alpha \operatorname{Sin}\eta].$$

Diese Gleichung zeigt, daſs $\frac{d\mu}{dt}$ zweimal verschwindet, oder daſs die Geschwindigkeit zweimal $= 0$ wird, einmal, unsrer Voraussetzung gemäſs, wenn $\mu = f \operatorname{Sin}\eta$ ist, dann aber auch, wenn $\mu = \frac{2\alpha \operatorname{Sin}\eta}{\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta} - f \operatorname{Sin}\eta$ ist. Die Geschwindigkeit wird am gröſsten, wenn $\frac{d^2\mu}{dt^2} = 0$, also, wenn ich $\alpha$ auch in der Differentialgleichung substituire, wenn $\mu = \frac{\alpha \operatorname{Sin}\eta}{\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta}$ ist, oder gerade dann, wenn die Oberfläche $Mm$ sich in der mittlern Höhe zwischen den beiden Punkten befindet, wo ihre Geschwindigkeit $= 0$ wird.

Um nun auch die Zeit $t$ zu bestimmen, in welcher $\mu$ einen gewissen Werth erlangt, kehre ich zu der allgemeinen Gleichung für $\frac{d\mu}{dt}$ zurück, welche gibt

$$2\,dt \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{d\mu}{\sqrt{(f\operatorname{Sin}\eta - \mu)} \cdot \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\mu + f\operatorname{Sin}\eta)(\operatorname{Sin}\eta + \operatorname{Sin}\zeta) - \alpha\operatorname{Sin}\eta]}}.$$

Um sie zu integriren, setze ich $\frac{1}{2}(\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta) = \gamma$ und

$$\frac{f\,\text{Sin}\,\eta - \mu}{f\gamma\,\text{Sin}\,\eta - \alpha\,\text{Sin}\,\eta + \gamma\mu} = z^2, \text{ dies gibt}$$

$$\mu = \left[\frac{f + (\alpha - f\gamma)z^2}{1 + \gamma z^2}\right] \text{Sin}\,\eta \text{ und } d\mu = \frac{2\,z dz\,(\alpha - 2\,f\gamma)\,\text{Sin}\,\eta}{(1 + \gamma z^2)^2};$$

$$\text{folglich } 2\,dt\,\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{-2\,dz}{1 + \gamma z^2}$$

$$\text{und } t\,\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{Const} + \frac{\text{Ang. Cotang.}\,z\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}},$$

$$\text{oder } z\sqrt{\gamma} = \text{Cotang.}\left[\sqrt{\gamma}\,.\,\text{Const} + t\,\sqrt{\frac{g\gamma}{l}}\right].$$

War nun $t = 0$, als $\mu = f\,\text{Sin}\,\eta$ war, so verschwinden $z$ und $t$ zugleich, also ist Const $= \frac{1}{2}\pi\,.\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, und allgemein

$$z\sqrt{\gamma} = \text{Cotang}\left[\tfrac{1}{2}\pi + t\sqrt{\frac{g\gamma}{l}}\right], \text{ oder}$$

$$\mu = f\,\text{Sin}\,\eta - \left[2f\text{Sin}\,\eta - \frac{\alpha}{\gamma}\,\text{Sin}\,\eta\right]\left\{\text{Cosin}\left[\tfrac{1}{2}\pi + t\sqrt{\frac{g\gamma}{l}}\right]\right\}^2.$$

Wenn also $t = 0$ ist, so wird $\mu = f\,\text{Sin}\,\eta$; wenn $t = \frac{1}{2}\pi\,.\sqrt{\frac{l}{g\gamma}}$ ist, so wird $\mu = \frac{\alpha\,\text{Sin}\,\eta}{\gamma} - f\,\text{Sin}\,\eta$, und dieses ist der Zeitpunkt, wo die Geschwindigkeit wieder $= 0$ wird; aber nach der doppelten Zeit $t = \pi.\sqrt{\frac{l}{g\gamma}}$ wird wieder $\mu = f\,\text{Sin}\,\eta$, oder die flüssige Masse nimmt dann wieder denselben Raum ein, welchen sie einnahm, als $t = 0$ war. Das Wasser oscillirt also in der Röhre, und die Zeit einer Oscillation, während welcher nämlich die Oberfläche *Mm* von ihrem höchsten Stande bis zum niedrigsten gelangt, ist $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g\gamma}}$, und eben so lange Zeit gebraucht sie, um vom niedrigsten Staude wieder bis zum höchsten zu kommen. Diese Oscillationszeiten stimmen also mit denen eines einfachen Pendels überein, dessen Länge

$$= \frac{l}{2\gamma} = \frac{l}{\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta}$$

ist, und sind gleich, die Schwankungen des Wassers mögen gröſser oder kleiner seyn.

Wenn so für einen gewissen Zeitpunkt der Werth von $\mu$ bekannt ist, so findet man auch den Druck für irgend einen Querschnitt $ZV$

$$p = -z + \frac{(M+\mu)(n-s) + (N+\nu)(s-m)}{l},$$

wenn für denselben $Az = s$ und die Höhe $= z$ ist.

265. Drückt auf $Mm$, $Nn$ blos die Atmosphäre, so ist $M = N = k$, folglich wird in den Ausdrücken des vorigen §. $\alpha = (l - \lambda)\,\text{Sin}\,\zeta$, oder $\alpha = (BM + CN)\,\text{Sin}\,\zeta$, und die verticale Geschwindigkeit der Bewegung, wenn sich die Oberflächen in $Mm$, $Nn$ befinden, ist

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right) = 2 . \frac{\sqrt{g\text{Sin}\,\eta^2 . AM . [(BM + \frac{1}{2}AM)\text{Sin}\,\eta - (CN - \frac{1}{2}AM)\text{Sin}\,\zeta]}}{\sqrt{l}},$$

und diese verschwindet einmal, wenn $\mu = f\,\text{Sin}\,\eta$, oder $AM = 0$, also, wenn $\nu = (l - \lambda - f)\,\text{Sin}\,\zeta$ ist, und zum zweitenmale, wenn $\mu = \frac{2(l-\lambda)\,\text{Sin}\,\eta\,\text{Sin}\,\zeta}{\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta} - f\,\text{Sin}\,\eta$,

$$\text{und } \nu = \frac{(l-\lambda)(\text{Sin}\,\eta - \text{Sin}\,\zeta)\,\text{Sin}\,\zeta}{\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta} + f\,\text{Sin}\,\zeta,$$

und der Unterschied dieser Höhen $\mu - \nu$ ist in beiden Fällen gleich, also steigt die Fläche $Mm$ eben so hoch über $Nn$, als sie in ihrem tiefsten Stande darunter herabsinkt. Die gröſste Geschwindigkeit aber findet Statt, wenn beide Oberflächen sich in derselben horizontalen Ebene befinden. Die Oscillationszeit hängt von den auf $M$, $N$ drückenden Kräften gar nicht ab, sondern blos von der Länge der Wassermasse und der Neigung der Schenkel, sie ist also auch hier

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{g(\text{Sin}\,\eta + \text{Sin}\,\zeta)}}.$$

266. Sind beide Schenkel vertical, so ist

$$\text{Sin}\,\eta = \text{Sin}\,\zeta = 1 \text{ (Fig. 42 } b.),$$

und die Geschwindigkeit, wenn $M = N = k$ ist,

$$= 2\sqrt{\frac{g \,.\, AM\,(BM + AM - CN)}{l}},$$

wenn sie verschwinden soll, indem $Mm$ nach $Aa$ kommt; sie verschwindet also zum zweitenmal, wenn $CN = AB$ ist, oder wenn die Oberfläche $Nn$ eben die Höhe erreicht hat, welche vorhin $Mm$ hatte. Die Geschwindigkeit wird am gröfsten, wenn $\mu = \frac{1}{2}(l - \lambda) = \nu$ ist, oder wenn beide Oberflächen sich in derselben horizontalen Ebene befinden. Bezeichnet $EF$ die Horizontallinie, in welcher beide Oberflächen sich alsdann befinden, so ist $l = \lambda + 2\,.\,EB$, und in jedem Augenblicke, oder für jede andre Lage der Oberflächen ist $EM = FN$. Die Zeit einer Oscillation ist nun $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, oder den Oscillationszeiten eines einfachen Pendels gleich, dessen Länge $= \frac{1}{2}l$ ist.

Die Gleichung, welche wir vorhin für den Druck fanden, wird jetzt für einen Punkt $z$, der in den verticalen Schenkeln liegt,

$$p = k - Bz + \frac{BM\,(Bz + BC + CN)}{l} + \frac{CN\,.\,Mz}{l},$$

$$\text{oder } p = k + Mz - \frac{2\,.\,EM\,.\,Mz}{l}.$$

Für den Zeitpunkt also, da beide Oberflächen gleich hoch stehen, und $EM = 0$ ist, wird der Druck in $z$, $p = k + Ez$, für jeden andern Zeitpunkt aber

$$p = k + Ez + \frac{EM\,(l - 2\,Mz)}{l}.$$

Für einen Punkt $z'$, der in dem untern Theile $BC$ der Röhre liegt, wird, wenn $AB + Bz' = s$, und seine Höhe über $B = z$ ist

$$p = k - z + EB + \frac{EM\,(BC - 2\,Bz' - 2\,EM)}{l},$$

und, wenn $Bz' = \frac{1}{2} BC$,

$$p = k - z + EB - \frac{2EM.EM}{l},$$

wo man $+ z$ statt $- z$ setzen muſs, wenn $z'$ niedriger als $B$ liegt.

267. Der untere Theil der Röhre $BC$ (Fig. 43.) könnte aufwärts gekrümmt seyn, wie $BOC$, so würde, wenn $EF$ die Horizontallinie ist, in welcher die beiden Oberflächen sich befinden, wenn sie gleich hoch stehen, der Druck in irgend einem Punkte des Theils $BOC$ aus der letzten Gleichung des vorigen §. bestimmt. Es sey $OB = OC$, also $EB + OB = \frac{1}{2} l$, so wird, wenn $AB$ und $BC$ vertical sind, der Druck im höchsten Punkte $O$

$$= k - OP - \frac{ME.ME}{EB + MO}.$$

Soll also hier der Druck nicht negativ werden, so muſs

$$OP < k - \frac{ME.ME}{EB + MO} \text{ seyn.}$$

Die Oscillationen würden übrigens in dieser Röhre eben so ausfallen, wie in einer andern, deren Schenkel vertical, und in welchen eine eben so lange Wassermasse sich bewegte; doch dürften die Krümmungen bei $B$, $O$, $C$ keine scharfen Winkel seyn, sondern eine nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmte Linie bilden, weil nur bei dieser Voraussetzung die Bewegung so geschieht, wie in einer geraden Linie. — Denn die Schlüsse des 247. und 250. §. setzen eine stetig gekrümmte Linie voraus, weil die Differentialformeln nur da gelten.

268. Wäre über der Oberfläche $Nn$ (Fig. 42.) ein luftleerer Raum, und die Röhre $CD$ oben geschlossen, so wäre (im 264. §.) $N = 0$ und $M = k$, wenn auf $Mm$ die Atmosphäre drückt; man hätte also $\alpha = (l - \lambda) \text{Sin}\, \zeta - k$, und die Geschwindigkeit würde ihren gröſsten Werth erreichen,

wenn $\mu = \dfrac{(l - \lambda) \text{Sin}\, \eta \,.\, \text{Sin}\, \zeta - k\, \text{Sin}\, \eta}{\text{Sin}\, \eta + \text{Sin}\, \zeta}$,

also $\nu = \frac{(l - \lambda) \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \zeta + k \operatorname{Sin} \zeta}{\operatorname{Sin} \eta + \operatorname{Sin} \zeta}$ und $\nu - \mu = k$ ist; die flüssige Masse oscillirt also so, daſs die senkrechte Höhe der Oberfläche $Nn$ über $Mm$ im Mittel der Oscillationen der Höhe $k$ gleich ist. Die Zeit der Oscillationen wird $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{2l}{g(\operatorname{Sin} \eta + \operatorname{Sin} \zeta)}}$, also wenn die Schenkel beide vertical sind, $= \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (Fig. 42 *b*.), oder der Oscillationszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= \frac{1}{2} l$, gleich. Hat aber die Röhre die Gestalt $ABC$ (Fig. 44.), wo auch der Winkel $B$ nicht scharf, sondern die Röhre stetig gekrümmt seyn muſs, so ist $\eta = 0$ und $\zeta = 90°$, also die Oscillationszeit $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$ so groſs, als die Oscillationszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= l$. Diese Gleichungen gelten auch für die Oscillationen des Quecksilbers im Barometer, wenn man die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 1$ setzt, und für $k$ die Höhe derjenigen Quecksilbersäule nimmt, welche dem Drucke der Atmosphäre das Gleichgewicht hält.

268 *b*). Drittes Exempel. Die Röhre $ABCD$ (Fig. 44 *b*.) hat zwei verticale Schenkel, welche durch den gekrümmten Theil $BC$ mit einander verbunden sind; das Wasser bewegt sich darin so, daſs die Oberflächen immer in den verticalen Schenkeln bleiben, aber der Druck auf $Mm$ ist veränderlich; man sucht die Gesetze der Bewegung.

Ueber $Nn$ sey ein luftleerer Raum, also $N = 0$, der Druck auf $Mm$ aber sey in jedem Augenblicke der Bewegung $M = k + AM = k + m$, so daſs er also immer mehr zunimmt, je tiefer die Oberfläche $Mm$ sinkt: ich nehme an, daſs im Anfange der Bewegung beide Oberflächen gleich hoch standen, und daſs $Mm$ sich in $Aa$ befand. Da hier alle Bezeichnungen des 264. §. gelten, wenn man dort

$\eta = \zeta = 90°$, $N = 0$ und $M = k + m$, oder $M = k + f - \mu$ setzt, so ist

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = \frac{2g}{l}\,[l - \lambda - 2\mu - (k + f - \mu)]$$

$$= \frac{2g}{l}\,(l - \lambda - k - f - \mu),$$

$$\text{und } \frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g\mu}{l}\,(l - \lambda - k - f - \tfrac{1}{2}\mu) + \text{Const.},$$

oder, weil $\frac{d\mu}{dt} = 0$ seyn soll, für $\mu = f$

$$\frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}\,(f - \mu)(k + l + \lambda) + \frac{2g}{l}\,(3f^2 - 2f\mu - \mu^2),$$

$$\text{oder } \frac{d\mu^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}\,(f - \mu)\,(k + \lambda - l + \tfrac{3}{2}f + \tfrac{1}{2}\mu).$$

Dieser Werth wird zweimal $= 0$, nämlich sowohl, wenn $\mu = f$, als wenn $\mu = 2(l - \lambda - k) - 3f$ ist. Da wir nun annahmen, daſs im Anfange der Bewegung $\nu = \mu = f$ war, so ist $l = \lambda + 2f$, also, wenn die Geschwindigkeit zum zweitenmal $= 0$ wird, $\mu = f - 2k$ und $\nu = f + 2k$. Das Wasser erreicht also bei dieser Voraussetzung in der Röhre *CD* die Höhe $= 2k$ über seinem anfänglichen Stande.

Dieses findet aber nur dann Statt, wenn die Oberflächen beim Anfange der Bewegung gleich hoch waren. Wäre dieses nicht der Fall, sondern Anfangs $\mu = f$, $\nu = f + h$, also $l = \lambda + 2f + h$, so würde, wenn die Geschwindigkeit wieder $= 0$ ist, $\mu = f + 2h - 2k$ und $\nu = f + 2k - h$ seyn. Das Wasser steigt also desto weniger, je höher es beim Anfange der Bewegung schon stand: es macht nämlich Oscillationen, bei denen es in *CD* eben so hoch über die Höhe $= f + k$ steigt, als es beim Anfange der Bewegung sich unterhalb dieser Höhe befand. Wäre schon für den Anfang der Bewegung $\nu = f + k$ und $l = \lambda + 2f + k$, so könnte gar keine Bewegung entstehen, wie schon von selbst erhellt.

Aus der Gleichung für $\frac{d\mu}{dt}$ läfst sich auch die Zeit bestimmen, in welcher $\mu$ einen gewissen Werth erlangt. Ich nehme an, dafs anfangs $\mu = f$ und $\nu = f + h$, also $l - \lambda = 2f + h$ war, dann wird

$$dt \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{d\mu}{\sqrt{(f-\mu)} \cdot \sqrt{(2k - f - 2h + \mu)}},$$

und daher, wenn ich

$$z = \sqrt{\frac{2k - f - 2h + \mu}{f - \mu}} \text{ setze,}$$

$$dt \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{2dz}{1 + z^2},$$

$$\text{also } t \cdot \sqrt{\frac{g}{2l}} = \text{Const.} + \text{Ang. tang. } z,$$

$$\text{oder } t \cdot \sqrt{\frac{g}{2l}} + \text{Ang. tang.} \left(\sqrt{\frac{2k - f - 2h + \mu}{f - \mu}}\right) - \tfrac{1}{2}\pi,$$

weil $t$ verschwindet für $\mu = f$ oder für $z = \infty$. Es ist also

$$\sqrt{\left(\frac{2k - f - 2h + \mu}{f - \mu}\right)} = \text{tang.} \left(\tfrac{1}{2}\pi + t\sqrt{\frac{g}{2l}}\right),$$

und für das Ende der ersten Oscillation

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}},$$

weil da $2k - f - 2h + \mu = 0$ ist und $0 = \text{tang. } \pi$.

Die Zeit der Oscillationen ist also einerlei, diese mögen grofs oder klein seyn.

268 c). Die Voraussetzung, dafs auf $Mm$ der Druck immer $= k + AM$ seyn soll, würde erfüllt werden, wenn, indem $Mm$ sinkt, neues Wasser bei $Aa$ zuflöfse, und die Röhre immer bis an $Aa$ mit Wasser gefüllt bliebe. Etwas ähnliches findet bei dem Aufsteigen des Wassers in den Saugröhren einer Pumpe wirklich Statt, und man findet daher für diese Bewegung des Wassers Resultate, die den hier bewiesenen ähnlich sind.

268 d). Viertes Exempel. Die Röhre $BMND$ (Fig. 44 c.), worin das Wasser sich bewegt, habe die Ge-

stalt einer Cycloide, und auf beide Enden der Wassermasse drücke die Atmosphäre: man sucht die Gleichungen für die Bewegung.

Man ziehe die horizontale Abscissenlinie $OC$ durch den niedrigsten Punkt $C$ der Cycloide, und setze den Anfangspunkt der Abscissen in $O$, so daſs für den höchsten Punkt der Cycloide $x = 0$ ist. Der Halbmesser des rotirenden Kreises, dessen Mittelpunkt sich horizontal fortbewegt, sey $= a$, so ist die Gleichung für die Cycloide, wenn irgend eines Punktes $M$ Abscisse $OX = x$ und Ordinate $XM = z$ heiſst,

$$x = a \,.\, \text{Arc. Sin.} \frac{\sqrt{(2az - z^2)}}{a} - \sqrt{(2az - z^2)},$$

$$\text{folglich } dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{(2az - z^2)}}.$$

Setzt man nun den Bogen $BM = s$, so ist

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dz \sqrt{\frac{2a}{2a - z}},$$

$$\text{folglich } s = \pm 2\sqrt{(4a^2 - 2az)}.$$

Für $z = 0$ ist also $s = 4a$, und weil die Länge der ganzen Cycloide bis $x = OF = 2a\pi$ wird, ist $s = 8a$; man hat daher, wenn $s > BC$ ist, $s = 8a - 2\sqrt{(4a^2 - 2az)}$.

In dieser Röhre, welche überall gleich weit ist, bewege sich nun eine Wassermasse, deren Länge $MCN = l$ ist, und diese nehme am Ende der Zeit $= t$ den Raum $MCN$ ein, und es sey $BM = m$, $BMN = m + l$, $XM = \mu$, $YN = \nu$, so wird, wenn man annimmt, daſs $M$ diesseits und $N$ jenseits $C$ liege,

$$m = 4\sqrt{\left[a^2 - \frac{a\mu}{2}\right]} \text{ und } m + l = 4\left\{2a - \sqrt{\left[a^2 - \frac{a\nu}{2}\right]}\right\},$$

folglich

$$\mu - \nu = \frac{1}{8a}[(m + l - 8a)^2 - m^2] = \frac{m}{4a}(l - 8a) + \frac{(l - 8a)^2}{8a}.$$

Nach diesen Vorerinnerungen können wir nun die Gleichungen des 261. §. sogleich anwenden, und erhalten, weil $M = N = k$ ist,

$$\frac{d^2m}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\mu - \nu) = \frac{gm}{2la}(l - 8a) + \frac{g}{4al}(l - 8a)^2,$$

und hieraus erhält man, wenn man mit $2dm$ multiplicirt und integrirt,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 = \text{Const} + \frac{gm^2}{2la}(l - 8a) + \frac{gm}{2al}(l - 8a)^2,$$

$$\text{oder} = \text{Const} + \frac{gm(l - 8a)(m + l - 8a)}{2al}.$$

Wenn also die Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit anfing, als $m = f$ war, so wird

$$\text{Const} = -\frac{gf}{2al}(l - 8a)(f + l - 8a)$$

$$\text{und } \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 = \frac{g(l - 8a)}{2al}\cdot(m - f)(m + f + l - 8a).$$

Diese Gleichung zeigt zugleich, daſs die Geschwindigkeit $\frac{dm}{dt}$ abermals $= 0$ wird, wenn $m + l = 8a - f$ ist, oder wenn die Oberfläche $N$ so nahe an $D$ gerückt ist, als $M$ anfangs von $B$ entfernt war.

Die Gleichung

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 = \frac{g}{2al}(8a - l)(m - f)(8a - m - l - f)$$

führt auch zur Bestimmung der Zeit einer Oscillation, denn da

$$dt.\sqrt{\frac{g(8a - l)}{2al}} = \frac{dm}{\sqrt{(m - f)}.\sqrt{(8a - l - f - m)}}$$

ist, so wird

$$t.\sqrt{\frac{g(8a - l)}{2al}} = \text{Const} - 2\,\text{Arc. tang.}\sqrt{\left(\frac{8a - l - f - m}{m - f}\right)},$$

und, weil $t$ verschwinden soll, wenn $m = f$ ist,

$$\text{Const} = 2\,.\,\text{Arc. tang} \sim = \pi,$$

wenn $\pi$ den Umfang eines Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, daher

$$t\sqrt{\frac{g(8a-l)}{2al}} = \pi - 2 \text{ Arc. tang} \sqrt{\frac{8a-l-f-m}{m-f}},$$

und für die ganze Oscillation, da am Ende derselben $m = 8a - l - f$ ist, wird

$$t = \pi\sqrt{\frac{2al}{g(8a-l)}}.$$

Die Oscillationen sind also isochronisch denen eines Pendels, dessen Länge $= \frac{4al}{8a-l}$ ist. Die Oscillationszeit ist also allemal länger, als bei Röhren mit verticalen Schenkeln, wo sie $= \pi \sqrt{\frac{l}{4g}}$ war.

Ist die Röhre $BCD$ genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt, so ist $l = 4a$ und die Zeit einer Oscillation $= \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, gerade so grofs, als wir im §. 214 *d.* (nach Gerstners Theorie der Wellenbewegung) die Zeit fanden, welche bei der freien Wellenbewegung ein Wassertheilchen braucht, um von einem Wellengipfel zum andern zu gelangen.

Die Oscillationen geschehen auch hier langsamer, wenn $l$ gröfser ist; aber die Oscillationszeit wächst in einem andern Verhältnisse, als bei den Röhren mit verticalen Schenkeln. Dort würde die Wassermasse, deren Länge nur ein Viertheil der vorigen wäre, in der halben Zeit eine Oscillation vollenden; setzt man aber hier $l = a$, so wird die Zeit einer Oscillation $= \pi . \sqrt{\frac{2a}{7g}}$; die Oscillationszeit für $l = 4a$ verhält sich also zur Oscillationszeit für $l = a$, wie $\sqrt{7} : 1$.

Uebrigens kommt auf die Gröfse der Oscillation hiebei nichts an; jedoch haben wir beim Anfange der Rechnung vorausgesetzt, dafs $m$ nicht gröfser als $4a$ werde, und $m + l$

nie kleiner als $4a$, oder dafs die Oberflächen $M$, $N$ nicht über $C$ hinaus hin und herschwanken.

268 c). Bei allen diesen Bewegungen sollten den Formeln zu Folge diese Oscillationen unaufhörlich fortdauern, aber die Erfahrung lehrt, dafs sie sehr bald abnehmen und ganz aufhören. Auch die Zeit der Oscillationen ist, besonders bei engen Röhren, merklich von der verschieden, welche die Theorie angibt: man bemerkt, dafs die Zeit der Oscillationen länger ist, und sich nur dann der hier angegebnen nähert, wenn die Oscillationen sehr klein sind. Dieses rührt von dem Widerstande an den Röhrenwänden her, den ich noch genauer betrachten werde.

269. Problem 56. Wenn das Wasser in einer überall gleichweiten Röhre sich so bewegt, dafs es an einem Ende ausfliefst, am andern Ende aber, wo kein neuer Zuflufs Statt findet, von irgend einer Kraft gedrückt wird, die Umstände der Bewegung und den Druck, den jedes Theilchen leidet, zu bestimmen.

Auflösung. Welche Form auch die Röhre haben mag, so kann man sie sich immer als gerade ausgedehnt, wie $AaoO$ (Fig. 45.), vorstellen, wenn man die Scale der Höhen $\alpha\omega$ damit verbindet, deren Ordinaten $z\pi$ die Höhe irgend eines Punktes $z$ über einer gewissen horizontalen Ebene angeben.

Am Ende der Zeit $t$ fliefse das Wasser durch die Oeffnung $Oo$ mit der Geschwindigkeit $= v$, mit welcher also auch jedes Theilchen der Wassermasse in der Röhre fortrückt. Das noch übrige Wasser nehme in diesem Augenblick den Raum $MO$ ein, und auf die Oberfläche $M$ drücke eine Kraft, die durch die Höhe $= M$ einer Wassersäule bestimmt wird. In $O$, wo das Wasser ausfliefst, kann kein andrer Druck, als der der Atmosphäre Statt finden, welchen wir einer Wassersäule von der Höhe $= k$ gleich gesetzt haben. Wir wollen annehmen, dafs sich im Anfange der Zeit $t$ das Wasser bis $A$ erstreckt habe, und dafs die

ganze Länge der Röhre $AO = a$ sey, am Ende der Zeit $t$ aber sey $AM = m$, eine Function von $t$, woraus $\varkappa = \frac{dm}{dt}$ bestimmt wird. Ist nun ferner für irgend ein Wassertheilchen $z$ die Höhe über der horizontalen Ebene $= z = z\pi$, die Dichtigkeit des Wassers $= 1$, der Druck in diesem Punkte $= p$, und die Länge $Az = s$, so wird (§. 257.)

$$2gp = 2g(h-z) - s.\Gamma':t + \Delta:t,$$

$$\text{wo } \Gamma:t = \varkappa = \frac{dm}{dt}, \quad \text{also } \Gamma':t = \frac{d^2m}{dt^2} \text{ ist,}$$

denn $m$ und $\varkappa$ hängen blos von $t$ ab.

Für den Punkt $M$, wo sich in diesem Augenblick das Ende der Wassermasse befindet, ist $s = m$, $p = M$, $z = M\mu$, also $2gM = 2g(h - M\mu) - m.\Gamma':t + \Delta:t$, hingegen ist in der Oefnung $O$, $s = a$, $p = k$, $z = O\omega$, also $2gk = 2g(h - O\omega) - a\Gamma':t + \Delta:t$,

$$\text{daher } \Gamma':t = \frac{d^2m}{dt^2} = \frac{2g(M - k + M\mu - O\omega)}{a-m},$$

für jeden Punkt $z$ aber

$$2g(M-p) = 2g(z - M\mu) + (s-m)\,\Gamma':t,$$

$$\text{oder } p = -z + \frac{(M + M\mu)(a-s) + (k + O\omega)(s-m)}{a-m},$$

$$p = -z + \frac{Oz(M+M\mu) + Mz(k + O\omega)}{MO},$$

und dieser Werth hängt von der für $m$ gefundenen Gleichung ab.

270. Wenn der Druck in $M$ unveränderlich, oder auch eine Function von $m$ ist, so wird die Differentialgleichung integrabel, wenn man sie mit $2dm$ multiplicirt, weil $O\omega$ beständig und $M\mu$ eine Function von $m$ ist. Man erhielte dann für die Geschwindigkeit $\frac{dm}{dt}$ die Gleichung

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{(M - k + M\mu - O\omega)\,dm}{a-m}.$$

271. Exempel 1. Die Röhre sey gerade und gegen den Horizont unter dem Winkel $AOE = \epsilon$ (Fig. 46.) geneigt, die Röhre war anfangs bis $A$ gefüllt, man sucht die Umstände der Bewegung, wenn das Wasser bei $O$ ausläuft, und auf $M$ blos die Atmosphäre drückt.

Man hat hier $MO = a - m$, $M\mu = (a - m)$ Sin $\epsilon$, $O\omega = o$, $M = k$, also

$$\frac{d^2m}{dt^2} = 2g \,.\, \text{Sin}\, \epsilon \text{ und } \frac{dm}{dt} = 2\sqrt{gm\, \text{Sin}\, \epsilon},$$

weil wir annehmen, daſs die Bewegung von der Ruhe anfing, als $m = o$ war. Diese Gleichung gibt

$$\frac{dm}{2\sqrt{m}} = dt \,.\, \sqrt{g} \,.\, \text{Sin}\, \epsilon,$$

$$\text{also } \sqrt{m} = t \,.\, \sqrt{g\, \text{Sin}\, \epsilon},$$

folglich wird alles Wasser ausgeflossen seyn, wenn $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g\, \text{Sin}\, \epsilon}}$ ist, und diese Zeit stimmt mit derjenigen überein, in welcher ein schwerer Körper auf der geneigten Ebene $AO$ herabsinken würde. Der Druck ist überall $= k$, dem Drucke der Atmosphäre gleich.

272. Exempel 2. Alle Umstände bleiben, wie im vorigen §., nur liegt die Oefnung $O$ im luftleeren Raume, man sucht die Umstände der Bewegung zu bestimmen.

In der allgemeinen Gleichung muſs nun $M = k$, dagegen aber $k = o$ gesetzt werden, folglich wird

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{k\,dm}{a - m} + 4g\int dm\, \text{Sin}\, \epsilon,$$

$$= 4gk \log. \frac{a}{a - m} + 4gm\, \text{Sin}\, \epsilon,$$

wenn für $m = o$ die Geschwindigkeit $= o$ war.

Diese Gleichung gibt eine unendliche Geschwindigkeit, wenn $m = a$ ist, und dieses ist nicht ungereimt, weil im letzten Augenblicke eine unendlich kleine Masse von einer

endlich bewegenden Kraft $= k$ fortgetrieben wird. Die Zeit $t$, welche verfliefst, während die Oberfläche von $A$ nach $M$ rückt, läfst sich nur durch Näherung finden, weil die Gleichung

$$2t\sqrt{g} = \int \frac{dm}{\sqrt{\left(k \log \frac{a}{a-m} + m \operatorname{Sin} \varepsilon\right)}},$$

sich durch kein andres Mittel auflösen läfst.

Der Druck in irgend einem Punkte $z$ wird, wenn $Az = s$,

$$p = \frac{k \,.\, Oz}{MO} + \frac{M\mu \,.\, Oz}{MO} - z\pi,$$

$$\text{oder } p = \frac{k \,.\, (a-s)}{a-m}.$$

Ist die Röhre horizontal, so erhält man aus der Gleichung für $t$ folgende, wenn man

$$\log. \frac{a}{a-m} = \frac{x}{a}, \text{ also } \frac{a}{a-m} = e^{\frac{x}{a}},\; m = a\left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ setzt,}$$

$$2t\sqrt{\frac{gk}{a}} = \int \frac{e^{-\frac{x}{a}} . dx}{\sqrt{x}} = 2 \,.\, e^{-\frac{x}{a}} . \sqrt{x} . \left(1 + \tfrac{2}{3} \frac{x}{a} + \frac{2 \,.\, 2}{3 \cdot 5} . \frac{x^2}{a^2} + \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} . \frac{x^3}{a^3} + \right).$$

Eine Gleichung, die doch nur für kleine Werthe von $x$ zu gebrauchen ist.

273. Exempel 3. Die Röhre $ABO$ (Fig. 47.) bestehe aus zwei geraden Stücken, deren eines $AB$ horizontal ist, das andre $BO$ vertical niederwärts geht: diese Röhre war anfangs ganz angefüllt, als das Wasser anfing, bei $O$ auszufliefsen; man sucht die Bestimmung aller Umstände der Bewegung.

Die Länge des horizontalen Arms sey $AB = f$, des verticalen $BO = c$, daher $a = f + c$. Wenn nun während der Zeit $t$ die Oberfläche $A$ bis $M$ fortgerückt, und $AM = m$,

der Druck in $M$ und $O$ aber $= k$ ist, so wird das Quadrat der Geschwindigkeit

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4gc\int\frac{dm}{a-m} = 4gc \log. \frac{a}{a-m}$$

$$\text{und } 2dt.\sqrt{gc} = \frac{dm}{\sqrt{\log \frac{a}{a-m}}},$$

wo bei der Integration eben die Schwierigkeit Statt findet, wie im vorigen §. Der Druck $p$ aber wird in jedem Punkte der horizontalen Röhre

$$p = k - c + \frac{(c + Bz)c}{a-m} = k - \frac{c.Mz}{a-m} = k - \frac{BO.Mz}{BM + BO},$$

der Druck ist also in jedem Punkte der horizontalen Röhre gröſser, als in $B$. Für einen Punkt $z'$ in der verticalen Röhre aber findet man den Druck

$$p' = k - Oz' + \frac{Oz'.BO}{BM + BO} = k - \frac{Oz'.BM}{BM + BO}.$$

Beim Anfange der Bewegung in $A$ entspricht die Beschleunigung der Bewegung der beschleunigenden Kraft $= \frac{c}{a}$, wenn man die Schwere $= 1$ setzt.

Aus den Gleichungen für den Druck erhellet, daſs im Anfange der Bewegung der Druck in $B$ am kleinsten war, und sogar negativ werden kann, wenn die Länge jedes Arms der Röhre gröſser als $k$ ist. In diesem Falle würde der Zusammenhang in $B$ unterbrochen werden, weil das Wasser in der verticalen Röhre schneller abflieſst, als es in der horizontalen folgen kann. — (Auch hier gilt übrigens die oft erwähnte Erinnerung, daſs die plötzliche Beugung den Gründen der Rechnung nicht ganz gemäſs ist).

274. Exempel 4. Die Röhre sey gerade und vertical, oben bei $A$ (Fig. 48.) hermetisch verschlossen, unten aber offen, ihre Höhe sey gröſser, als die Säule des Flüssigen, welche dem Drucke der Atmosphäre das Gleichge-

wicht hält, man sucht die Gleichungen für die Bewegung, wenn die Röhre anfangs ganz gefüllt war.

Während der Zeit $t$ sey die Oberfläche bis $M$ herabgesunken, und es sey $AM = m$, $AO = a$; da über $M$ ein luftleerer Raum entsteht, so ist $M = o$, daher

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{a - m - k}{a - m} \, . \, dm - 4g \left[ m - k \, . \log. \frac{a}{a - m} \right],$$

Für $m = o$ war die Geschwindigkeit $\frac{dm}{dt} = o$, und sie wird am gröſsten, wenn $m = a - k$ oder $OM = k$ ist, alsdann ist sie $\frac{dm}{dt} = 2 \, . \sqrt{g \left[ a - k - k \log \frac{a}{k} \right]}$. Wenn $m$ gröſser wird, so nimmt die Geschwindigkeit wieder ab, und verschwindet, wenn $m = k \, . \log \frac{a}{a - m}$ ist.

Uebertrifft die Höhe $a$, $k$ nur sehr wenig, und setzt man dann $a = k + \omega$, so wird die gröſste Geschwindigkeit

$$= 2 \, . \sqrt{g \left\{ \omega - k \log \left[ 1 + \frac{\omega}{k} \right] \right\}} = \frac{2 \omega \sqrt{g}}{\sqrt{2k}},$$

wenn $AM = \omega$ ist, und die Geschwindigkeit wird wieder $= o$, wenn $m = k \left[ \frac{m}{a} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{a^2} \right] = 2\omega$, oder genauer

$$= \left[ 2\omega - \tfrac{2}{3} \, . \frac{\omega^2}{k} + \tfrac{4}{9} \, . \frac{\omega^3}{k^2} - \text{etc.} \right].$$

Endlich findet man den Druck für irgend einen Punkt $z$

$$p = -Oz + \frac{Oz \, . \, MO + k \, . \, Mz}{MO} = \frac{k \, . \, Mz}{MO}.$$

275. Problem 57. Wenn das Wasser in einer allenthalben gleich weiten Röhre sich so bewegt, daſs es an ihrem einen Ende $Oo$ (Fig. 49.) ausflieſst, am andern Ende $Aa$ aber beständig neues Wasser, durch irgend eine Kraft getrieben, zuflieſst, diese Bewegung des Wassers, das durch die Röhre fortgetrieben wird, zu bestimmen.

Auflösung. Ich betrachte hier irgend eine gekrümmte Röhre $AO$, in deren eines Ende $Aa$ fortdauernd neues Wasser mit einer Kraft hereingedrückt wird, deren Gröſse durch die Höhe $L$ einer Wassersäule bestimmt ist. Diese Kraft kann entweder unveränderlich oder eine Function der Zeit $t$ seyn. Diese Art von Bewegung findet bei den Druckwerken Statt, wo das Wasser von einem niedrigern Punkte $A$ aufwärts getrieben wird: ich nehme daher an, daſs $A$ niedriger liege, als $O$, und daſs durch $A$ die Horizontallinie $A\omega$ gezogen sey, von welcher an die Höhen $z$ gerechnet werden. Für einen unbestimmten Punkt $z$ der Röhre sey die Länge $Az = s$, die Höhe $\pi z = z$, und die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser am Ende der Zeit $t$ fortbewegt, sey $= x$: mit eben dieser Geschwindigkeit flieſst es auch bei $Oo$ aus, und wir können die Bezeichnung $x = \Gamma : t$ auch hier beibehalten. Die Gleichung für den Druck $p$, der in dem Punkte $z$ Statt findet, ist also wieder, wenn die Dichtigkeit des Wassers $= 1$ gesetzt wird,

$$2gp = 2g(h - z) - s \,.\, \Gamma' : t + \Delta : t,$$

wenn man annimmt, daſs das Wasser von $A$ nach $O$ zuflieſst. Diese Gleichung wird auf den gegenwärtigen Fall angewandt, wenn wir die unbestimmten Functionen aus dem bekannten Drucke, der in $A = L$, in $O$ aber $= k$, dem Drucke der Atmosphäre gleich ist, bestimmen. Da in $A$, $s = 0$, $z = 0$ ist, so wird $2gL = 2gk + \Delta : t$, wo man auch die beständige Gröſse mit in der Function $\Delta : t$ begreifen könnte. In $O$ ist $s = AO$, $z = O\omega$, $p = k$, daher, wenn ich für $2gh + \Delta : t$ sogleich seinen Werth setze,

$$2g(L - k) = 2g \,.\, O\omega + AO \,.\, \Gamma' : t,$$

$$\text{also } \Gamma' : t = \frac{dx}{dt} = \frac{2g(L - k - O\omega)}{AO},$$

und die allgemeine Gleichung für den Druck in irgend einem Punkte $z$ wird

$$p = L - z - \frac{s \,.\, (L - k - O\omega)}{AO},$$

oder, wenn man die beständigen Gröſsen $AO = l$, $O\omega = a$ setzt,

$$p = L - z - \frac{s}{l}(L - k - a)$$

$$\text{und } \frac{dx}{dt} = 2g\left(\frac{L-k-a}{l}\right),$$

$$\text{also } x = \frac{2g}{l}\left(\int L\,dt - kt - at\right).$$

276. Wenn $L$ unveränderlich $= a + k$ ist, so bleibt die Geschwindigkeit unverändert; weil $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, wie groſs sie aber sey, bleibt unbestimmt, weil in der Integralgleichung $x = \text{Const.}$ die Constans unbestimmt bleibt: es müſsten also noch andre Umstände der Bewegung gegeben seyn, wenn $x$ gefunden werden soll. Eben diese Unbestimmtheit findet noch Statt, wenn $L$ gröſser oder kleiner als $k + a$ und unveränderlich ist, und man sieht aus der Gleichung blos, daſs im ersten Falle die Geschwindigkeit wächst, im zweiten abnimmt.

277. In wirklich vorkommenden Fällen wird aber diese Geschwindigkeit durch andre Umstände bestimmt. Die Kräfte, welche man bei Maschinen anbringt, diese mögen nun von Menschen, Thieren, von flieſsendem Wasser, oder vom Winde getrieben werden, wirken immer desto schwächer, je schneller die erlangte Bewegung der Masse, worauf sie wirken, schon ist: aus ihrer Wirkung auf einen ruhenden Gegenstand läſst sich also nicht bestimmen, wie sie die Geschwindigkeit eines schon bewegten beschleunigen, sondern man muſs für jede Geschwindigkeit ihre Wirkung als anders woher bekannt ansehen. Gesetzt also, das Wasser werde durch eine Maschine in die Röhre getrieben, und an dieser Maschine sey eine Kraft angebracht, die bei der Geschwindigkeit $= c$ dem Gewichte eines Wasservolumens $= V$ gleich ist. Die Maschine sey so eingerichtet, daſs sie immer mit der Ge-

schwindigkeit $= c$ wirkt (eine Voraussetzung, der man immer Genüge leisten kann), so lassen sich nun Vergleichungen zwischen $V$, $c$, $L$, $s$ finden.

Wir drückten vorhin die Kraft, welche das Wasser bei $A$ in die Röhre treibt, durch die Höhe $L$ einer Wassersäule aus, ist also die Weite der Röhre $= \omega$, so ist jene Kraft dem Gewichte eines Wasservolumens, $= L\omega$ gleich, und es läfst sich nun die Geschwindigkeit bestimmen, bei welcher diese Kraft aus der mit der Geschwindigkeit $= c$ wirkenden Kraft $V$ entstehen kann. Es mufs nämlich, wenn die Kraft $L\omega$ das Wasser mit der Geschwindigkeit $s$ forttreibt, $L\omega s = Vc$, also $s = \frac{Vc}{L\omega}$ seyn. Wir haben aber vorhin gesehen, dafs zugleich $L = a + k$ seyn mufs, wenn die Bewegung gleichförmig bleiben soll, oder, wenn auch der Kraft in $A$ der Druck der Atmosphäre zu Hülfe kommt, die Kraft $L = a$; die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre wird also $s = \frac{Vc}{a\omega}$ seyn.

278. Das Product aus der wirkenden Kraft $V$ in ihre Geschwindigkeit, worauf es hier ankommt, ist das, was man den Effect der Maschine nennt; soll also dieser Effect bei verschiedenen Werthen von $V$ gleich bleiben, so mufs die Geschwindigkeit sich im umgekehrten Verhältnisse mit $V$ ändern, damit das Product $Vc$ dasselbe bleibe. Man übersieht nun auch leicht, dafs in unserm Probleme $s$ bald unveränderlich werden mufs; denn wäre, vermöge der Einrichtung der Maschine, die auf $A$ wirkende Kraft $L\omega$ gröfser als $a\omega$, so würde die Bewegung des Wassers anfangs beschleunigt; aber diese Beschleunigung ist nothwendig mit einer vermehrten Geschwindigkeit der Maschine verbunden, und die Kraft $V$ nimmt daher ab, weil sie auf eine Masse, deren Geschwindigkeit gröfser als $c$ ist, nicht mehr mit derselben Gewalt wirken kann, folglich wird die Geschwindigkeit $s$ nur so lange zunehmen, bis $V$ und $c$ ge-

wisse Werthe erlangt haben, bei welchen die Gleichung $z = \frac{Vc}{aw}$ Statt findet.

279. Alle Kräfte, die man zur Betreibung von Maschinen anwendet, sind so beschaffen, daſs sie die gröſste Kraft ausüben, wenn sie auf einen ruhenden Gegenstand wirken, diese Kraft sey $= F$; ist hingegen der Gegenstand schon in Bewegung, so nimmt ihre Kraft ab, und verschwindet endlich ganz, wenn der bewegte Gegenstand eine gewisse Geschwindigkeit $= c$ erlangt hat. Der Effect einer solchen Kraft verschwindet also, wenn die Geschwindigkeit $= 0$ und wenn sie $= c$ ist, und muſs daher für irgend eine mittlere Geschwindigkeit am gröſsten werden. Für irgend eine andre Geschwindigkeit $= u$, die kleiner als $= c$ ist, kann man die Gröſse der Kraft $= F \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$ setzen, also ihren Effect $= Fu \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$, und man findet leicht, daſs dieser Effect am gröſsten wird, wenn $u = \frac{1}{3} c$ ist, in diesem Falle ist der Effect $= \frac{4}{27} Fc$, und diesen gröſsten Effect muſs man bei einer Maschine zu erreichen suchen. Indeſs kommt hiebei ein Umstand in Betrachtung, der bei der Anwendung von groſser Wichtigkeit ist, der hier aber blos angeführt werden kann. Jede Maschine nämlich muſs auſser der Wirkung, um deren willen sie eigentlich angelegt ist, z. B. auſser der Bewegung des Wassers, welche sie bewirken soll, noch eine Menge von Hindernissen überwinden, und deswegen leistet sie nicht den gröſsten nutzbaren Effect, wenn das Product $Vu$ am gröſsten ist: indeſs werden wir hier auf solche Hindernisse der Bewegung nicht rechnen, da ohnehin nur die allgemeine Betrachtung dieses Gegenstandes hieher gehört *).

---

*) Vergl. Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik, S. 276.

280. Problem 58. Wenn in dem Falle des vorigen Problems das Wasser durch eine Kraft in die Röhre getrieben wird, die bei der Ruhe mit einer Gewalt $= F$ wirkt, bei der Geschwindigkeit $= c$ aber gar keine Wirkung mehr hervorbringt, zu bestimmen, wie die Maschine für diese Kraft einzurichten sey, damit der Effect am gröfsten, oder die gröfste Quantität Wasser in bestimmter Zeit gehoben werde.

Auflösung. Man nehme an, dafs diese an die Maschine angebrachte Kraft mit der Geschwindigkeit $= u$ wirke, und dann eine Gewalt $= F \cdot \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$ ausübe. Die Maschine sey aber so eingerichtet, dafs zur Forttreibung des Wassers in der Röhre diese Kraft in dem Verhältnisse $1 : n$ vermehrt werde, also dann mit einer Geschwindigkeit $= \frac{u}{n}$ wirkt, so bewegt sich auch das Wasser in der Röhre mit dieser Geschwindigkeit, und man hat nun $x = \frac{u}{n}$. Wenn nun die Weite der Röhre $= \omega$, die Kraft, welche das Wasser in die Röhre treibt, $= nF \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$, so ist diese auch nach dem vorigen Ausdruck $= L\omega$, also $L = \frac{nF}{\omega} \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$. Wir fanden aber vorhin $\frac{dx}{dt} = 2g \frac{(L - a)}{l}$, wo wir $k$ weglassen können, weil der Druck der Atmosphäre auch der forttreibenden Kraft zu Hülfe kommt, die Bewegung würde also beschleunigt werden, wenn $L > a$ ist, und verzögert, wenn $L < a$, aber aus den vorhin angeführten Gründen wird sehr bald $L = a$, folglich

$$1 - \frac{u}{c} = \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}, \quad u = c\left(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}\right),$$

und das Wasser wird mit der Geschwindigkeit $x = \frac{u}{n} = \frac{c}{n}\left(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}\right)$ ausfliefsen, also die erhobne Wasser-

menge $= x\omega$ seyn. Der Effect aber wird am gröſsten, wenn $u = \frac{1}{3} c$, also $\frac{\omega a}{nF} = \frac{4}{9}$, daher muſs die Maschine so eingerichtet werden, daſs $n = \frac{9 a \omega}{4 F}$ und $x = \frac{4}{27} \cdot \frac{Fc}{a \omega}$, also die in einer Secunde erhobene Wassermenge $= \frac{4}{27} \cdot \frac{Fc}{a}$ sey, wo $F$ ein Volumen Wasser bezeichnet, dessen Gewicht die Gröſse der Kraft $F$ ausdrückt.

281. Es kann also von einer Kraft, welche auf einen ruhenden Gegenstand die Gewalt $F$ ausübt, bei der Geschwindigkeit $= c$ aber gar keine Wirkung mehr hervorbringt, keine gröſsere Quantität als $\frac{4}{27} \cdot \frac{Fc}{a}$ auf die Höhe $= a$ erhoben werden, und diese Wassermenge wird man nur dann erhalten, wenn die Maschine so eingerichtet ist, daſs die bewegende Kraft bei der Uebertragung auf die Forttreibung des Wassers in dem Verhältnisse $1 : \frac{9 a \omega}{4 F}$ vermehrt wird, und wenn derjenige Theil der Kraft, der zu Ueberwindung der Friction und des übrigen Widerstandes verwandt wird, unbedeutend ist.

282. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, nehme ich an, daſs für die Kraft eines Menschen $F = 70$ Pfund, oder $= 1$ Cub. Fuſs Wasser sey, $c$ aber, oder diejenige Geschwindigkeit, wo ein Mensch gar keine Wirkung mehr auf den bewegten Gegenstand hervorbringt, $= 7\frac{1}{2}$ Fuſs. Hiernach würde also ein Mensch, wenn man seine Kraft am vortheilhaftesten anwendet, in jeder Secunde $\frac{10}{9a}$ Cubikfuſs Wasser auf die Höhe $a$ erheben können, und die Maschine müſste so eingerichtet seyn, daſs die Kraft des Menschen bei einer Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fuſs wirke; dann ist der Effect $= \frac{4}{27} Fc = \frac{10}{9}$. Man erhält also auch die erhobene Quantität Wasser, wenn man den so ausgedrück-

ten Effect durch die Höhe $a$ dividirt. Bei der Einrichtung der Maschine kommt es aber noch auf die Weite der Röhre an, weil die Kraft bei der Uebertragung im Verhältnifs $1 : \frac{9 a \omega}{4 F}$ vermehrt werden soll. Aehnliche Rechnungen lassen sich anstellen, wenn man annimmt, dafs die bewegende Kraft der Stofs eines fliefsenden Wassers an die Schaufeln eines Wasserrades, oder irgend eine andre sey.

---

## Dritter Abschnitt.

### *Von der Bewegung des Wassers in Röhren von ungleicher Weite.*

---

283. Problèm 59. Wenn eine gewisse Menge Wasser sich in einer Röhre, welche nicht überall gleich weit ist, fortbewegt, und an beiden Enden von bestimmten äufsern Kräften gedrückt wird, die Geschwindigkeit des Wassers und den Druck in jedem Punkte zu bestimmen.

Auflösung. Wir haben vorhin gesehen, dafs man immer die Richtungslinie der Röhre, sie mag, wie man will, gekrümmt seyn, als gerade betrachten darf, wenn man ihr nur eine Scale der Höhen, wie $\alpha\omega$ (Fig. 50.) beifügt, deren Ordinaten $z\pi$ die Höhe jedes Punktes $z$ über einer bestimmten horizontalen Ebene angeben. Es sey also hier $AO$ die Röhre, $\alpha\omega$ die Scale der Höhen. Am Ende der Zeit $= t$ betrachte man irgend ein Wassertheilchen in $z$, und es sey die Länge der Richtungslinie von einem bestimmten Punkte $A$ an, $Az = s$, der Querschnitt der Röhre sey hier $zv = \omega$, die Höhe des Punktes $z$, $z\pi = z$, so sind $\omega$ und $z$ als gegebne Functionen von $s$ anzusehen.

Die Dichtigkeit sey $= 1$, der Druck in $z = p$, die Geschwindigkeit, mit welcher dieses Theilchen sich nach $O$ zu bewegt, $= x$, so müssen $p$ und $x$ als Functionen von $s$ und $t$ bestimmt werden.

Aus §. 254. haben wir hier zuerst $\left(\frac{d.x\omega}{ds}\right) = 0$, daſs also $x\omega$ blos von der Zeit abhängen muſs, und in jedem bestimmten Zeitpunkte die Geschwindigkeit dem Querschnitte umgekehrt proportional ist. Wenn also an irgend einer Stelle, wo der Querschnitt der Röhre $= ff$ ist, die Geschwindigkeit $= v$ heiſst, für einen bestimmten Werth von $t$, so wird für eben den Augenblick $x = \frac{ff.v}{\omega}$, und folglich, da $\omega$ eine bekannte Function von $s$ ist, $x$ für diesen Zeitpunkt bestimmt. Die Formel $x = \frac{ff:v}{\omega}$ enthält also die erste Bestimmung der Bewegung, und man muſs bemerken, daſs $v$ blos von der Zeit $t$, $\omega$ aber blos von $s$ abhängt.

In der zweiten Gleichung, welche den Druck $p$ bestimmt, wird, weil wir blos auf die Wirkung der Schwere Rücksicht nehmen, $P = 0$, $Q = 0$, $R = -1$, und da in dieser Gleichung die Zeit $t$ als unveränderlich betrachtet wird, so ist

$$dx = -ff.\frac{v.d\omega}{\omega^2} \text{ und } \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{ff.dv}{\omega dt},$$

die Gleichung wird also

$$2g\,dp = -2g\,dz + \frac{f^4.v^2 d\omega}{\omega^3} - \frac{f^2.ds}{\omega}.\frac{dv}{dt},$$

woraus, weil hier $v$ und $\frac{dv}{dt}$ als beständige Gröſsen angesehen werden, folgt

$$2gp = \Delta:t - 2gz - \frac{f^4v^2}{2\omega^2} - \frac{f^2dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

und hier ist die Integralformel $\int\frac{ds}{\omega}$ als bekannt anzusehen, weil $\omega$ eine gegebene Function von $s$ ist.

Diese Gleichung enthält noch zwei unbestimmte Grössen, welche Functionen von $t$ sind, nämlich $v$ und $\Delta : t$; um die Werthe dieser angeben zu können, haben wir angenommen, daſs der Druck, welchen die beiden Enden der Wassermasse leiden, gegeben sey. Befinden sich diese Endpunkte der Wassermasse in $M$ und $N$, so sey $AM = m$, $AN = n$, der Querschnitt der Röhre in $M = \mu$, in $N = \nu$, die Höhe $M\mu = \mathfrak{m}$, $N\nu = \mathfrak{n}$; ferner sey des Integrals $\int \frac{ds}{\omega}$ Werth in $M = \mathfrak{M}$, in $N = \mathfrak{N}$, und endlich der Druck in $M = M$, in $N = N$.

Weil nun die Geschwindigkeit in $M = \frac{ff.v}{\mu}$, in $N = \frac{ff.v}{\nu}$ ist, so rücken $M$ und $N$ in der Zeit $dt$ nach $M'$, $N'$ so fort, daſs $MM' = \frac{ff.vdt}{\mu}$, $NN' = \frac{ff.vdt}{\nu}$, daher $dm = \frac{f^2.vdt}{\mu}$, und $dn = \frac{ff.vdt}{\nu}$, weil $m$ und $n$ blos Functionen von $t$ sind, also $\mu dm = \nu dn$.

Aus der Gleichung für $p$ folgen nun aber für die Punkte $M$, $N$ zwei bestimmte Gleichungen:

$$2gM = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 v^2}{2\mu^2} - \frac{f^2 dv}{dt} . \mathfrak{M},$$

$$2gN = \Delta : t - 2g\mathfrak{n} - \frac{f^4 v^2}{2\nu^2} - \frac{f^2 dv}{dt} . \mathfrak{N},$$

also
$$2g(M - N) = 2g(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}) + \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) + \frac{f^2 . dv}{dt} . (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}),$$

woraus sich $v$ bestimmen läſst, weil alle vorkommende Gröſsen blos Functionen von $t$ sind. Ist aber $v$ bestimmt, so hat man auch für jeden andern Punkt $z$ zur Bestimmung des Drucks die Gleichung

$$2g(M - p) = 2g(z - \mathfrak{m}) + \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) + \frac{f^2 dv}{dt}\left(\int \frac{ds}{\omega} - \mathfrak{M}\right).$$

284. Da die ganze Quantität des Wassers in der Röhre bekannt ist, so wird aus $AM = m$ sich auch $AN = n$ bestimmen lassen, weil man die Gestalt der Röhre kennt; der Raum, welchen die ganze Wassermasse einnimmt, wird durch $\int \nu dn - \int \mu dm$ ausgedrückt, und diese Formel bestimmt $n$ durch $m$, wenn man $\nu$ als Function von $n$, und $\mu$ als Function von $m$ ausdrückt, und den Unterschied der Integrale der bekannten Wassermasse gleich setzt. Es lassen sich also nun $\mu$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ und $n$, $\nu$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{N}$ als Functionen von $m$ betrachten.

285. Die ganze Untersuchung beruht nun auf der Integration der Gleichung für $v$

$$2g(M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}) = \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right] + \frac{f^2 dv}{dt} (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}),$$

da hier $dt = \dfrac{\mu dm}{f^2 v}$ ist, so multiplicire man sie mit $\mu dm = f^2 v dt$; dann wird, wenn man $f^4 v^2 = V$ setzt,

$$4g(M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}) \mu dm = V \mu dm \left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right] + dV(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}),$$

woraus $V$ bestimmt werden mufs, welches dann $v$ und $t$, durch $m$ ausgedrückt, gibt.

Diese Gleichung läfst sich integriren, wenn N und $M$ entweder beständig, oder als Functionen von $m$ und $n$ gegeben sind. Denn da hier

$\mu dm = \nu dn$, und zugleich $d\mathfrak{N} = \dfrac{dn}{\nu}$, $d\mathfrak{M} = \dfrac{dm}{\mu}$, also

$$\mu dm \left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right] = d\mathfrak{N} - d\mathfrak{M} \text{ ist, so wird}$$

$$V(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g \int \mu dm (M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}),$$

$$\text{oder } v^2 = \frac{4g}{f^4 (\mathfrak{N} - \mathfrak{M})} \int \mu dm (M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}).$$

286. Da die Geschwindigkeit des Wassers in $M$ $= \dfrac{f^2 v}{\mu}$, in N $= \dfrac{f^2 . v}{\nu}$ ist, so bedeutet der Ausdruck

$$f^4 v^2 (-\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = f^4 \left[ \int \frac{v^2 \cdot \nu \, dn}{\nu^2} - \int \frac{v^2 \mu \, dm}{\mu^2} \right]$$

die lebendige Kraft der ganzen bewegten Wassermasse, welche dem Integrale des Products aus jedes Theilchens Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit gleich ist. Man sieht also, daſs die lebendige Kraft der Wassermasse ungeändert bleibt, wenn der Druck in $M$ und in $N$ gleich, $M = N$, und die Richtungslinie der Röhre horizontal wäre: alsdann wirkten gar keine Kräfte, um die Bewegung zu beschleunigen oder zu verzögern, und man erhielte

$$f^4 \cdot v^2 (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = \text{Const.}$$

Wenn aber diese Voraussetzungen nicht Statt finden, so läſst sich die allgemeine Gleichung, weil $\mu \, dm = \nu \, dn$ ist, auch so ausdrücken:

$$f^4 v^2 . (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g \cdot \int \mu \, dm (M + \mathfrak{m}) - 4g \int \nu \, dn (N + \mathfrak{n}),$$

wo man deutlicher übersieht, wie die lebendige Kraft vermehrt wird, wenn Kräfte $M$, $N$, und das Gewicht der Wassersäulen, deren Höhen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ verschieden sind, die Bewegung beschleunigen oder verzögern.

Einige Beispiele werden diese Untersuchung noch mehr erläutern.

287. Erstes Exempel. Die Röhre sey conisch und ihre Richtungslinie $AO$ (Fig. 51.) vertical; in derselben bewege sich die Wassermasse $ACc$ frei herab; man sucht die Umstände der Bewegung zu bestimmen.

Die Höhe des Raums, welchen die Wassermasse anfangs ausfüllte, sey $AC = c$, und in $C$ sey der Röhre Querschnitt $= \alpha c^2$, das Volumen der bewegten Masse also $= \frac{1}{3} \alpha c^3$. Am Ende der Zeit $t$ befinde das Wasser sich in $MmNn$, und es sey $AM = m$, $AN = n$, so wird der Querschnitt $Mm = \alpha m^2 = \mu$, $Nn = \alpha n^2 = \nu$, und weil die Masse $= \frac{1}{3} \alpha (n^3 - m^3) = \frac{1}{3} \alpha c^3$ seyn muſs, so ist $n^3 = c^3 + m^3$. Werden nun die Höhen, welche wir vorhin mit $z$ bezeichneten, von $O$ an gerechnet, und ist $AO = a$, so wird $OM = \mathfrak{m} = a - m$, $ON = \mathfrak{n} = a - n$, und für

irgend einen andern Punkt $z$, $Az = s$, $Oz = z = a - s$, der Querschnitt $zv = \omega = \alpha s^2$. Weil ferner

$$\int \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{ds}{s^2} = - \frac{1}{\alpha s} \text{ ist, so wird}$$

$$\mathfrak{M} = - \frac{1}{\alpha m}, \ \mathfrak{N} = - \frac{1}{\alpha n}.$$

Für den Fall also, da $M = N = k$, oder auf beide Enden der Wassermasse blos die Atmosphäre drückt, wird, wenn $ff$ und $v$ ihre vorige Bedeutung behalten (nach §. 285),

$$f^4 v^2 \left[\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right] = 4 g \alpha \int m^2 dm (n - m) = \alpha g (n^4 - m^4) + \text{Const.}$$

weil $n^2 dn = m^2 dm$ ist. Die beständige Gröſse läſst sich bestimmen, weil, wenn $m = 0$ und $n = c$ ist, $v = 0$ seyn soll; diese Voraussetzung gibt

$$f^4 v^2 \left[\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right] = \alpha g (n^4 - m^4 - c^4),$$

$$\text{oder } f^2 v = \alpha \sqrt{\frac{g m n (n^4 - m^4 - c^4)}{n - m}}.$$

Auch zwischen $t$ und $m$ findet man nun eine Gleichung, wenn man in die allgemeine $dt = \frac{\mu\, dm}{f^2 v}$ für $\mu$ und $v$ ihre Werthe setzt, und auch $n$ durch $m$ ausdrückt. Um endlich den Druck $p$ in irgend einem Punkte $z$ zu bestimmen, dienen die Gleichungen am Ende des 283. §., wenn man nämlich dort die hier passenden Werthe für die verschiedenen Buchstaben setzt, so wird

$$f^2 \frac{dv}{dt} \left[\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right] = 2g(n - m) + \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 m^4} - \frac{1}{\alpha^2 n^4}\right] \text{ und}$$

$$2g(k - p + s - m) = 2g \,.\, (n - m) \left[\frac{\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha s}}{\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}}\right]$$

$$- \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 m^4} - \frac{1}{\alpha^2 s^4}\right] + \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 m^4} - \frac{1}{\alpha^2 n^4}\right] \left[\frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}\right],$$

oder

$$2g\left(k - p + s - m + \frac{mn}{s} - n\right) = \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \left\{ \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\alpha^2 m^4} + \frac{1}{\alpha^2 s^4} - \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\alpha^2 n^4} \right\},$$

folglich, wenn man für $f^4 v^2$ seinen Werth setzt,

$$p = k + s - m - n + \frac{mn}{s} + \left(\frac{(s-m)(n-s)(n^4 - m^4 - c^4)}{4 m^2 n^2 (n-m) s^4}\right) \times (m^2 n^2 + mns(m+n) + s^2 (m^2 + mn + n^2)).$$

288. Zweites Exempel. Das Wasser befinde sich wieder in einer conischen Röhre, aber diese sey oben luftdicht geschlossen, und der Raum über $Mm$ luftleer.

In diesem Falle leidet die Oberfläche $Mm$ gar keinen Druck, die untere aber den Druck der Atmosphäre, also ist $M = 0$, $N = k$, und weil alles übrige, wie vorhin, bleibt,

$$f^4 v^2 \left(\frac{n-m}{mn}\right) = 4 g \alpha^2 \int m^2 dm\, (n - m - k),$$

oder, weil $m^2 dm = n^2 dn$ ist,

$$\frac{f^4 v^2 (n-m)}{mn} = \alpha^2 g (n^4 - m^4 - c^4 - \tfrac{4}{3} k m^3),$$

wenn $v$ verschwinden soll, wenn $m = 0$ und $n = c$ ist. Wäre hier $c < k$ oder $c = k$, so könnte gar keine Bewegung entstehen, weil alsdann $dv$ verschwände oder negativ würde, wenn man $v = 0$, $m = 0$, $n = c$ in die Gleichung für $dv$ setzt. Wenn aber $c > k$ ist, so wird die Wassersäule anfangen zu sinken, und zwar anfangs mit beschleunigter Bewegung, bis $dv = 0$ wird, das ist, bis

$$f^4 v^2 \left(\frac{dm}{n^4} - \frac{dm}{m^4}\right) = 4 g \alpha^2 dm\, (n - m - k),$$

oder $m$ und $n$ durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$m^7 + (n + \tfrac{4}{3}k)(m+n)m^5 + (5n + \tfrac{4}{3}k)n^2 m^4 - (4n - \tfrac{16}{3}k)n^3 m^3$$
$$+ (c^4 - n^4)(m^3 + nm^2 + mn^2 + n^3) = 0,$$

wo auch $n$ noch durch $m$ müſste ausgedrückt werden. Ist die flüssige Masse so weit gesunken, daſs $m$ den hiedurch bestimmten Werth erreicht, so hört die Beschleunigung auf, die Bewegung aber dauert noch fort, bis

$$n^4 - c^4 = m^3 (m + \tfrac{4}{3}k)$$

wird, oder, weil $n^3 = m^3 + c^3$ ist, bis

$$(c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}} = m^3 (m + \tfrac{4}{3}k) + c^4,$$

und alsdann hört die niederwärts gehende Bewegung auf. Darf man annehmen, daſs während der ganzen Bewegung $m$ nur klein gegen $c$ bleibe, so läſst sich $(c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}}$ durch eine convergirende Reihe ausdrücken, indem

$$(c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}} = c^4 \left[1 + \tfrac{4}{3}\frac{m^3}{c^3} + \tfrac{2}{9}\frac{m^6}{c^6} - \tfrac{4}{81}\frac{m^9}{c^9} + \tfrac{5}{243}\frac{m^{12}}{c^{12}} + \right]$$

ist. Dann also gäbe die letzte Gleichung, wenn man die höhern Potenzen von $\frac{m}{c}$ wegläſst,

$$0 = \tfrac{4}{3}(c - k) - m + \tfrac{2}{9}\frac{m^3}{c^2} - \tfrac{4}{81}\frac{m^6}{c^5} + \tfrac{5}{243}\frac{m^9}{c^8},$$

für den Augenblick, da $v = 0$ wird. Dieser Fall, daſs $m$ immer klein gegen $c$ bleibt, findet Statt, wenn $c$ wenig gröſser als $k$ ist; es sey daher $c = k(1 + \delta)$, und $\delta$ ein ziemlich kleiner Bruch, so wird, wenn man die höhern Potenzen für $\delta$ wegläſst, für den Augenblick, da die niederwärts gehende Bewegung aufhört,

$$m = k\delta\,[\tfrac{4}{3} + \tfrac{128}{243}(\delta^2 - 2\delta^3)],$$
$$n = k(1 + \delta + \tfrac{64}{81}\delta^3).$$

Aber die flüssige Masse bleibt nicht in Ruhe, sondern fängt jetzt wieder an, aufwärts zu gehen, denn wenn man in den allgemeinen Werth von $\frac{dv}{dt}$ (im 285. §.) die hier passenden Werthe setzt, so ist, wenn $v$ verschwindet,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g\alpha(n-m-k)mn}{f^2(n-m)},$$

also, wenn man die Werthe von $m$, $n$ setzt, welche dem Verschwinden von $v$ in dem eben betrachteten Falle entsprechen, für den Augenblick, da die Wassermasse ihre niedrigste Stelle erreicht hat,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g\alpha mn(-\frac{1}{3}\delta + \frac{64}{243}\delta^3)}{f^2(1-\frac{1}{3}\delta + \frac{64}{243}\delta^3)},$$

also negativ. Die Wassermasse steigt also wieder, und wird so in stetem Oscilliren ihre Bewegung fortsetzen. Auch übersieht man, weil $v$ einen zweideutigen Werth erhält,

$$v = \pm\frac{\alpha}{f^2}\sqrt{\frac{gmn(n^4 - m^4 - c^4 - \frac{4}{3}km^3)}{n-m}},$$

daſs demselben Werthe von $m$ einerlei Geschwindigkeit beim Steigen, wie beim Sinken, entspreche, und schon hieraus erhellet, daſs die Oscillationen isochronisch werden. Die Zeit einer Oscillation läſst sich aus der Gleichung $dt = \frac{\alpha m^2\,dm}{f^2 v}$ bestimmen, wenn man $n$ durch $m$ ausdrückt, und $\frac{1}{f^2 v}$ in eine Reihe verwandelt; für sehr kleine Werthe von $\delta$, oder für sehr kleine Oscillationen findet man für das Sinken der Wassermasse

$$t = 4\sqrt{\frac{\delta k}{3g}} - 2\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\delta k - m}{g}},$$

also die ganze Zeit, bis die Wassermasse ihre niedrigste Stelle erreicht, $= 4\sqrt{\frac{\delta k}{3g}}$, wo alle Potenzen, die gröſser als $\frac{1}{2}$ sind, weggelassen worden. Der vollständige Werth von $t$ müſste periodisch seyn, so daſs nach bestimmten Zeiträumen $m$ wieder einerlei Werth erhielte.

289. Drittes Exempel. Wenn die Röhre zwei verticale Arme $AB$, $CO$ (Fig. 52.) hat, welche durch den horizontalen Theil $BC$ verbunden sind, und das Stück $AB$ sowohl,

als $BC$ und $CO$, jedes für sich betrachtet, durchaus gleich weit ist, aber die Weite dieser Stücke von einander verschieden, die oscillirende Bewegung des Wassers in dieser Röhre zu bestimmen, wenn die Oberflächen $Mm$, $Nn$ immer in den verticalen Schenkeln bleiben.

Der Querschnitt der einen Röhre, in welcher sich die Oberfläche $Mm$ befindet, sey $= \mu$, der Querschnitt der andern verticalen Röhre $= \nu$, der der horizontalen $= \lambda$. Ferner sey $EF$ die Horizontallinie, in welcher beim Gleichgewichte die Oberfläche des Wassers ruhen würde, und $BE = CF = a$ die Länge der horizontalen Röhre $BC = b$, so ist das ganze Volumen des Wassers $= a(\mu + \nu) + b\lambda$. Während der Bewegung sey am Ende der Zeit $= t$ die Höhe $EM = \nu x$, $FN = \mu x$, so ist, wenn $AE = e$, $m = e - \nu x$,

$$\mathfrak{m} = a + \nu x,\ \mathfrak{M} = \frac{e - \nu x}{\mu},\ \text{ferner } n = e + 2a + b - \mu x;$$

$$\mathfrak{n} = a - \mu x,\ \mathfrak{N} = \frac{e + a}{\mu} + \frac{b}{\lambda} + \frac{a - \mu x}{\nu},$$

$$\text{also } \mathfrak{N} - \mathfrak{M} = \frac{b}{\lambda} + \frac{a + \nu x}{\mu} + \frac{a - \mu x}{\nu}.$$

Drückt nun auf die Oberflächen $Mm$, $Nn$ blos die Atmosphäre, so ist $M = N = k$, und da $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = (\mu + \nu)\, x$, so wird (§. 285.)

$$f^4 v^2 \left[\frac{b}{\lambda} + \frac{a + \nu x}{\mu} + \frac{a - \mu x}{\nu}\right] = -4g\int \mu\nu\, dx\, (\mu + \nu)\, x$$

$$= \text{Const} - 2g\mu\nu x^2 (\mu + \nu),$$

oder, wenn $v$ verschwinden soll, indem $x = h$ wird,

$$f^4 v^2 \left[\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu + \nu)}{\mu\nu} + \frac{x(\nu^2 - \mu^2)}{\mu\nu}\right] = 2g\mu\nu(\mu + \nu)(h^2 - x^2).$$

Die Geschwindigkeit wird also $= 0$, sowohl für $x = + h$, als für $x = - h$, und die gröfsten Ausweichungen der Oberfläche $Mm$ unterhalb und oberhalb der Horizontallinie $EF$ sind gleich grofs. Setze ich hier $2g\mu\nu(\mu + \nu) = A$,

$$\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu + \nu)}{\mu\nu} = B,\ \text{und } \frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu\nu} = C,$$

$$\text{so ist } f^2 v = \pm \sqrt{\frac{A(h^2 - x^2)}{B + Cx}},$$

also ist zwar beim Steigen und Sinken die Geschwindigkeit gleich grofs, wenn die Oberfläche $Mm$ sich in demselben Punkte befindet; sie ist aber nicht mehr gleich grofs bei gleichen Abweichungen oberhalb und unterhalb von der Horizontallinie. Nimmt man nämlich an, dafs die Röhre $OC$ die weitere sey, also $\nu > \mu$, so wird $C$ positiv, und folglich für negative Werthe von $x$ die Geschwindigkeit gröfser seyn, als für gleich grofse positive Werthe von $x$, und man übersieht also, dafs in der engern Röhre die Oberfläche $Mm$ längere Zeit oberhalb der Horizontallinie $EF$, als unterhalb derselben bleibt. Die Geschwindigkeit wird am gröfsten, wenn $dv = 0$ ist, und dieses geschieht, wenn

$$x = -\frac{B}{C} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2}{C^2} - h^2\right)},$$

wo nur das obere Zeichen gelten kann, weil $x$ keine gröfsere negative Werthe erhalten darf, als $-\frac{B}{C}$, indem sonst $B + Cx$ negativ und $v$ unmöglich würde. Die Geschwindigkeit wird also am gröfsten, wenn sich die Oberfläche in der engern Röhre um so viel unter der Horizontallinie $EF$ befindet, als die Höhe $\nu x$ beträgt, wenn man darin für $x$ den eben gefundenen Werth setzt. Der Grund aber, warum $x$ nie gröfser als $\frac{B}{C}$ werden kann, erhellet aus folgendem. Wenn $x = -\frac{B}{C}$, so ist die Tiefe der Oberfläche $Mm$ unter der Horizontallinie $EF$

$$= \frac{\nu B}{C} = \frac{b \mu \nu^2}{\lambda(\nu^2 - \mu^2)} + \frac{a \nu}{\nu - m},$$

also gröfser als $a$ (wenn nämlich $AB$ die engere Röhre ist), welches unmöglich, und der Voraussetzung, dafs die Oberflächen in den Röhren $AB$, $CO$ bleiben, zuwider ist.

Um nun endlich eine Gleichung zwischen $x$ und $t$ zu finden, müfste man die Differentialgleichung

$dt = \frac{\mu dm}{f^2 v}$, oder, $dt = -\frac{\mu v dx}{f^2 v} = \mp \frac{\mu v dx}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{B + Cx}{h^2 - x^2}}$,

auflösen. Da hier $x$ immer kleiner ist, als $\frac{B}{C}$, oder $\frac{Cx}{B} < 1$, so läſst $\sqrt{\left(1 + \frac{Cx}{B}\right)}$ sich durch eine convergirende Reihe ausdrücken. Ich will hier blos den Fall betrachten, wo $\frac{Cx}{B}$ sehr klein, also beinahe

$$\sqrt{\left(1 + \frac{Cx}{B}\right)} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{Cx}{B}$$

ist; dieses gibt für das Sinken der Oberfläche $Mm$

$$dt = -\frac{\mu v}{\sqrt{A}}\left(\frac{dx \,.\, \sqrt{B}}{\sqrt{(h^2 - x^2)}} + \tfrac{1}{2}\frac{x dx \,.\, C}{\sqrt{(Bh^2 - Bx^2)}}\right),$$

also, wenn $t$ verschwindet, für $x = + h$, allgemein

$$t = \mu v \,.\, \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \,.\, \left(\text{Ang. Cos.}\ \frac{x}{h} + \tfrac{1}{2}\frac{C}{B}\sqrt{(h^2 - x^2)}\right).$$

Für den Augenblick, da $Mm$ in $Ee$ kommt, ist $x = 0$, also

$$t = \mu v \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\frac{Ch}{B}\right),$$

und für den niedrigsten Stand der Oberfläche $Mm$, wenn $x = -h$ ist, $t = \frac{\mu v \pi \,.\, \sqrt{B}}{\sqrt{A}}$ als die Zeit einer ganzen Oscillation. Dieser Werth von $t$ hängt zwar nicht von $h$ ab, aber da die Integration nur für äuſserst kleine Werthe von $x$ oder $h$ gilt, so darf man daraus nicht geradezu folgern, daſs die Oscillationszeit dieselbe sey, die Schwingungen mögen groſs oder klein seyn.

290. Problem 60. Wenn das Wasser aus einer Röhre, deren Richtungslinie irgend eine Curve ist, und deren Querschnitte ungleich sind, durch die Oefnung $Oo$ (Fig. 50.) ausflieſst, ohne daſs dieser Abgang durch neuen Zufluſs ersetzt wird, die Bewegung des Wassers in dieser Röhre zu bestimmen.

Auflösung. Die Oefnung $Oo$ sey $= ff$, und die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, am Ende der Zeit $t$, $= v$; die andre Oberfläche des Wassers sey in $Mm$, wo der Querschnitt der Röhre $= \mu$, die Höhe über einer gewissen horizontalen Ebene $= M\mu = \mathfrak{m}$ ist; der Druck auf diese Oberfläche sey $= M$, der Druck in der Oefnung $Oo = k$ dem Drucke der Atmosphäre gleich. Die ganze Länge der Röhre $AO$ sey $= a$, $AM = m$, und für irgend einen Punkt $z$, $Az = s$, der Querschnitt der Röhre $zv = \omega$, die Höhe $z\pi = z$, der Druck $= p$, so wird hier, wie im §. 283. $2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 v^2}{2\omega^2} - \frac{f^2 dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega}$. An der Oberfläche $Mm$ ist $p = M$, $z = \mathfrak{m}$, $\omega = \mu$, und $\int \frac{ds}{\omega}$ sey $= \mathfrak{M}$, in $Oo$ aber ist $p = k$, $\omega = ff$, die Höhe $O\omega$ sey $= 0$, oder die horizontale Ebene, von wo an die Höhen gerechnet werden, durch diese Oefnung selbst gelegt, so ist

$$2g(M + \mathfrak{m}) = \Delta : t - \frac{f^4 v^2}{2\mu^2} - f^2 \mathfrak{M} . \frac{dv}{dt},$$

und, wenn das $\int \frac{ds}{\omega}$ für $Oo$, $= \mathfrak{A}$ ist,

$$2gk = \Delta : t - \tfrac{1}{2} v^2 - f^2 . \mathfrak{A} . \frac{dv}{dt}.$$

Es wird also

$$2g(M - k + \mathfrak{m}) = \tfrac{1}{2} v^2 \left[\frac{\mu^2 - f^4}{\mu^2}\right] + f^2 \frac{dv}{dt} (\mathfrak{A} - \mathfrak{M}),$$

und folglich, weil $\mu dm = f^2 v dt$,

$$2g\mu dm (M - k + \mathfrak{m}) = \tfrac{1}{2} v^2 \mu dm \left[\frac{\mu^2 - f^4}{\mu^2}\right] + f^4 v dv (\mathfrak{A} - \mathfrak{M}),$$

wo $d\mathfrak{M} = \frac{dm}{\mu}$ ist, und $\mathfrak{A}$ unveränderlich.

Diese Gleichung enthält, wenn $\mu$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ als Functionen von $m$ ausgedrückt werden, und $M$ unveränderlich ist, blos zwei veränderliche Gröſsen $m$, $v$, man kann also a

durch $m$ bestimmen, und alsdann auch $t$ aus der Gleichung $dt = \frac{\mu\, dm}{f^2 v}$, folglich $m$ und $v$ für jeden Augenblick angeben.

Für den Druck $p$ aber in einem unbestimmten Punkte $z$ erhält man

$$2g(p-k) = -2gz + \tfrac{1}{2}v^2\left[1 - \frac{f^4}{\omega^2}\right] + \frac{f^2 dv}{dt}\left[\mathfrak{A} - \int\frac{ds}{\omega}\right],$$

oder, wenn man statt $\frac{f^2 dv}{dt}$ seinen Werth setzt,

$$2g(M-k)\left[\mathfrak{A} - \int\frac{ds}{\omega}\right] + 2g(k-p)(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}) = 2gz(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})$$
$$-2g\mathfrak{m}\left[\mathfrak{A} - \int\frac{ds}{\omega}\right] + \tfrac{1}{2}f^4v^2\left[\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{M}}{\omega^2} - \frac{\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}}{\mu^2}\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}v^2\left[\mathfrak{M} - \int\frac{ds}{\omega}\right],$$

woraus sich $p$ für jeden Werth von $m$, oder für jeden Zeitpunkt bestimmen läſst.

291. Man kann die Entfernungen $s$ oder $m$ von der Oefnung $Oo$ an rechnen. Dann wird $a = 0$, $OM = m$, $Oz = s$, und man muſs nun in den gefundenen Formeln $m$ und $s$ als negativ betrachten. Zugleich wird nun $\mathfrak{A} = 0$ und $\int\frac{ds}{\omega}$ in der vorigen Gleichung jetzt $= -\int\frac{ds}{\omega}$, die Gleichung für $p$ ist also nun

$$2g(M-k)\int\frac{ds}{\omega} + 2g(k-p)\mathfrak{M} = +2g\mathfrak{M}z - 2g\mathfrak{m}\int\frac{ds}{\omega}$$
$$+\tfrac{1}{2}f^4v^2\left[\frac{-\int\frac{ds}{\omega}}{\mu^2} + \frac{\mathfrak{M}}{\omega^2}\right] - \tfrac{1}{2}v^2\left[\mathfrak{M} - \int\frac{ds}{\omega}\right],$$

wenn hier, nach der jetzigen Bedeutung von $s$, $\mathfrak{M} = \int\frac{ds}{\omega}$ ist, für $s = m$.

Die Gleichung für $dt$ wird nun $dt = -\frac{\mu dm}{ffv}$, und daher die Gleichung zwischen $v$ und $m$

$$2g(M-k+\mathfrak{m})\mu dm = \tfrac{1}{2}v^2 \mu dm\left[1-\frac{f^4}{\mu^2}\right] - f^4 \mathfrak{M}.vdv, \text{ oder}$$

$$0 = 4g(M-k+\mathfrak{m})\mu dm - v^2 \mu dm + \frac{f^4 v^2 dm}{\mu} + 2f^4 \mathfrak{M} v dv.$$

Da hier die beiden letzten Glieder dem Differential von $f^4 v^2 \mathfrak{M}$ gleich sind, so wird die ganze Gleichung integrabel, wenn man sie durch $e^Q$ multiplicirt, und $Q = -\frac{1}{f^4}\int\frac{\mu dm}{\mathfrak{M}}$ nimmt, und es wird

$$e^Q . f^4 v^2 \mathfrak{M} + 4g\int e^Q (M-k+\mathfrak{m})\mu dm = \text{Const.}$$

292. Diese Formel enthält die allgemeinen Gesetze für das Ausfliefsen des Wassers aus Röhren von jeder Form; aber man darf nicht vergessen, dafs sie nur für sehr enge Röhren gilt, indem sie, wie alle unsre hier angestellten Untersuchungen, auf der Voraussetzung beruht, dafs jede auf die Richtungslinie senkrechte Schichte sich ganz mit gleicher Geschwindigkeit bewegt. Wenn also diese Bedingung nicht Statt findet, so würde man keine völlig genaue Uebereinstimmung der Theorie mit den Experimenten erwarten dürfen, selbst wenn gar keine Nebenumstände, auf welche die Theorie keine Rücksicht nehmen konnte, Einflufs auf die Bewegung hätten.

Ueberdies setzt auch die bisherige Untersuchung voraus, dafs die Richtungslinie der Röhre nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmt sey, und die Röhre keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengerungen habe; und endlich haben wir auf Hindernisse der Bewegung, die von einer Reibung oder Anhängen an den Röhrenwänden, oder von der unvollkommenen Flüssigkeit des Wassers herrühren können, gar keine Rücksicht genommen.

293. Ist die Oberfläche $Mm$ blos dem freien Drucke der Atmosphäre ausgesetzt, so hat man $M = k$, für den

Druck auf die untere Fläche *Oo* haben wir zwar $k$ gesetzt, er kann aber auch andre Werthe haben; er ist z. B. $= 0$, wenn das Wasser in einen luftleeren Raum flieſst, und kann sehr verschieden seyn, wenn die Oefnung *Oo* in stillstehendes Wasser getaucht wäre, denn alsdann müſste man den Druck des Wassers statt $k$ in die Gleichung setzen.

Um aber in jedem Falle zu bestimmen, wie weit die Oberfläche *Mm* in bestimmter Zeit fortgerückt, und wie viel Wasser ausgelaufen ist, muſs man die Gleichung zwischen $m$ und $v$ wirklich auflösen, und alsdann $m$ und $v$ durch $t$ bestimmen. — Einige Beispiele werden dieses noch mehr erläutern.

294. Erstes Exempel. Die Richtungslinie *AO* (Fig. 53.) der Röhre sey gerade und vertical; die Röhre sey anfangs bis an *Aa* mit Wasser gefüllt, und dieses flieſse nun durch die Oefnung *Oo* aus; man sucht für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit, mit welcher es ausflieſst, und den Druck für irgend einen Querschnitt *zv*.

Am Ende der Zeit $t$ sey die Oberfläche bis in *Mm* gesunken, und es sey $OM = m$, die Weite der Röhre in $M = \mu$. Da die Röhre vertical steht, so ist auch $\mathfrak{m} = m$, der Druck auf *Mm* sey $= k$, und die Geschwindigkeit in der Oefnung *Oo* am Ende der Zeit $t$, $= v$, so hat man für sie die Gleichung

$$2f^4 v\,dv . \mathfrak{M} + f^4 \frac{v^2\,dm}{\mu} - v^2 \mu\,dm + 4g\mu m\,dm = 0,$$

oder, wenn man $f^4 \mathfrak{M} . v^2 = u$ setzt,

$$du - \frac{u\mu\,dm}{f^4 \mathfrak{M}} + 4g\mu m\,dm = 0.$$

Für den Druck in irgend einem Punkte $z$ hat man, wenn $Oz = s = z$ und der Querschnitt $zv = \omega$ ist,

$$2g(k-p)\mathfrak{M} = 2g\mathfrak{M} . s - 2gm\int\frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}v^2\left(1 - \frac{f^4}{\omega^2}\right)\mathfrak{M}$$

$$+ \tfrac{1}{2}v^2\left(1 - \frac{f^4}{\mu^2}\right)\int\frac{ds}{\omega}.$$

Die erste Differentialgleichung muſs so integrirt werden, daſs $v$ verschwindet, wenn $m = a$ ist, und, wenn man dann $t = -\int \frac{\mu\, dm}{f^2 v}$ sucht, so muſs auch $t$ verschwinden für $m = a$; die ganze Zeit bis zur völligen Ausleerung aber erhält man, wenn man nach vollendeter Integration $m = 0$ setzt.

295. Nach diesen Formeln pflegt man gewöhnlich, obgleich nicht mit vollem Rechte, die Bewegung des Wassers zu bestimmen, welches aus einem cylindrischen Gefäſse *AC* (Fig. 54.), dessen Boden eine Oefnung hat, ausläuft. Setzt man hier $\mu = \omega = c^2$; und die Oefnung $Oo = ff$, so wird zwar scheinbar $\int \frac{ds}{\omega} = \int \frac{ds}{c^2} = \frac{s}{c^2}$, eigentlich aber sollte man Rücksicht darauf nehmen, daſs die untersten Wasserschichten nicht ganz parallel herabsinken, und daſs wohl gar bei $C$ etwas Wasser ganz unbewegt bleibt, also die Querschnitte der bewegten Wassermasse nicht alle $= c^2$ sind.

Nach der gewöhnlichen Auflösung nimmt man hierauf nicht Rücksicht, sondern setzt $\mathfrak{M} = \frac{m}{c^2}$, und daher, wenn $u = f^4 v^2 \mathfrak{M}$ war,

$$du - \frac{c^4}{f^4} \cdot \frac{u\, dm}{m} + 4 g c^2 m\, dm = 0,$$

oder, wenn man $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ setzt, und mit $m^{-\lambda}$ multiplicirt und integrirt,

$$u \cdot m^{-\lambda} + \frac{4 g c^2}{2 - \lambda} m^{2-\lambda} = \text{Const.},$$

$$\text{oder } f^4 v^2 = c^2 . m^{\lambda - 1} \left[ \text{Const} + \frac{4 g c^2}{\lambda - 2} . m^{2-\lambda} \right],$$

und, weil $v = 0$ wird, für $m = a$

$$f^4 v^2 = \frac{4 g c^4 m}{\lambda - 2} \left( 1 - a^{2-\lambda} . m^{\lambda - 2} \right),$$

woraus man für den Querschnitt $zv$, dessen Höhe über der Oefnung $= s$ ist, den Druck

$$p = k + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}(m - s)\left[1 - \frac{m^{\lambda - 2}}{a^{\lambda - 2}}\right] \text{ findet.}$$

Aus der Gleichung für $v$ findet man

$$dv = \frac{2gc^4\,dm}{f^4 v(\lambda - 2)}\left[1 - (\lambda - 1) \cdot \frac{m^{\lambda - 2}}{a^{\lambda - 2}}\right],$$

und folglich ist $v$ am gröſsten, wenn

$$\frac{m^{\lambda - 2}}{a^{\lambda - 2}} = \frac{1}{\lambda - 1}, \text{ dann aber ist}$$

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{c^4 m}{f^4(\lambda - 2)}\left[1 - \frac{1}{\lambda - 1}\right] = \frac{c^4 m}{f^4 \cdot (\lambda - 1)} = \frac{\lambda m}{\lambda - 1},$$

also die Höhe, welche dieser Geschwindigkeit zugehört, immer gröſser als $m$, oder gröſser als die in demselben Augenblicke Statt findende Höhe des Wassers über der Oefnung; in demselben Augenblicke aber ist

$$m = a \cdot (\lambda - 1)^{-\frac{1}{\lambda - 2}}.$$

Für $\lambda = 2$ würde $u = 4gc^2m^2 \log. \frac{a}{m}$, woraus sich dann $v$ und $p$ bestimmen lassen. Für den Fall aber, daſs $\lambda = 1$, oder die Oefnung so groſs, als der Querschnitt des cylindrischen Gefäſses selbst ist, erhält man

$$v = 2\sqrt{gm} \cdot \sqrt{\left[\frac{a}{m} - 1\right]} = 2\sqrt{g(a - m)},$$

oder die Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, $\frac{v^2}{4g} = a - m$, gleich der Höhe, von welcher die flüssige Masse herabgefallen ist, völlig so, als ob sie ein fester Körper wäre. Eine gröſste Geschwindigkeit in dem Sinne, wie wir sie eben suchten, findet hier nicht Statt, sondern die Geschwindigkeit wächst immer fort, und

darum gibt die allgemeine Formel für diese gröſste Geschwindigkeit in diesem Falle das ungereimt scheinende Resultat $v = \infty$.

296. Obgleich diese Anwendung der allgemeinen Formel auf ein ziemlich weites Gefäſs nicht strenge richtig ist, da es zweifelhaft bleibt, ob die Bewegung selbst in den obern Schichten völlig so beschaffen ist, wie unsre Voraussetzungen es erfordern, so ist es doch der Mühe werth, zu untersuchen, wie die Formel sich ändert, wenn man Rücksicht darauf nimmt, daſs die untern Schichten nicht ganz in Bewegung sind. Ich will daher annehmen, daſs die wirklich sich bewegende Wassermasse durch die krumme Fläche *ow* begränzt werde, oder daſs *xwoO* das sey, was Kästner den Strudel nennt; die Gestalt dieses Strudels wird sich, so lange die Oberfläche *Mm* noch ziemlich hoch ist, wohl nicht merklich ändern, und ich sehe sie daher als unveränderlich an.

Offenbar ist jetzt das Integral $\int \frac{ds}{w}$ nicht mehr $= \frac{s}{c^2}$, sondern der erste Theil des Integrals, bis $s = Cw$ wird, müſste aus der Form des Strudels bestimmt werden. Diese ist nun zwar unbekannt; aber jeder seiner Querschnitte ist kleiner als $c^2$, also das Integral $\int \frac{ds}{w}$, wenn man es bis an $cw$ nimmt, gewiſs gröſser als $\frac{Cw}{c^2}$, ich will es $= \frac{Cw + b}{c^2}$ setzen, und $b$ als beständig ansehen, so wird nun für alle höher liegenden Schichten $zv$ dieses Integral $\int \frac{ds}{w} = \frac{s + b}{c^2}$ und $\mathfrak{M} = \frac{m + b}{c^2}$. Es ist also nun so lange die Oberfläche *Mm* ziemlich hoch über *xw* bleibt,

$$2 f^4 v\, dv \frac{(m+b)}{c^2} + \frac{f^4 v^2 dm}{{}^1c^2} - v^2 c^2 dm + 4 g m c^2 dm = 0,$$

oder, wenn man $f^4 v^2 \frac{(m+b)}{c^2} = u$ setzt,

$$du - \frac{u\,c^4}{f^4} \cdot \frac{dm}{(m+b)} + 4gc^2 m\,dm = 0,$$

und, wenn wieder $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ ist,

$$\text{Const.} = u \,.\, (m+b)^{-\lambda} + \frac{4gc^2}{2-\lambda}(m+b)^{1-\lambda} \,.\, \left\{m + \frac{b}{\lambda-1}\right\},$$

oder, weil $v = 0$, für $m = a$

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{\lambda}{\lambda-2}\left\{m + \frac{b}{\lambda-1} - \left(a + \frac{b}{\lambda-1}\right)\left(\frac{m+b}{a+b}\right)^{\lambda-1}\right\}.$$

Um diesen Werth von $v$ mit dem im vorigen §. gefundenen zu vergleichen, will ich annehmen, daſs $b$ ziemlich klein gegen $m$ und $a$ sey, und dieser Fall wird wohl immer Statt finden, wenn die Höhe der Oberfläche $Mm$ über der Oeffnung beträchtlich groſs ist. In diesem Falle wird, wenn man höhere Potenzen von $\frac{b}{a}$ als die zweite wegläſst,

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{\lambda}{\lambda-2}\left\{m - \frac{m^{\lambda-1}}{a^{\lambda-2}} - b\left[(\lambda-1)\left(1-\frac{m}{a}\right).\frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}} - \frac{1-\frac{m^{\lambda-1}}{a^{\lambda-1}}}{\lambda-1}\right]\right.$$

$$\left. - b^2 \,.\, \frac{m^{\lambda-3}}{a^{\lambda-2}}\left[\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2} - \frac{\lambda(\lambda-2)m}{a} + \frac{\lambda-2}{2}.\frac{m^2}{a^2}\right]\right\},$$

oder

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{\lambda}{\lambda-2}\left\{m - \frac{m^{\lambda-1}}{a^{\lambda-2}} - \frac{b}{\lambda-1}\left[(\lambda-1)^2.\frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}} - \lambda.(\lambda-2).\frac{m^{\lambda-1}}{a^{\lambda-1}} - 1\right]\right.$$

$$\left. - b^2.\frac{m^{\lambda-3}}{a^{\lambda-2}}\left[\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2} - \frac{\lambda.(\lambda-2)m}{a} + \frac{(\lambda-2)m^2}{2a^2}\right]\right\},$$

wo der Coefficient von $b$ wenigstens so lange negativ wird, als $\frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}} > \frac{\lambda.(\lambda-2)}{(\lambda-1)^2} . \frac{m^{\lambda-1}}{a^{\lambda-1}} + \frac{1}{(\lambda-1)^2}$ ist, also, wenn

z. B. $\lambda = 3$ wäre, so lange, als $\frac{m}{a} > \frac{1}{3}$ ist. Für den Anfang der Bewegung wird $v$ also kleiner, als der vorige §. angab, wenn der Strudel gegen $m$ und $a$ sehr klein ist, und selbst seine Gestalt nicht ändert, während $m$ abnimmt: für kleinere Werthe von $m$ aber wird die Reihe immer weniger convergirend, und die, wegen der unbekannten Gröſse $b$ ohnehin schon nur oberflächlichen Schlüsse werden noch weniger zuverlässig.

297. Zweites Exempel. Der obere Theil der Röhre $AabB$ (Fig. 55.) sey noch cylindrisch und vertical, der untere Theil $BboO$ aber sey gekrümmt und von ungleicher Weite: man sucht die Formeln für die Bewegung des Wassers für die Zeit, da die Oberfläche $Mm$ sich noch in dem cylindrischen Theile der Röhre befindet.

Der Querschnitt des obern Theiles der Röhre sey $= c^2$, die Länge des gekrümmten Theiles $BzO = a$, seine ganze Höhe $BC = b$; ferner sey $BM = x$, also $m = a + x$ und $\mathfrak{m} = b + x$; endlich des unbestimmten Punktes $z$ Entfernung von $O$, $Oz = s$, seine Höhe $zP = z$, der Querschnitt $zv = \omega$. Das Integral $\int \frac{ds}{\omega}$ erhält, wenn man es für den ganzen untern Theil der Röhre sucht, einen unveränderlichen Werth $= B$, also wird nun $\mathfrak{M} = B + \frac{x}{c^2}$, und folglich, wenn $M = k$, die Gleichung für $v$

$$2gc^2(b+x)\,dx = \tfrac{1}{2}c^2v^2\,dx\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) - f^4 v\,dv\left(B + \frac{x}{c^2}\right),$$

oder, wenn $f^4 v^2 \left(B + \frac{x}{c^2}\right) = u$ und $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ ist,

$$du = \frac{\lambda u\,dx}{Bc^2 + x} + 4gc^2(b+x)\,dx = 0,$$

folglich, wenn man mit $(Bc^2 + x)^{-\lambda}$ multiplicirt und integrirt,

$$v^2 = \text{Const.}\,(Bc^2+x)^{\lambda-1} - \frac{4g\lambda}{(1-\lambda)(2-\lambda)}[(2-\lambda)b - Bc^2 + (1-\lambda)x].$$

Fing also die Bewegung an, als *Mm* in *Aa* war, und ist $BA = h$, so wird

$$\text{Const} = \frac{4\lambda g}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \left(\frac{(2-\lambda)b - Bc^2 + (1-\lambda)h}{(Bc^2+h)^{\lambda-1}}\right),$$

$$\text{also } v^2 = \frac{4\lambda g\,[(\lambda-2)b + Bc^2 + (\lambda-1)x]}{(\lambda-1)(\lambda-2)}$$
$$- \frac{4\lambda g\,[(\lambda-2)b + Bc^2 + (\lambda-1)h]}{(\lambda-1)\,.\,(\lambda-2)} \left(\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h}\right)^{\lambda-1},$$

oder

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{\lambda}{\lambda-2}\left\{\frac{[Bc^2+(\lambda-2)b]}{\lambda-1}\left(1-\left(\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h}\right)^{\lambda-1}\right)\right.$$
$$\left. + x - h\left(\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h}\right)^{\lambda-1}\right\}.$$

Die gröſste Geschwindigkeit, welche das ausflieſsende Wasser erlangt, ist, wie die Differentialgleichung ergibt, $v = 2\sqrt{\frac{g\lambda(b+x)}{\lambda-1}}$, und sie findet also Statt, wenn

$$x = -Bc^2 + \frac{(Bc^2+h)^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}}{[Bc^2+(\lambda-2)b+(\lambda-1)h]^{\frac{1}{\lambda-2}}}.$$

Für den Druck in einem unbestimmten Querschnitte $zv$ findet man aus §. 291.

$$2g(k-p)\left(B+\frac{x}{c^2}\right) = \left\{2gz - \tfrac{1}{2}v^2\left(1-\frac{f^4}{\omega^2}\right)\right\}\left(B+\frac{x}{c^2}\right)$$
$$- \left\{2g(b+x) - \tfrac{1}{2}v^2\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\right\}\int\frac{ds}{\omega},$$

$$\text{also } p = k - z + \frac{v^2}{4g}\left(1-\frac{f^4}{\omega^2}\right) + \frac{c^2\left\{b+x-\frac{(\lambda-1)v^2}{4\lambda g}\right\}\int\frac{ds}{\omega}}{Bc^2+x}.$$

298. Bei den Experimenten, welche man über das Ausfliefsen des Wassers aus Gefäfsen angestellt, ist gewöhnlich $c^2$ sehr viel gröfser, als $f^2$ oder $\lambda$ eine grofse Zahl; in diesen Fällen kann nun zwar die Bewegung nicht mehr als linearisch betrachtet werden, indefs können die eben gefundenen Formeln, als beinahe passend, auch hier angewandt werden, wenn man auf kleine Abweichungen des Resultats von der Wahrheit nicht sehen will. Nimmt man an, dafs $\lambda$ so grofs wird, dafs alle nicht in $\lambda$ multiplicirten Glieder der Differentialgleichnng

$$4\lambda g(b+x)\,dx = (\lambda - 1)v^2\,dx - 2(Bc^2+x)\,v\,dv$$

weggelassen werden dürfen, so hat man $v^2 = 4g(b+x)$, und die Höhe der Oberfläche über der Oefnung ist allemal mit der der Geschwindigkeit zugehörenden Höhe einerlei. In diesem Falle würde der Druck

$$p = k - z + (b+x)\left[1 - \frac{f^4}{\omega^2} + \frac{c^2}{\lambda}\int\frac{ds}{\omega}\right],$$

oder, weil $\lambda$ so sehr grofs ist,

$$p = k - z + (b+x)\left[1 - \frac{f^4}{\omega^2}\right].$$

Der Druck kann also in diesem Falle kleiner als $k$, und sogar negativ werden; denn wenn z. B. der Querschnitt $zv$ der Röhre $BboO$ der Oefnung gleich $\omega = f^2$ wäre, so würde $p = k - z = k - zP$, und also negativ, wenn die Höhe $zP$ gröfser als $k$ wäre. In einem solchen Falle, wo der Druck an irgend einer Stelle der Röhre negativ wird, würde die Wassermasse kein Continuum mehr bilden, und die Anwendbarkeit unsrer Formeln aufhören. Wird aber der Druck $p$ blos kleiner als $k$, so würde, wenn die Röhre an einer solchen Stelle eine Oefnung hätte, hier die Luft, oder, wenn an der Oefnung eine mit Wasser gefüllte offene Röhre wäre, das Wasser eindringen oder eingesogen werden; es würde alsdann das Ansehen haben, als ob die Röhre hier eine anziehende Kraft besäfse.

299. Die Formel $v^2 = 4g(b+x)$, für den Fall, da $\lambda$ als sehr grofs angenommen wird, scheint zu zeigen, dafs

das Wasser dann plötzlich seine gröſste Geschwindigkeit erreiche, obgleich die Bewegung von der Ruhe anfängt; eine genauere Entwickelung des Werthes von $\left[\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h}\right]^{\lambda-1}$ wird aber zeigen, daſs wirklich eine allmählige Beschleunigung Statt findet, die freilich nur sehr kurze Zeit dauert. Sobald die Bewegung anfängt, wird $x < h$, es sey also $\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h} = 1 - \frac{y}{\lambda-1}$, so wird $x = h - \frac{y(Bc^2+h)}{\lambda-1}$, und wenn $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist, beinahe $\left[1 - \frac{y}{\lambda-1}\right]^{\lambda-1} = e^{-y}$. Es wird also

$$v^2 = 4\lambda g \left\{\left[\frac{Bc^2+\lambda b}{\lambda^2}\right](1-e^{-y}) + \frac{x}{\lambda} - \frac{h}{\lambda}\cdot e^{-y}\right\}, \text{ oder}$$

$$v^2 = 4gb(1-e^{-y}) + 4g(x-h\cdot e^{-y}) = 4g(b+x) - 4g(b+h)e^{-y},$$

wenn man die mit $\lambda$ dividirten Glieder wegläſst. Diese Gleichung zeigt, daſs im ersten Augenblicke, wenn $x = h$ und $y = 0$ ist, auch $v = 0$ wird, sobald aber das Wasser nur um etwas weniges herabgesunken ist, so wird $e^{-y}$ schon sehr klein, weil $y$ schon beträchtlich groſs wird, wenn $x$ noch sehr klein ist, und die Geschwindigkeit erreicht daher sehr schnell ihren gröſsten Werth. Auch die Zeit, welche verflieſst, bis $v$ am gröſsten wird, läſst sich angeben, aber diese Untersuchung ist von keinem erheblichen Nutzen, daher ich nicht länger dabei verweile. Indeſs übersieht man, daſs die gröſste Geschwindigkeit desto später erreicht wird, je länger und zugleich enger der untere Theil der Röhre ist.

300. Da wir den Fall, wo $\lambda$ fast unendlich ist, betrachtet haben, so wollen wir jetzt noch untersuchen, wie die Formeln ausfallen, wenn $\lambda$ nur eine mäſsig groſse Zahl ist. Vorhin fanden wir

$$\frac{(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)v^2}{4\lambda g} = Bc^2 + (\lambda-2)b + (\lambda-1)x$$
$$- [Bc^2 + (\lambda-2)b + (\lambda-1)h]\left[\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h}\right]^{\lambda-1},$$

nun sey hier wieder $\frac{Bc^2+x}{Bc^2+h} = 1 - \frac{y}{\lambda - 1}$,

$$\text{also } y = \frac{(\lambda-1)(h-x)}{Bc^2+h},$$

und wenn man $\left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right)^{\lambda - 1} = Y$ setzt, so wird

$$\log. Y = (\lambda - 1) \log. \left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right) = -y - \frac{y^2}{2(\lambda-1)} - \frac{y^3}{3(\lambda-1)^2} - \frac{y^4}{4(\lambda-1)^3} - \text{etc.}$$

eine sehr convergirende Reihe, weil $\frac{y}{\lambda - 1}$ allemal ein Bruch $= \frac{h-x}{Bc^2+h}$ ist. Hat man hieraus den Werth von $Y$ gefunden, so findet man $v$ aus der Gleichung

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)v^2}{4g\lambda} = [Bc^2 + (\lambda-2)b + (\lambda-1)h](1-Y) - (Bc^2+h)y,$$

wo $y$ und $Y$ durch $x$ bekannt sind. Für die gröſste Geschwindigkeit hatten wir vorhin $\frac{(\lambda-1)v^2}{4\lambda g} = b + x$, also,

$$\text{weil hier } x = -Bc^2 + (Bc^2+h)\, Y^{\frac{1}{\lambda-1}},$$

$$\text{und } y = (\lambda-1)\left(1 - Y^{\frac{1}{\lambda-1}}\right)$$

ist, für die Lage der Oberfläche in dem Augenblick, wenn die Geschwindigkeit am gröſsten ist,

$$Y^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}} = \frac{Bc^2+h}{Bc^2+(\lambda-2)b+(\lambda-1)h},$$

oder, wenn man $\frac{Bc^2+(\lambda-2)b+(\lambda-1)h}{Bc^2+h} = E$ setzt,

$$Y^{\frac{1}{\lambda-1}} = E^{-\frac{1}{\lambda-2}} = e^{-\frac{1}{\lambda-2}\log. E}$$

$$= 1 - \frac{\log. E}{\lambda-1} + \frac{(\log. E)^2}{2(\lambda-1)^2} - \frac{(\log. E)^3}{6(\lambda-1)^3} + \text{etc.}$$

Aus der allgemeinen Gleichung für $v$

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)v^2}{4\lambda g}=(Bc^2+h)(E-EY-y)$$

würde man für die Zeit, welche jedem Werthe von $x$ entspricht, erhalten:

$$dt=\frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}=\frac{-Y^{\frac{2-\lambda}{\lambda-1}}\,.\,dY\,.\,\sqrt{(\lambda-2)(Bc^2+h)}}{\sqrt{2\left\{(\lambda-1)g\left(E-EY-(\lambda-1)\left[1-Y^{\frac{1}{\lambda-1}}\right]\right)\right\}}},$$

oder, wenn $Y=u^{\lambda-1}$,

$$dt=-\frac{du}{2}\,.\sqrt{\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(Bc^2+h)}{g\left(E-\lambda+1+(\lambda-1)u-Eu^{\lambda-1}\right)}\right)},$$

woraus man $t$ zu bestimmen suchen müſste. — Aber es ist Zeit, diese blos analytischen Untersuchungen zu endigen.

301. Diese Sätze enthalten beinahe alles, was man über den Ausfluſs des Wassers aus Röhren von jeder Form gewöhnlich vorzutragen pflegt; aber sie können in den meisten Fällen nur Resultate, welche einigermaſsen der Wahrheit nahe kommen, angeben, und man darf keine strenge Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwarten, weil die Voraussetzung einer wahrhaft linearischen Bewegung bei unsern Versuchen fast nie Statt findet. Denn sobald das Gefäſs sehr viel weiter ist, als die Ausfluſsöfnung, so sinket nicht mehr die ganze Schichte $zv$ (Fig. 54.) mit einerlei Geschwindigkeit, sondern die über der Oefnung liegenden Theilchen werden sich schneller bewegen, als die seitwärts liegenden. Auch die plötzliche Verengerung des Gefäſses ist unsern Voraussetzungen entgegen, wie schon vorhin erwähnt ist, und die Bewegung wird ganz anders beschaffen seyn, als die Voraussetzungen dieser ganzen Untersuchung verlangen. Man sollte es also keinesweges auffallend finden, daſs die Erfahrung nicht genau mit dieser noch unvollkommenen Theorie übereinstimmt, sondern muſs

sich vielmehr wundern, daſs die Abweichung nicht noch gröſser ist, als man sie wirklich findet.

Bei den Experimenten findet man auch einen Unterschied in der ausflieſsenden Wassermenge, je nachdem der Boden *OC*, in welchem sich die Oefnung befindet, sehr dünne, oder aber erheblich dick ist, oder der Ausfluſs durch eine kurze Ansatzröhre erfolgt. Ist die Oefnung nämlich in einem sehr dünnen Boden, so ist der Querschnitt des hervordringenden Strahls, nahe auſserhalb der Ausfluſsöfnung, beträchtlich kleiner, als diese, oder man bemerkt eine Zusammenziehung des Wasserstrahls, welche von der schiefen Richtung des an der Seite der Oefnung ausflieſsenden Wassers herrührt. Hierdurch wird die ausflieſsende Wassermenge geringer, als sie nach der Gröſse der Oefnung seyn sollte. Diese Zusammenziehung vermindert sich, wenn man an die Oefnung eine kleine cylindrische Röhre ansetzt, um so die schiefe Richtung des Ausflusses aufzuheben.

302. Problem 61. Wenn die Röhre, indem das Wasser durch die Oefnung *Oo* (Fig. 56.) ausflieſst, am andern Ende *Aa* beständig neuen Zufluſs erhält, und immer bis an *Aa* voll erhalten wird, die Bewegung des Wassers zu bestimmen, wenn es durch eine Kraft, welche auf *Aa* wirkt, fortgetrieben wird.

Auflösung. Die Weite der Oefnung *Oo* sey $= ff$, und $v$ die Geschwindigkeit, mit welcher am Ende der Zeit $t$ das Wasser ausflieſst; an einer andern Stelle $z$ aber sey der Querschnitt der Röhre $zv = \omega$, die Länge der Röhre von $A$ bis an diesen Punkt sey $Az = s$, die Höhe desselben über der bestimmten horizontalen Ebene sey $z\pi = z$, und $\alpha\pi\omega$ sey die Scale der Höhen. Setzt man nun den Druck in $zv, = p$, so gibt die allgemeine Gleichung

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 v^2}{2\omega^2} - \frac{f^2 dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega}.$$

Wenn also der Druck an der Oberfläche $Aa = L$, die Weite der Röhre in $Aa = c^2$, die Höhe $A\alpha = \alpha$ ist, so wird, weil hier $s = 0$ ist, $\int \frac{ds}{\omega} = 0$, $p = L$, $z = \alpha$, $\omega = c^2$, und folglich $2gL = \Delta : t - 2g\alpha - \frac{f^4 v^2}{2c^4}$.

Für die Ausflußöfnung $Oo$ sey der Druck $= k$ dem Drucke der Atmosphäre gleich; der Werth des Integrals $\int \frac{ds}{\omega}$ auf die ganze Röhre bis an $Oo$ erstreckt, sey $= B$, die Höhe $O\omega = \beta$, so ist, weil hier $\omega = ff$, $p = k$, $z = \beta$,

$$2gk = \Delta : t - 2g\beta - \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{f^2 B . dv}{dt}.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen $v$, denn, wenn man sie von einander subtrahirt, so wird

$$2g(L-k) = 2g(\beta-\alpha) + \tfrac{1}{2}v^2 \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{f^2 B dv}{dt},$$

folglich

$$2g dt (L - k - \beta + \alpha) = \tfrac{1}{2}v^2 dt \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + f^2 B dv,$$

woraus $v$ für jeden Zeitpunkt bestimmt werden kann, wenn $L$ eine gegebene Function von $t$ ist, denn alle übrigen Größen sind hier unveränderlich.

Nimmt man auch $L$ unveränderlich an, so beruht die Bestimmung von $v$ auf der Auflösung einer Gleichung von der Form $dt = \frac{A dv}{C \pm D v^2}$, und es ist

$$A = 2Bff, \quad C = 4g(L - k + \alpha - \beta), \quad \pm D = \frac{f^4}{c^4} - 1,$$

also gibt es drei verschiedene Fälle, je nachdem $f^2 = c^2$, oder $f^2 < c^2$, oder $f^2 > c^2$ ist.

I. Wenn $c^2 = f^2$ der Querschnitt der Röhre in $Aa$ der Oefnung $Oo$ gleich ist, so wird $D = 0$, also $t = \frac{Av}{c}$

oder $v = \frac{Ct}{A} + \text{Const.}$, und die Geschwindigkeit würde unaufhörlich zunehmen, wenn $C$ einen positiven Werth hat.

II. Die Voraussetzung $c^2 > f^2$ gibt $\frac{f^4 - c^4}{c^4}$ einen negativen Werth, und $dt = \frac{A\,dv}{C - Dv^2}$, woraus

$$t = \frac{A}{2\sqrt{CD}} \log. \frac{\sqrt{C} + v\sqrt{D}}{\sqrt{C} - v\sqrt{D}},$$

wo keine Constans hinzukommt, wenn für $t = o$ auch $v = o$ seyn soll. In diesem Falle wächst die Geschwindigkeit zwar, aber selbst nach unendlicher Zeit wird $v$ nie größer, als $\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{D}}$. Man hat nämlich

$$\sqrt{C} + v\sqrt{D} = (\sqrt{C} - v\sqrt{D}) \cdot e^{\frac{2t \cdot \sqrt{CD}}{A}};$$

$$\text{oder } v = \frac{\sqrt{C} \cdot \left[e^{\frac{2t \cdot \sqrt{CD}}{A}} - 1\right]}{\sqrt{D} \cdot \left[e^{\frac{2t \cdot \sqrt{CD}}{A}} + 1\right]};$$

welches $= \sqrt{\frac{C}{D}}$ wird, wenn $t$ unendlich ist.

III. Ist der Querschnitt $Aa$ kleiner als die Ausflußöfnung, so wird $dt = \frac{A\,dv}{C + Dv^2}$,

$$\text{also } t = \frac{A}{\sqrt{CD}} \text{Ang. tang.} \frac{v\sqrt{D}}{\sqrt{C}};$$

$$\text{oder } v = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{D}} \cdot \text{tang.} \frac{t \cdot \sqrt{CD}}{A};$$

wenn $v$ und $t$ zugleich verschwinden sollen; und hier ist es sehr auffallend, daſs $v$ schon nach Verlauf der Zeit $t = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot A}{\sqrt{CD}}$ unendlich wird.

Wenn nun $v$ bestimmt ist, so erhält man für den Druck in einem unbestimmten Querschnitte $zv$

$$2g(p-k) = 2g(\beta - z) + \tfrac{1}{2}v^2\left(1-\frac{f^4}{\omega^2}\right) + \frac{f^2\,dv}{dt}\left(B - \int\frac{ds}{\omega}\right),$$

oder, wenn man statt der Differentialformel $\frac{f^2\,dv}{dt}$ ihren Werth setzt:

$$4g(p-L+z-\alpha)\,.\,B = v^2\left(\frac{f^4}{c^4}-\frac{f^4}{\omega^2}\right)B + v^2\left(1-\frac{f^4}{c^4}\right)\int\frac{ds}{\omega}$$
$$-4g(L-k+\alpha-\beta)\int\frac{ds}{\omega}.$$

303. Wenn die Bewegung zur Gleichförmigkeit gelangt ist, so wird, weil $dv = 0$,

$$v^2\left(1-\frac{f^4}{c^4}\right) = 4g(L-k+\alpha-\beta),$$

also bleibt, wenn $c^2 = f^2$, eben so, wie im vorigen Abschnitte, $v$ unbestimmt, und $L$ muſs $= k+\beta-\alpha$ seyn. Ist die Oefnung $Oo$ kleiner als die Oberfläche $Aa$, so wird für die gleichförmige Bewegung

$$v^2 = \frac{4gc^4(L-k+\alpha-\beta)}{c^4-f^4},$$

und diese Gleichung erhält nur dann einen möglichen Werth, wenn $L > k-\alpha+\beta$ ist, und die Geschwindigkeit selbst wird aus dem Unterschiede dieser beiden Gröſsen bestimmt. Wenn aber endlich die Oefnung $Oo$ gröſser ist, als der Querschnitt $Aa$, so würde für die gleichförmige Bewegung $v^2 = \frac{4gc^4(k+\beta-\alpha-L)}{f^4-c^4}$, und es müſste nothwendig $L < k+\beta-\alpha$ seyn, weil sonst $v$ einen unmöglichen Werth erhielte.

304. Diese blos analytischen Folgerungen scheinen sehr paradox, vorzüglich was §. 302. III. zeigte, daſs eine endliche Kraft $L$ in einer endlichen Zeit eine unendlich groſse Geschwindigkeit hervorbringe. Aber die scheinbare

Ungereimtheit verschwindet, wenn wir die Hypothese, welche der Auflösung dieses Problems zum Grunde liegt, näher betrachten. Wir nahmen nämlich an, daſs, während das Wasser durch *Aa* fortgetrieben wird, fortdauernd anders woher neues Wasser mit eben der Geschwindigkeit einflieſse, und bekümmerten uns nicht darum, wo dies Wasser herkomme, und welche Kraft ihm seine Geschwindigkeit ertheile; denn diese Kraft ist von derjenigen, welche wir mit *L* bezeichneten, ganz verschieden, indem die Kraft *L* blos darauf verwandt wird, das schon eingetretene Wasser fortzutreiben. Die Kraft *L* beschleunigt also die Bewegung des schon in die Röhre eingetretenen Wassers, und folglich wächst auch die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bei *Oo* ausflieſst; je mehr aber die Geschwindigkeit des Ausflusses wächst, mit desto gröſserer Geschwindigkeit muſs auch das zuflieſsende Wasser herbeigeführt werden, und die Schnelligkeit kann ins Unendliche zunehmen. Wenn also die Rechnung angibt, daſs die Geschwindigkeit selbst in einer bestimmten Zeit unendlich werden kann, so ist dieses nicht Wirkung der endlichen Kraft *L*, welche das schon in die Röhre eingetretene Wasser forttreibt, sondern es ist die Wirkung jener unbekannten Kraft, welche das Wasser mit unendlicher Geschwindigkeit der Röhre bei *Aa* zuführt, und welche also, um dies zu bewirken, selbst unendlich seyn müſste. Eben dieser Ursache ist auch das zweite Paradoxon zuzuschreiben, daſs nämlich die Geschwindigkeit des ausflieſsenden Wassers im Probleme nicht aus der Kraft *L* bestimmt wird, sondern die beständige Gröſse, welche bei der Integration hinzukommt, willkürlich bleibt, und erst daraus, daſs man für einen gewissen Zeitpunkt die Geschwindigkeit als gegeben annimmt, bestimmt wird. Denn es ist einleuchtend, daſs, je schneller und häufiger das Wasser von jener fremden Kraft herbeigeführt wird, desto schneller wird auch die Kraft *L* es forttreiben, und weil wir jene fremde Kraft nicht in Erwägung gezogen haben, so ist es kein Wunder, daſs die Rechnung auf offenbare Ungereimtheiten führen

mufste, welche bei genauerer Betrachtung der Sache von selbst wegfallen.

305. Der einzige Gebrauch, der sich von den eben gefundenen Formeln machen läfst, ist die Anwendung auf ein Gefäfs, dessen Weite in der Oberfläche *Aa* sehr grofs gegen die Weite der Oefnung *Oo* ist. Auch hier freilich darf man nicht vergessen, dafs wir mit Unrecht die Gesetze der linearischen Bewegung auf ein Gefäfs von ungeheurer Weite anwenden, und dafs doch selbst bei der gröfsten Weite des Gefäfses dieselbe Höhe ohne einen fremden Zuflufs nicht erhalten werden kann. Indefs, wenn $\frac{c^2}{f^2}$ sehr grofs ist, so dafs man $1 - \frac{f^4}{c^4} = 1$ setzen darf, so wird, wenn $L = k$ ist, für die ersten Augenblicke der Bewegung, ehe die Oberfläche *Aa* merklich sinkt,

$$v^2 = 4g(\alpha - \beta),$$

oder die Geschwindigkeit gehört der senkrechten Höhe der Oberfläche *Aa* über der Ausflufsöfnung zu; ist aber $c^2$ nicht unendlich gegen $f^2$, so mufs nothwendig bei *Aa* neues Wasser zufliefsen, und es nähert sich die Geschwindigkeit des Ausflusses sehr schnell dem Werthe

$$v = \sqrt{4g \cdot \frac{c^4(\alpha - \beta)}{c^4 - f^4}},$$

das Wasser mufs also bei *Aa* mit der Geschwindigkeit

$$= 2f^2 \cdot \sqrt{\frac{g(\alpha - \beta)}{c^4 - f^4}}$$

einfliefsen, und der Unterschied der Höhen, welche der Geschwindigkeit des Einflusses bei *Aa* und des Ausflusses bei *Oo* entsprechen, ist auch jetzt noch

$$= \frac{(\alpha - \beta) \cdot c^4}{c^4 - f^4} - \frac{(\alpha - \beta) f^4}{c^4 - f^4} = \alpha - \beta.$$

306. Anmerkung. Die vorhergehenden Sätze (§. 290 ff.), welche die Grundformeln für die linearische

Bewegung flüssiger Körper, wenn dieselben aus dem Gefäfse ausfliefsen, enthalten, haben sehr häufigen Widerspruch gefunden, und sind von mehr als einem Schriftsteller, als der Erfahrung widersprechend, als die schreiendsten Ungereimtheiten, und als Behauptungen, welche die Anwendung der Analysis auf diese Lehren verdächtig machten, aufgestellt worden. Dafs diese Vorwürfe nur in sofern gegründet sind, als sie die Unzulässigkeit der Voraussetzungen des letzten Problems betreffen, wird im Vorigen wohl deutlich genug dargethan seyn: sie treffen die Formeln für den Ausfluſs des Wassers aus einem Gefäſse, das sich ausleert, gar nicht, und wenn z. B. Baader in seiner Theorie der Saug- und Hebepumpen, Vorrede, S. XVII. auch diesen dieselben irrigen Voraussetzungen zur Last legt, so ist dieses wirklich ein Irrthum. Ich führe diesen Schriftsteller hier an, weil es mir hier der Ort zu seyn scheint, die eignen Bemühungen desselben, eine der Erfahrung besser entsprechende Grundformel für das Ausfliefsen des Wassers aus Gefäfsen zu finden, zu erwähnen und zu beurtheilen. Dafs es vielleicht möglich wäre, eine Formel anzugeben, welche mit den Versuchen näher übereinstimmte, als die von Euler und andern Schriftstellern erwiesenen, läfst sich einsehen; denn diese Formeln beruhen auf der Voraussetzung einer linearischen Bewegung, die bei unsern Versuchen und bei unsern Maschinen nicht im strengsten Sinne Statt findet. Diese Eulerschen Formeln können also nur als Annäherung zur Wahrheit gelten, sobald man sie auf weitere Gefäfse anwendet, und für mehr gab Euler selbst sie nicht aus (§. 301.); ob Hrn. Baaders Formel mehr leistet, müfste durch Versuche entschieden werden, die theoretischen Gründe, worauf sie beruht, berechtigen nicht zu dieser Hofnung. Hrn. Baaders Schlüsse lassen sich kurz so darstellen:

1. *ABCD* (Fig. 56 *b.*) sey ein hohler, oben dicht verschlossener Cylinder, dessen oberhalb der beweglichen Scheibe *mn* liegender Theil ganz mit Wasser gefüllt ist.

Diese Scheibe selbst schliefse wasserdicht an die innere Oberfläche des Cylinders, und eine äufsere Kraft unterstütze sie gegen den Druck von oben; das Gewicht der Scheibe selbst und die Friction an der Fläche des Cylinders ziehen wir nicht in Betrachtung.

2. Auf den Deckel des Cylinders drücke ein Gewicht $= Q$, das Gewicht der Wassermasse über der Scheibe sey $= Ah$, nämlich ihre Grundfläche $= A$, ihre Höhe $= h$, Dichtigkeit $= 1$, so mufs die Kraft $P$, welche die Scheibe unterstützt, $P = Q + Ah$ seyn, und vermöge dieses Druckes auf $mn$ leidet die untere Fläche des Deckels $AD$, oder die oberste Wasserschichte $AD$, einen Druck $Q$. Dieser Druck $Q$ sey dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= x$ auf der Basis $A$ gleich, oder $Q = Ax$.

3. Nun stelle man sich vor, dafs im obern Deckel plötzlich eine kleine Oefnung gemacht würde, so wird aus dieser ein Wasserstrahl herausfahren, mit einer Geschwindigkeit, welche sehr bald nach dem Anfange der Bewegung gleichförmig werden und der Höhe $= x$ zugehören wird; heifst diese Geschwindigkeit für den Beharrungsstand $= v$, so wird $v = 2\sqrt{gx}$ seyn. Die Gröfse dieser Oefnung sey $= a$.

4. Während die Wassermasse $AmnD$ sich so durch den Ausflufs vermindert, sinkt der ganze Cylinder $ABCD$ herab, mit einer Geschwindigkeit $c = \frac{v \cdot a}{A}$, und die Kraft $Q$ bringt nun eine doppelte Wirkung hervor, oder hat einen doppelten Widerstand zu überwinden, nämlich die Reaction des Wasserstrahls auf die Fläche der Oefnung $= a$, und die Reaction der geprefsten Wassermasse auf die verminderte Bodenfläche $= A - a$.

5. Die letztere würde im Stande der Ruhe $= x(A - a)$ seyn; allein da die Fläche $AD$ den mit der Geschwindigkeit $= v$ beständig anprellenden Wassertheilchen (?) noch mit ihrer eignen Geschwindigkeit $= c$ entgegengedrückt

wird, so ist die eigentliche Höhe des Drucks, welchen sie während der Bewegung leidet, $= x + \frac{c^2}{4g}$ *), folglich die Reaction der gepreſsten Bodenfläche

$$= (A - a)\left[x + \frac{c^2}{4g}\right],$$

und, weil die Reaction des ausfahrenden Wasserstrahls auf die Oefnung $a$, $= ax$ ist,

$$Q = ax + (A - a)\left[x + \frac{c^2}{4g}\right],$$

$$\text{oder } Q = \frac{v^2}{4g}\left[A + \frac{a^2}{A} - \frac{a^3}{A^2}\right],$$

eine Gleichung, welche die Geschwindigkeit des ausfahrenden Wasserstrahls durch das Gewicht $Q$, welches den Cylinder gegen die unbewegliche Scheibe $mn$ niedertreibt, bestimmt.

6. Die Scheibe $mn$ leidet also während der Bewegung den Druck

$$P = Ah + \frac{v^2}{4g}\left[A + \frac{a^2}{A} - \frac{a^3}{A^2}\right],$$

und da es in Rücksicht auf die verschiedenen Pressungen, folglich auch auf die Geschwindigkeit $v$ einerlei ist, ob der Cylinder gegen die unbewegliche Scheibe herabsinkt, oder diese mit derselben Geschwindigkeit $= c$ in dem unbeweglich befestigten Cylinder aufwärts gedrückt wird, so bleibt auch im letztern Falle noch der Druck auf $mn$

$$= P = Ah + \frac{v^2}{4g}\left[A + \frac{a^2}{A} - \frac{a^3}{A^2}\right].$$

7. In Rücksicht der Reaction des ausflieſsenden Wasserstrahls ist es einerlei, ob der Strahl aufwärts springt,

---

*) Eigentlich doch wohl $= \frac{(v + c)^2}{4g}$, da die relative Geschwindigkeit $= (v + c)$ ist.

oder niederwärts fliefst. Der Werth von $ax$ (Fig. 56 c.) und die davon mit abhängende Reaction auf die verminderte Bodenfläche bleiben also dieselben, wenn der Cylinder umgekehrt ist, die Scheibe mit der Geschwindigkeit $= c$ darin niedergedrückt wird, und das Wasser mit der Geschwindigkeit $= v$ ausströmt. Hier aber hat die Scheibe das Gewicht der Wassermasse $= Ah$ nicht mehr zu tragen, sondern dieses vereinigt sich mit der auf d[illegible] Scheibe drückenden Kraft zur Ueberwindung des Widerstandes, so dafs man also nun

$$P + Ah = \frac{v^2}{4g}\left[A + \frac{a^2}{A} - \frac{a^3}{A^2}\right],$$

hat, oder, wenn auf die Oberfläche gar keine äufsere Kraft drückt, $P = 0$, und

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{h}{1 + \frac{a^2}{A^2} - \frac{a^3}{A^3}}$$

für die Bewegung des aus einem Gefäfse frei ausfliefsenden Wassers.

Dieses sind Baaders Schlüsse. Dafs in denselben (No. 3.) schon vorläufig angenommen wird, dafs der Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe $= x$ zugehört, hervorspringe, erweckt schon kein gutes Vorurtheil, denn dieses ist es ja eben, was erst bestimmt werden soll; indefs könnte man das, als bei kleinen Oefnungen aus der Erfahrung angenommen, oder als erste Annäherung, die nachher berichtigt wird, gelten lassen. Aber diese Geschwindigkeit $= v$ ist doch offenbar die relative Geschwindigkeit gegen die Bodenfläche $AD$, und wenn die Bodenfläche sich selbst mit der Geschwindigkeit $= c$ senkt, so kann die absolute Geschwindigkeit der Theilchen des Wasserstrahls in der Oefnung keine andre, als $= v - c$ seyn: es ist also nicht richtig, wenn (No. 5.) die relative Geschwindigkeit des Cylinders gegen die aus der Oefnung hervorspringenden Wassertheilchen $= v + c$ gesetzt wird, sondern diese ist nur $= v$. Dann aber ist die Reaction der

verminderten Bodenfläche nur noch $= x(A - a)$, und wenn man Baaders Schlüssen weiter folgt,

$$Q = ax + x(A - a) = Ax,$$

genau so, wie es beim Anfange der Rechnung angenommen ward (No. 2.), folglich auch in No. 7. $Ah = Ax$, oder $\frac{v^2}{4g} = h$, der petitio principii des Satzes (No. 3.) gemäfs.

Als gründlich bewiesen kann also Baaders Formel nicht gelten; bestätigt es sich aber, dafs sie der Erfahrung ziemlich nahe, und besser entspricht, als die theoretisch gefundene Formel, so könnten immer die auf sie, als auf Erfahrung gebauten Folgerungen ihren Werth haben.

Auch Bernard hat eine Formel für die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Wassers gegeben, die aber, wie unter andern auch Baader bemerkt, nicht der Erfahrung entspricht; ich halte mich daher bei dieser nicht auf. — Auf theoretischem Wege eine passendere Formel zu finden, als die oben von Euler angegebene (welche auch mit den von den beiden Bernoulli und D'Alembert von jedem auf einem verschiedenen Wege gefundenen Formeln übereinstimmt), darf man sich wohl nicht eher Hofnung machen, als bis man die ganze Untersuchung in gröfserer Allgemeinheit, nicht beschränkt durch die Voraussetzung einer linearischen Bewegung, anstellen kann, und auch dann noch werden die theoretisch gefundenen Formeln mancher Correctionen bedürfen, weil der Widerstand, welchen die Bewegung des Wassers an den Wänden des Gefäfses leidet, selbst auch der Einflufs der unvollkommenen Fluidität des Wassers sich wohl noch lange der theoretischen Betrachtung entziehen werden. — Ich kehre jetzt zu den Untersuchungen des vorigen §. zurück.

307. Wir nahmen im letzten Probleme eine unveränderliche Kraft $L$ an, welche auf die Oberfläche des Wassers einen immer gleichen Druck ausübte, die Bewegung desselben mogte schnell oder langsam seyn; aber bei unsern

Maschinen, welche das Wasser forttreiben, ist die Wirkung der angewandten Kraft nicht so beschaffen, sondern diese wirken immer desto schwächer, je schneller das Wasser in der Röhre sich fortbewegt. Ich habe schon im vorigen Abschnitte angeführt, wie die Wirkung dieser Kräfte von der Geschwindigkeit abhängt, und wiederhole für den jetzigen Zweck nur, daſs man eine gewisse Kraft $F$ anwendet, welche mit der Geschwindigkeit $= c$ wirkt, und daſs alles darauf ankommt, die Einrichtung der Maschine zu bestimmen, um das Wasser durch jene mit bestimmter Geschwindigkeit wirkende Kraft in der Röhre gleichförmig fortzutreiben.

308. Problem 62. Wenn das Wasser durch eine Röhre $AaoO$ (Fig. 49.), deren Weite nicht allenthalben gleich ist, auf die gegebene Höhe $O\omega = a$ mit gleichförmiger Bewegung durch eine Kraft $F$, die mit der Geschwindigkeit $= e$ wirkt, erhoben werden soll, die Einrichtung der Maschine anzugeben, wodurch man diesen Effect erhalten kann, und die in gegebener Zeit erhobene Wassermasse zu bestimmen.

Auflösung. Die Wirkung der Maschine besteht blos darin, daſs sie die Kraft an einen andern Ort überträgt, und in gewissem Verhältnisse vermehrt oder vermindert. Wenn also die Maschine bewirkt, daſs die Kraft, welche das Wasser durch die untere Oefnung $Aa$ treibt, $= nF$ sey, so wirket diese, nach der Natur der Maschine, hier mit der Geschwindigkeit $= \frac{e}{n}$, und die Einrichtung der Maschine hängt blos von der Zahl $n$ ab, welche also bestimmt werden muſs. Weil die Weite der Röhre in $Aa$ $= cc$ ist, so wird die Höhe, welche den durch die Kraft $n.F$ bewirkten Druck abmiſst, $= \frac{n.F}{cc}$, und diesem Drucke kommt noch der Druck der Atmosphäre zu Hülfe; daher wird der im vorigen Probleme mit $L$ bezeichnete Druck

hier $= L = \frac{nF}{c^2} + k$, und das Wasser wird mit der Geschwindigkeit $= \frac{e}{n}$ durch die Oefnung $Aa$ getrieben. Man erhält also für die Geschwindigkeit des bei $Oo$ ausfließenden Wassers $v = \frac{c^2 e}{n f^2}$, weil die Gröſse der Oefnung $Oo = ff$ ist, zugleich ist $dv = 0$. Die Höhe der Ausfluſsöfnung $Oo$ über $Aa$, welche vorhin $\beta - \alpha$ hieſs, ist hier $= a$, und folglich jetzt

$$4g\left(\frac{nF}{c^2} - a\right) - \frac{c^4 e^2}{n^2 f^4}\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 0,$$

$$\text{oder } 4gn^2\left(\frac{nF}{c^{24}} - a\right) = e^2\left(\frac{c^4}{f^4} - 1\right),$$

woraus sich $n$, mithin die Einrichtung der Maschine bestimmen läſst. Damit aber die Bewegung so fortdaure, muſs bei $Aa$ in jeder Secunde eine Quantität Wasser, welche $= \frac{c^2 e}{n}$ ist, mit der Geschwindigkeit $= \frac{e}{n}$ zuflieſsen; und dann wird auch die bei $Oo$ ausflieſsende Wassermenge $= \frac{c^2 e}{n}$ in jeder Secunde seyn.

Um einen allgemeinen Ausdruck für den Druck $p$ in irgend einem Querschnitte $zv$ zu finden, sey die Länge der Röhre bis dahin $Az = s$, die Höhe des Punktes $z = z$, der Querschnitt $zv = \omega$, so ist

$$p = k + a - z + \frac{c^4 e^2}{4gn^2 f^4}\left(1 - \frac{f^4}{\omega^2}\right),$$

oder, wenn man für $\frac{c^2 e}{n f^2}$ seinen Werth setzt,

$$p = k - z + \frac{af^4\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{c^4}\right) + \frac{nF}{c^2}\left(1 - \frac{f^4}{\omega^2}\right)}{1 - \frac{f^4}{c^4}}.$$

309. Wenn beide Oefnungen *Aa* und *Oo* gleich groſs sind, $c^2 = f^2$, so gibt die Gleichung des vorigen §. $\frac{nF}{c^2} - a = 0$, also $n = \frac{c^2 a}{F}$. Die in jeder Secunde ausgegossene Wassermenge wird nun $= \frac{Fe}{a}$, und eben so viel muſs immer mit der Geschwindigkeit $= \frac{Fe}{ac^2}$ in die Oefnung *Aa* einflieſsen, und von einer andern Kraft, auf welche wir hier nicht Rücksicht nehmen, herbeigeführt werden.

Wenn hingegen $c^2 > f^2$, so wird auch $\frac{n}{c^2} > \frac{a}{F}$, also wird weniger Wasser in derselben Zeit erhoben; dafür aber braucht auch die Kraft, welche das Wasser der Oefnung *Aa* zuführt, und ihm die nöthige Geschwindigkeit (welche jetzt kleiner, als $\frac{Fe}{ac^2}$ ist) ertheilt, nicht so groſs zu seyn, als wenn beide Oefnungen gleich groſs sind. Der umgekehrte Fall tritt ein, wenn die Ausfluſsöfnung gröſser als *Aa*, $c^2 < ff$ ist; dann wird das Volumen des in jeder Secunde erhobenen Wassers $> \frac{Fe}{a}$, es wird also mehr Wasser gehoben, als im ersten Falle, aber es muſs auch desto mehr Wasser und desto schneller bei *Aa* zuflieſsen, also die von uns nicht in Betrachtung gezogene Kraft, welche dieses bewirkt, desto gröſser seyn.

310. Nach den bisherigen Erläuterungen wird man diese Verschiedenheit der durch dieselbe Kraft erhobenen Wassermenge nicht mehr auffallend finden. Denn wenn wir die ganze Wirkung mit der gesammten wirkenden Kraft vergleichen wollen, so müssen wir auch diejenige Kraft, welche das Wasser der Oefnung *Aa* zuführt, mit in Betrachtung ziehen, und wenn dieses geschieht, so findet man immer die Summe der wirkenden Kräfte der hervorgebrachten Wirkung gemäſs. Weil aber in den Fällen, wo

Wasser durch Maschinen erhoben wird, eben die Kraft, welche das Wasser durch die Röhre forttreibt, auch selbst der Röhre das Wasser zuführen mufs, so werde ich die Erhebung des Wassers durch Saug- und Druckwerke im folgenden Abschnitte noch näher betrachten.

---

## Vierter Abschnitt.

### *Von der Erhebung des Wassers durch Saug- und Druckwerke.*

---

311. Problem 63. Wenn eine cylindrische Röhre $BbcC$ (Fig. 57.), an welche unten eine sich sehr erweiternde Röhre angesetzt ist, in ruhendem Wasser $Ee$ steht, und der Kolben $POo$ in derselben mit bestimmter Kraft hinaufgezogen wird, die durch den Druck der Luft auf $Ee$ bewirkte Bewegung des in der Röhre aufsteigenden, dem Kolben folgenden Wassers zu bestimmen.

Auflösung. Nach Verlauf der Zeit $= t$ sey der Kolben bis $Oo$ erhoben, und das Wasser bis an seine Grundfläche zur Höhe $CO = x$ gestiegen; der Querschnitt der Röhre sey $= ff$, die Geschwindigkeit des Kolbens und des demselben immer folgenden Wassers $= v$; die Kraft, welche den Kolben hebt, $= ff \cdot u$, der Druck auf die Oberfläche $Oo = \Pi$. Dieser Druck würde, wenn keine Bewegung Statt fände, wegen des Druckes der Atmosphäre $= k$ auf den Kolben, $= k - u$ seyn; wegen der Bewegung aber erhält er einen andern Werth, und $\Pi$ mufs also noch bestimmt werden. Dagegen ist der Druck, welcher in irgend einem Querschnitte $Aa$ der untern weitern Röhre Statt findet, bekannt, denn wenn die Tiefe des Punktes $A$

unter der Oberfläche des Wassers $Ee$, $C\alpha = \alpha$ ist, so ist hier der Druck $= k + \alpha$, und wir können nun die Gleichungen des 302. §. anwenden, wenn wir dort $L = k + \alpha$, $\alpha = -\alpha$, $\beta = x$, $k = \Pi$ setzen, und weil $c^2$ oder der Querschnitt $Aa$ als sehr grofs angenommen wird, $B = \frac{x}{f^2}$ annehmen. Alsdann wird

$$L - k + \alpha - \beta = k - \Pi - x$$

$$\text{und } 4g\,dt\,(k - \Pi - x) - v^2\,dt = 2x\,dv,$$

aber $dx$ ist der Raum, welchen das Wasser im Zeitraume $dt$ mit der Geschwindigkeit $v$ durchläuft, also $dx = v\,dt$, folglich $2xv\,dv + v^2\,dx = 4g\,dx\,(k - \Pi - x)$

$$\text{und } v^2 x = 4g\int (k - \Pi - x)\,dx,$$

$$\text{oder } v^2 x = 4g\,(xk - \tfrac{1}{2}x^2 - \int \Pi\,dx),$$

wo also nur noch $\Pi$ bestimmt werden mufs, dessen Werth sich aus andern Datis für die Bewegung des Kolbens herleiten läfst.

Es sey nämlich des ganzen Kolbens Masse einer Wassermasse gleich, deren Volumen und Gewicht $= f^2 . h$; die Friction des Kolbens, welche seine Bewegung sehr aufhält, sey $= \delta . f^2 h$; die Kraft, welche den Kolben aufwärts treibt, ist nach den im Vorigen angenommenen Bezeichnungen $= f^2\,(\Pi + u - k)$, weil nämlich der Druck $\Pi$ sich mit der Kraft $ff . u$ vereinigt, der Druck der Atmosphäre aber entgegen wirkt; diese bewegende Kraft wird durch das Gewicht und die Reibung des Kolbens $= (1 + \delta)\,f^2 h$ vermindert, sie bleibt also $= ff\,[\Pi + u - k - (1 + \delta)\,h]$, und folglich ist die auf den Kolben wirkende beschleunigende Kraft $= \frac{\Pi + u - k - (1 + \delta)\,h}{h}$.

Nun durchläuft der Kolben mit der Geschwindigkeit $= v$ in der Zeit $dt$ den Raum $dx$, und die Beschleunigung seiner Bewegung $\frac{dv}{dt}$ ist $= \frac{v\,dv}{dx}$; diese aber wird durch

die auf den Kolben wirkende beschleunigende Kraft bestimmt, und es ist also nach bekannten Gründen

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{2g}{h}\,[\Pi + u - k - (1 + \delta)\,h],$$

welche, mit $2\,h\,dx$ multiplicirt und integrirt, gibt

$$h v^2 = 4g\,[\int \Pi\, dx + \int u\, dx - kx - (1 + \delta)\,hx].$$

Aus der ersten Bestimmung für $v$ fanden wir

$$x v^2 = 4g\,(kx - \tfrac{1}{2}x^2 - \int \Pi\, dx),$$

und die Summe beider Gleichungen

$$(h + x)\,v^2 = 4g\,[\int u\, dx - (1 + \delta)\,hx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

bestimmt die Geschwindigkeit $v$ für jede Höhe $x$, da sie das unbekannte $\Pi$ nicht mehr enthält.

Um $\Pi$ selbst aber zu bestimmen, braucht man nur die beiden Werthe von $v^2$ mit einander zu vergleichen und $v^2$ zu eliminiren: man findet dann

$$\int \Pi\, dx = kx + \frac{(\tfrac{1}{2} + \delta)\,hx^2}{h + x} - \frac{x \int u\, dx}{h + x},$$

also aus dem Differential derselben

$$\Pi = k + \frac{(\tfrac{1}{2} + \delta)\,h\,(2hx + x^2)}{(h + x)^2} - \frac{ux}{h + x} - \frac{h \int u\, dx}{(h + x)^2}.$$

Diesen Werth von $\Pi$ muſs man deswegen kennen, weil, wenn er negativ wird, das Wasser dem Kolben nicht mehr unmittelbar folgt, sondern einen leeren Raum unter demselben läſst, wo dann auch die Anwendbarkeit der Formeln aufhört.

312. Da $v^2 = 4g \left[\frac{\int u\, dx - (1 + \delta)\,hx - \tfrac{1}{2}x^2}{h + x}\right]$ ist, so kann keine Bewegung entstehen, wenn nicht diese Gröſse positiv ist; im Anfange der Bewegung also, da $x = 0$, muſs $u > (1 + \delta)\,h$ seyn, nachher aber, weil $x$ wächst, muſs die Kraft $u$ immer gröſser werden, wenn die Bewegung fortdauern soll.

313. Wenn die hebende Kraft $u$ unveränderlich ist, so wird $v^2 = 4gx\,\frac{[u - (1 + \delta)\,h - \tfrac{1}{2}x]}{h + x}$, und diese Gleichung

zeigt, dafs die Geschwindigkeit, welche anfangs mit $x$ wuchs, nachher wieder abnimmt, und verschwindet, wenn $x = 2u - 2(1+\delta)h$ ist; alsdann aber wird der Druck des Wassers gegen den Kolben

$$\Pi = k + (\tfrac{1}{2}+\delta)h - u + \frac{h^2}{4[u - (\frac{1}{2}+\delta)h]},$$

und bis dahin wird das Wasser dem Kolben folgen, wenn dieser Werth von $\Pi$ noch positiv ist.

Um also zu sehen, wie hoch man das Wasser heben kann, will ich diesen Druck $= 0$ setzen, und, um abzukürzen, $u - (\frac{1}{2}+\delta)h = r$, dann wird $4kr - 4r^2 + h^2 = 0$,

$$\text{also } r = \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + k^2)},$$

$$u = (\tfrac{1}{2} + \delta)h + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + k^2)},$$

und die Höhe, bis zu welcher durch diese Kraft das Wasser gehoben werden kann,

$$x = k - h + \sqrt{(h^2 + k^2)}.$$

Das Wasser wird also desto höher gehoben, je kleiner die Masse des Kolbens ist, und wäre diese $= 0$, also $h = 0$, so könnte die Höhe $= 2k$ werden, wie auch die sehr ähnliche Betrachtung des §. 268 *b.* ergibt.

Die Friction ändert diese Höhe nicht.

314. Dafs unten an die Röhre $BbcC$ ein sehr viel weiteres Stück $ACca$ angefügt ist, habe ich blos deswegen vorausgesetzt, damit man nicht nöthig hat, anzunehmen, das in die Röhre tretende Wasser erlange plötzlich eine endliche Geschwindigkeit, da es vorher ganz in Ruhe war. Da aber diese Voraussetzung auf die Rechnung keinen Einflufs hat, so ist es klar, dafs die Erhebung des Wassers eben so geschehen werde, wenn auch die Röhre ganz cylindrisch und in stillstehendes Wasser eingetaucht ist. Aber auch in diesem Falle erlangt das bei $Cc$ eintretende Wasser nicht plötzlich eine endliche Geschwindigkeit, sondern in dem aufserhalb der Oefnung $Cc$ befindlichen Wasser wird eine ähnliche Bewegung entstehen, als ob ein solcher weiterer Theil $ACca$ an die Röhre angesetzt wäre.

Nothwendig aber war es, auch auf die Bewegung des Kolbens, auf seine Trägheit und Friction Rücksicht zu nehmen, weil auf die Ueberwindung dieser Hindernisse der Bewegung ein beträchtlicher Theil der wirkenden Kräfte verwandt wird, welches besonders beim Anfange der Bewegung einen erheblichen Einfluſs hat. Denn wenn des Kolbens Masse und Friction bei Seite gesetzt, also $h = o$ wird, so hat man $v^2 = \frac{4g(\int u\,dx - \frac{1}{2}x^2)}{x}$, oder, wenn $u$ eine unveränderliche Kraft ist, $v^2 = 4g\,(u - \frac{1}{2}x)$, folglich für $x = o$, $v^2 = 4gu$; das Wasser würde also gleich im ersten Augenblicke eine endliche Geschwindigkeit erlangen, statt daſs nach den vorigen Formeln die Geschwindigkeit allmählig wächst. Aber der Fall, daſs $h = o$ gesetzt werden kann, kommt nie vor.

315. Ein solcher mit einem Kolben versehener Cylinder, in welchem bei der Erhebung des Kolbens das Wasser durch den Druck der Atmosphäre hineingetrieben wird, heiſst ein Saugwerk. — Daſs blos der Druck der Atmosphäre das Wasser hier in der Röhre hinauftreibt, ist offenbar, obgleich derselbe in der Formel für $v$ nicht vorkommt; denn das Wasser kann dem Kolben nur dann folgen, wenn der Druck $\Pi$, welchen es gegen den Kolben ausübt, positiv ist. Aber für $k = o$, oder wenn der Druck der Atmosphäre nicht da wäre, wird gleich anfangs, wenn $x = o$ ist, auch $\Pi = o$, das Wasser würde also gar nicht anfangen zu steigen, und die ganze Bewegung nicht Statt finden. Unsre Rechnung zeigt übrigens, daſs das Wasser weit höher gehoben werden kann, als die Höhe $k$ beträgt, ja daſs die Höhe $x$ fast doppelt so groſs, als $k$ werden kann, wenn $h$ sehr klein und $u$ groſs genug ist. Wenn nämlich (§. 313.) die Kraft

$$u = (\tfrac{1}{2} + \delta)\,h + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + k^2)}$$

ist, so kann das Wasser bis zur Höhe $= k - h + \sqrt{(h^2 + k^2)}$ gehoben werden, und in jeder geringern Höhe $= x$ ist für die Geschwindigkeit $= v$

$$v^2 = \frac{2gx\,[k - h - x + \sqrt{(h^2 + k^2)}]}{h + x},$$

die Geschwindigkeit wird also am gröfsten, wenn

$$x = -h + \sqrt{[hk + h\sqrt{(h^2 + k^2)}]},$$

und alsdann ist

$$v = [-h + \sqrt{(hk + h)}\sqrt{(h^2 + k^2)}]\sqrt{\frac{2g}{h}}.$$

Aber der Fall, dafs die Höhe $x$ gröfser als $k$ wird, tritt beim wirklichen Gebrauche der Pumpen nicht ein; denn gewöhnlich wird das Wasser, nachdem es auf die bisher betrachtete Weise gehoben ist, durch den Druck des Kolbens noch höher getrieben, und alsdann ist das Saugrohr nie sehr hoch. Ueberdies wird auch bei diesen Pumpen nie der Kolben bis zur Oberfläche des Wassers $Ee$ (Fig. 58.) herabgebracht, sondern in einer gewissen Höhe ist ein Boden $Cc$ mit einer Oefnung, welche durch das Ventil $m$ verschlossen wird, wenn der Kolben niedergeht und das Wasser durchläfst, wenn er aufwärts gezogen wird. In diesem Falle, wo nicht für $AO = 0$ die Geschwindigkeit $= 0$ wird, werden die Formeln etwas anders; es sey nämlich nun $AC = \alpha$ und $CO = x$, so wird, wenn man die Röhren $CA$ und $CO$ als gleichweit annimmt, und in §. 311. die gehörigen Veränderungen vornimmt,

$$v^2(\alpha + x) = 4g(kx - \alpha x - \tfrac{1}{2}x^2 - \int \Pi dx)$$

und $v^2 h = 4g[\int \Pi dx + \int u dx - kx - (1 + \delta)hx]$,

$$\text{also } v^2 = \frac{4g[\int u dx - \alpha x - (1 + \delta)hx - \frac{1}{2}x^2]}{h + \alpha + x}.$$

Diese Formel gilt für den Fall, dafs die untere Röhre $AC$ eben so weit, als $CO$ ist, und dafs man auf die Verengerung in der Oefnung $m$ nicht Rücksicht nimmt; ist $AC$ weiter oder enger, so erhält $B$ im 311. §. einen andern Werth, und auch unsre eben angegebene Formel ändert sich.

Bei diesen Pumpen wird der Kolben nur bis zu einer gewissen Höhe erhoben, und alsdann wieder herunter bewegt; das Ventil $m$ verschliefst sich nun, und das Wasser wird entweder durch eine andre Röhre $DvVd$ aufwärts

getrieben, oder es dringt durch ein im Kolben selbst befindliches Ventil über denselben hinauf; in jenem Falle muſs ein bei $n$ befindliches Ventil die Röhre $DV$ verschlieſsen, wenn der Kolben in die Höhe gezogen wird. Wir wollen diesen Fall, da das Wasser durch die Röhre $DdvV$ in die Höhe getrieben wird, oder die Bewegung des Wassers in einem Druckwerke jetzt näher betrachten.

316. Problem 64. Wenn die Röhre $BbcC$ (Fig. 59.) bis an $Bb$, und die Steigröhre $DdzZ$ ganz mit Wasser gefüllt ist, und der Kolben alsdann mit gegebener Kraft niedergedrückt, also das Wasser durch die Röhre $DdzZ$ getrieben wird, diese Bewegung des Wassers, wenn es bei $Zz$ ausflieſst, zu bestimmen.

Auflösung. Der Querschnitt des Kolbenrohrs $BbcC$ sey $ff$, die Höhe $BC = b$; am Ende der Zeit $t$ sey der Kolben bis $Oo$ herabgetrieben, und die noch übrige Höhe $CO = x$, die Geschwindigkeit, mit welcher der Kolben niedergeht, $= v$, die den Kolben niedertreibende Kraft $= ff.u$; der Druck aber, welchen das Wasser auf die Basis des Kolbens ausübt, oder eigentlich die diesem Drucke entsprechende Höhe $= \Pi$. Ferner sey die Weite der Ausfluſsöfnung $Zz = cc$, also die Geschwindigkeit des Ausflusses durch diese Oefnung $= \frac{ff.v}{cc}$; die Höhe $TZ$ sey $= q$, und für irgend einen Punkt $S$ der Röhre die Länge $DS = s$, der Querschnitt $Ss = \omega$, die Höhe $VS = z$, der Druck in $Ss = p$, die Geschwindigkeit $= \kappa = \frac{ffv}{\omega}$.

Die Gesetze der Bewegung geben also nun

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 v^2}{2\alpha^2} - \frac{f^2 dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

wo $\int\frac{ds}{\omega}$ von $Oo$ bis $Ss$ genommen werden muſs. Der Werth dieses Integrals von $Oo$ bis $Cc$ ist $= \frac{x}{ff}$ (wenn man

auf den wegen der plötzlichen Verengerung entstehenden Strudel nicht sieht); für die ganze Röhre $DZ$ sey der Werth desselben $= D$: man hat also, weil in $Oo$ der Druck $= \Pi$ ist, in $Zz$ aber $= k$, dem Drucke der Atmosphäre gleich ist, die beiden Gleichungen

$$2g\Pi = \Delta : t - 2gx - \tfrac{1}{2}v^2$$

$$\text{und } 2gk = \Delta : t - 2ga - \frac{f^4 v^2}{2c^4} - \frac{f^2 dv}{dt}\left(D + \frac{x}{ff}\right),$$

$$\text{also } 2g(\Pi - k) = 2g(a - x) + \tfrac{1}{2}v^2\left(\frac{f^4}{c^4} - 1\right) + \frac{f^2 dv}{dt}\left(D + \frac{x}{ff}\right).$$

Da nun hier $v\,dt = -\,dx$ ist, so hat man auch

$$4g(\Pi - k - a + x)\,dx = v^2\left(\frac{f^4}{c^4} - 1\right)dx - 2f^2 v\,dv\left(D + \frac{x}{ff}\right),$$

oder, wenn ich $\frac{f^4}{c^4} - 1 = \lambda$ und $D = \frac{m}{ff}$ setze,

$$4g\,(\Pi - k - a + x)\,dx = \lambda v^2 dx - 2(m + x)\,v\,dv,$$

welche durch $(m + x)^{\lambda + 1}$ dividirt und integrirt, gibt

$$4g\int\frac{(\Pi - k - a + x)\,dx}{(m + x)^{\lambda + 1}} = \text{Const} - \frac{v^2}{(m + x)^\lambda},$$

wo die beständige Gröſse so bestimmt werden muſs, daſs für $x = b$, $v = 0$ sey.

Wenn nun ferner das Gewicht des Kolbens $= ffh$ seine Friction $= \delta f^2 h$ ist, so wird er mit der Kraft

$$= f^2\,(k + u + h - \Pi - \delta h)$$

niederwärts getrieben, daher ist für seine Bewegung

$$v^2 = \text{Const} - \frac{4g\,[kx + hx\,(1 - \delta) + \int u\,dx - \int \Pi\,dx]}{h}.$$

Da es aber hier zuerst unser Zweck ist, die Gröſse $\Pi$ zu eliminiren, so gebrauchen wir besser die Differentialgleichungen $4g(\Pi - k - a + x)\,dx = \lambda v^2\,dx - 2(m + x)\,v\,dv$

und $4g\,[k + u + h(1 - \delta) - \Pi]\,dx = -\,2hv\,dv$,

aus deren Summe man erhält

$$4g\int\frac{u - a + x + (1 - \delta)\,h]\,dx}{(h + m + x)^{\lambda + 1}} = \text{Const} - \frac{v^2}{(h + m + x)^\lambda},$$

wo wieder die Constans und das unaufgelöste Integral so genommen werden müssen, daſs $v = o$ wird, wenn $x = b$ ist.

Setzt man die Höhe $BO = y$, also $x = b - y$, so läſst sich dieselbe Gleichung auch so ausdrücken;

$$\frac{v^2}{(h+m+b-y)^\lambda} = 4g\int\frac{[u - a + (1 - \delta)\,h + b - y]\,dy}{(h + m + b - y)^{\lambda+1}},$$

wo das Integral so genommen wird, daſs es mit $y = o$ verschwindet.

317. Damit also der Kolben das Wasser in Bewegung setzen könne, muſs die angebrachte Kraft $u > a + \delta h - h - b$ seyn; wenn dieses der Fall ist, so wird die Bewegung anfangs beschleunigt, und die Geschwindigkeit wird am gröſsten, wenn $y = u - a + (1 - \delta)\,h + b$ ist. Wofern also $u < a - (1 - \delta)\,h$ ist, oder $u$ zwischen den Gränzen $a - (1 - \delta)\,h$ und $a - (1 - \delta)\,h - b$ liegt, so erreicht die Geschwindigkeit ihren gröſsten Werth, ehe $y = b$ wird, und nimmt alsdann wieder ab.

318. Wenn die Höhe $TZ = a$, zu welcher das Wasser gehoben werden soll, sehr groſs gegen $BC = b$ ist, so wird auch die Gröſse $D$ oder $m = Dff$ sehr groſs, denn, wenn die Weite der ganzen Röhre $DSZ = ff$ überall gleich wäre, so ist $m = DSZ$. In diesem Falle kann man $h + b + m - y$ als unveränderlich betrachten, und erhält, weil man $h + m + b - y$ und $h + m + b$ als gleich betrachten kann,

$$\begin{aligned}(h+m+b)v^2 &= 4g\int[u - a + b + (1 - \delta)\,h]\,dy\\ &= 4g[\int u\,dy - (a - b)\,y + (1 - \delta)\,hy],\end{aligned}$$

wo die Gröſse der Ausfluſsöfnung gar nicht in Betrachtung kommt.

319. Die Zeit, innerhalb welcher der Kolben durch die ganze Höhe $BC = b$ herabgetrieben wird, und das ganze Volumen Wassers $= bf^2$, welches den Raum $BbcC$ füllte, durch $Zz$ heraustreibt, lieſse sich nun auch be-

stimmen, wenn die Gröſse $u$ bekannt wäre, aber man darf diese oder die Kraft $= f^2 \cdot u$, welche den Kolben treibt, nicht willkürlich annehmen, weil die Kräfte, deren man sich zu Betreibung der Maschinen bedient, bei jeder verschiedenen Geschwindigkeit eine andre Wirkung hervorbringen. Sollte hingegen der ganze Effect blos durch ein mit dem Kolben verbundenes Gewicht hervorgebracht werden, so kann man $u$ als mit in $h$ enthalten betrachten, wo dann $\delta$ der Erfahrung gemäſs bestimmt werden muſs. Alsdann hätte man

$$\frac{-v^2}{(h+m+b-y)^\lambda} = 4g \int \frac{[(1-\delta)h - a + b - y]\,dy}{(h+m+b-y)^{\lambda+1}}$$

$$= \frac{4g(h+m+b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b-y)^{-\lambda}$$

$$- \frac{4g(h+m+b)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b)^{-\lambda},$$

oder, wenn man die Ausdrücke entwickelt,

$$-v^2 = \frac{4g}{\lambda(1-\lambda)}[\lambda(h+b-y)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)]$$

$$- \frac{4g(h+m+b-y)^\lambda}{\lambda(1-\lambda)(h+m+b)^\lambda}(\lambda(h+b)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)).$$

Aus dem Vorigen aber erhellt, daſs $h > a - b + \delta h$ seyn muſs, wenn überhaupt eine Bewegung entstehen soll. Wenn $y$ sehr klein gegen $h+m+b$ ist, so ist beinahe

$$v^2 = \frac{2g}{h+m+b}\left[2(h+b-a-\delta h)y + \frac{(1-\lambda)(h+b-a-\delta h)y^2}{h+m+b} - y^2\right].$$

So würde es seyn, wenn die ganze Kraft blos auf die Fortbewegung des schon geschöpften Wassers verwandt würde; aber bei den Pumpen muſs gewöhnlich zugleich dieselbe Kraft das Saugwerk und das Druckwerk treiben, wir wollen daher diese Verbindung noch näher betrachten.

320. **Problem 65.** Wenn zwei ähnliche Pumpen *BbcC* und *B′b′c′C′* (Fig. 60.), wovon jene das Wasser schöpft, diese

aber das Wasser (so wie wir im letzten Probleme annahmen) auf die Höhe $= a$ treibt, beide zugleich von einer gegebenen Kraft betrieben werden, die Bewegung des Wassers in jeder dieser Pumpen zu bestimmen.

Auflösung. Es sey, wie vorhin, jedes Kolbenrohrs $BC$ Höhe $= b$, oder eigentlich der ganze Kolbenhub $= b$, der Querschnitt des Kolbenrohrs $= ff$, beider Kolben Masse $= ff \cdot h$, ihre Reibung $\delta ffh$. Wir nehmen an, daſs der aufwärts gehende Kolben in eben dem Augenblicke angefangen habe, sich von $Cc$ zu erheben, als der herabgehende Kolben von $B'b'$ niederwärts zu sinken anfing; beide Kolben sind an den Hebel $PQ$, der in der Mitte bei $V$ unterstützt ist, befestigt; sie bewegen sich also, indem der Hebel sich dreht, beide gleich schnell. Gesetzt nun, der Hebel würde in $Q$ von einer Kraft $= Vff$, die wir als bekannt ansehen, niedergedrückt, und daraus entstehe eine den Kolben $Oo$ hebende Kraft $= Pff$, und eine den Kolben $O'o'$ niederdrückende $= Qff$, so ist $V = P + Q$. Wenn also am Ende der Zeit $t$ beide Kolben den Weg $CO = B'O' = x$ zurückgelegt haben, und mit der Geschwindigkeit $= v$ fortgehen, so erhalten wir für die Pumpe, welche das Wasser schöpft (aus §. 315., wo $u = P$ ist),

$$v^2 = \frac{4g(\int Pdx - \alpha x - (1+\delta)hx - \frac{1}{2}x^2)}{h + \alpha + x},$$

für die zweite aber, welche das Wasser ausgieſst (aus §. 316., wo $u = Q$ und $y = x$ gesetzt werden muſs),

$$\frac{v^2}{(h+m+b-x)^\lambda} = 4g\int\left(\frac{Q - a + (1-\delta)h + b - x}{(h+m+b-x)^{\lambda+1}}\right)dx,$$

oder, wenn man die Differentiale dieser Gleichungen nimmt,

$$2vdv(h+\alpha+x) + v^2dx = 4gdx(P - \alpha - (1+\delta)h - x) \text{ und}$$

$$2vdv(h+m+b-x) + \lambda v^2dx = 4gdx(Q - a + (1-\delta)h + b - x),$$

deren Summe, weil $P + Q = V$ ist, wird

$$2vdv(2h+m+b+\alpha) + (\lambda+1)v^2dx = 4gdx(V - a - \alpha - 2\delta h + b - 2x).$$

Setzt man also $\frac{\lambda+1}{2h+m+b+\alpha} = \mu$, und bezeichnet mit $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so wird, wenn man die Gleichung mit $e^{\mu x}$ multiplicirt und integrirt,

$$v^2 = \frac{4g \cdot e^{-\mu x}}{2h+m+b+\alpha} \int e^{\mu x} dx \, (V - a - \alpha - 2\delta h + b - 2x),$$

und dieses Integral mufs so genommen werden, dafs es für $x = 0$ verschwindet. Die Bedeutung der Buchstaben $\alpha$, $m$, $\lambda$ ist aus dem Vorigen bekannt.

321. Bei jeder Bewegung des Hebels $PVQ$, wenn der Arm $VP$ gehoben und $VQ$ niedergedrückt wird, füllt sich die Pumpe $BC$ mit Wasser, während die andre $B'C'$ das Wasser, welches sich schon oberhalb $C'c'$ befindet, zur Höhe $= a$ hebt: die Quantität des von jener geschöpften Wassers, und des von dieser ausgegossenen, ist gleich grofs $= bff$. Geht nun der Hebel zurück, so dafs der Arm $VQ$ sich hebt und $VP$ sich senkt, so füllt sich $B'C'$ wieder mit Wasser, und aus $BC$ wird das bei der vorigen Bewegung geschöpfte herausgetrieben und zu eben der Höhe gehoben, wenn die an $D$ und $D'$ angesetzten Röhren gleich hoch sind, oder sich in eine Röhre vereinigen.

Hier wird also bei jedem Hingange und Zurückgange des Hebels immerfort Wasser gehoben, und während der Hebel einmal hin oder zurück bewegt wird, von der Kraft $= Vf^2$ wird die Wassermasse $= bff$ ausgegossen.

322. Die Formel, welche wir für die Geschwindigkeit $v$ gefunden haben, zeigt, wie die Kraft, welche den Hebel treibt, beschaffen seyn mufs, damit sie diese Wirkung hervorbringen könne, denn, damit für $x = 0$, $dv$ positiv werde, mufs $V > a + \alpha + 2\delta h - b$ werden; im entgegengesetzten Falle würden die Kolben gar nicht anfangen, sich zu bewegen. Hier ist $\alpha$ die Höhe des Bodens $Cc$ über dem Wasser, aus welchem das Saugrohr schöpft, $a$ aber die Höhe der Ausflufsöfnung über $Cc$, die ganze Höhe

also, zu welcher das Wasser gehoben wird, ist $= a + \alpha$, und je gröſser diese Höhe ist, desto gröſser muſs auch $V$ seyn. Ferner ist $2\delta h$ die Reibung beider Kolben, welche ebenfalls von der Kraft $V$ überwunden werden muſs; $b$ aber, welches die Höhe des Kolbenhubes bezeichnet, muſs von der Summe jener Gröſsen abgezogen werden, weil im ersten Augenblicke das Wasser, welches die ganze Höhe $b$ ausfüllt, durch sein Gewicht die Bewegung unterstützt.

Bei der Bestimmung der Bewegung kommen ferner noch die Gröſsen $2h$ und $m$ vor, deren eine die Masse der beiden Kolben (womit auch die des Hebels und die mit der auf den Hebel drückenden Kraft vereinigte Masse verbunden werden muſs) bezeichnet; die andre aber so bestimmt werden muſs, daſs $m = ff \int \frac{ds}{\omega}$ wird, wenn man dieses Integral von $D$ bis an das Ende der Röhre nimmt, durch welche das Wasser in die Höhe getrieben wird. — Die Weite des Saugrohrs ist hier, als dem Kolbenrohre gleich, vorausgesetzt. Auch die Gröſse der Oefnung, wodurch das Wasser oben ausflieſst, kommt hier in Betrachtung, weil $\lambda = \frac{f^4}{c^4} - 1$ ist.

Die Bestimmung der Bewegung wird hierdurch im Allgemeinen sehr schwierig, wir wollen daher eine bestimmtere Voraussetzung für die Maschine, welche die Kolben treibt, annehmen.

323. Problem 66. Wenn der Hebel $PVQ$ (Fig. 61.), an welchem, wie im vorigen Probleme, die beiden Pumpenkolben hängen, vermittelst des Krummzapfens $MFN$, welcher sich gleichförmig umdreht, abwechselnd gehoben und niedergedrückt wird: die Kräfte zu bestimmen, mit welchen in jedem Augenblicke dieser Krummzapfen getrieben werden muſs, damit er den angegebenen Effect hervorbringe.

Auflösung. Die Bewegung eines solchen Hebels, da er abwechselnd gehoben und niedergedrückt wird, pflegt vermittelst des Krummzapfens, nämlich einer horizontalen, aber bei $F$ gekrümmten Axe $MN$ bewirkt zu werden, welche bei $F$ eine Stange $FQ$ führt, die in $Q$ mit dem Hebel so verbunden ist, daſs sie das Ende des Hebels wechselsweise um die Höhe $= 2FG$ hebt und niederdrückt. Damit also jeder Kolben um die ganze Höhe $= b$ des Kolbenrohrs gehoben werde, muſs $FG = \frac{1}{2}b$ seyn, und das obere Ende der Stange wird einen verticalen Kreis $FSH$ (Fig. 62.) durchlaufen, und zwar, wie wir hier voraussetzen, mit gleichförmiger Bewegung.

Die Stange befinde sich also anfangs an der höchsten Stelle in $F$, und das an dieselbe befestigte Ende des Hebels $Q$ sey in $I$; die Länge der Stange $FI$ sey $= l$, und die Geschwindigkeit, mit welcher $F$ den Umfang des Kreises durchläuft, sey $= c$. Nach Verlauf der Zeit $= t$ sey der Stange oberes Ende nach $S$ gekommen, und der Winkel $FGS$ sey $= \varphi$, also der Bogen $FS = \frac{1}{2}b\varphi$, und der in der Zeit $dt$ zurückgelegte Weg $\frac{1}{2}b.d\varphi = cdt$: die Stange aber hat jetzt die Lage $SQ$, und $SQ$ bleibt $= l$, $IQ$ aber der Raum, welchen das untere Ende der Stange durchlaufen hat, sey gleich dem Raume, um welchen die Kolben fortgeschoben sind, $= x$. Dieses $x$ läſst sich aus $\varphi$ bestimmen: man hat nämlich $GI = l - \frac{1}{2}b$, also $GQ = l - \frac{1}{2}b + x$

$$\text{und } \operatorname{Cos}\varphi = \frac{SQ^2 - GS^2 - GQ^2}{2GS.GQ}\quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{(\frac{1}{2}b - x)(2l - b) - x^2}{bl - \frac{1}{2}b^2 + bx},$$

$$\text{folglich } x = -l + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\varphi + \sqrt{(l^2 - \tfrac{1}{4}b^2\operatorname{Sin}\varphi^2)},$$

$$\text{und } dx = +\tfrac{1}{2}b\,d\varphi\operatorname{Sin}\varphi - \frac{\frac{1}{4}b^2\operatorname{Sin}\varphi.\operatorname{Cos}\varphi.d\varphi}{\sqrt{(l^2 - \frac{1}{4}b^2\operatorname{Sin}\varphi^2)}}.$$

$$\text{Da nun } dt = \frac{dx}{v} = \frac{bd\varphi}{2c},\ \text{so ist } v = \frac{2cdx}{bd\varphi},$$

$$\text{oder } v = c\operatorname{Sin}\varphi - \frac{\frac{1}{2}bc\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{(l^2 - \frac{1}{4}b^2\operatorname{Sin}\varphi^2)}}.$$

Wir kommen nun zur Bestimmung der Kraft, welche nöthig ist, um den Krummzapfen zu drehen, oder das Ende $S$ der Stange gleichförmig im Kreise zu bewegen; diese Kraft, deren Richtung jedesmal auf den Radius $GS$ senkrecht ist, sey $= Sff$, so entspringt daraus nach der Richtung $SQ$ eine Kraft $= \frac{Sff}{\text{Sin } GSQ}$, mit welcher die Stange nach der Richtung ihrer Länge fortgetrieben wird, und der Punkt $Q$ wird niedergedrückt mit einer Kraft $= \frac{Sff \,.\, \text{Cos } GQS}{\text{Sin } GSQ}$. Die Kraft, welche den Hebel in $Q$ niederdrückt, nannten wir im vorigen Probleme $= Vff$, und dieses ist dieselbe, welche wir eben bestimmt haben, also ist $V = \frac{S \,.\, \text{Cos } GQS}{\text{Sin } GSQ}$.

$$\text{Nun ist Sin } GSQ = \frac{GQ \,.\, \text{Sin } \varphi}{l}$$

$$\text{und Cos } GQS = \frac{GQ + \tfrac{1}{2} b \text{ Cos } \varphi}{l},$$

$$\text{also } V = \frac{S \,.\, (GQ + \tfrac{1}{2} b \text{ Cos } \varphi)}{GQ \,.\, \text{Sin } \varphi},$$

oder, weil $GQ = -\tfrac{1}{2} b \text{ Cos } \varphi + \sqrt{(l^2 - \tfrac{1}{4} b^2 \text{ Sin } \varphi^2)}$ ist,

$$V = \frac{S \,.\, \sqrt{(l^2 - \tfrac{1}{4} b^2 \text{ Sin } \varphi^2)}}{\text{Sin } \varphi \,.\, \sqrt{(l^2 - \tfrac{1}{4} b^2 \text{ Sin } \varphi^2)} - \tfrac{1}{2} b \text{ Sin } \varphi \text{ Cos } \varphi}.$$

Diesen Ausdruck müssen wir jetzt mit der zwischen $v$ und $V$ gefundnen Gleichung des vorigen Problems vergleichen, diese war:

$$2vdv(2h + m + b + \alpha) + (\lambda + 1) v^2 dx = 4g dx (V - a - \alpha - 2\delta h + b - 2\lambda).$$

Wenn wir also hier $l$ als sehr grofs gegen $\tfrac{1}{2} b$ betrachten, so dafs man $x = \tfrac{1}{2} b (1 - \text{Cos } \varphi)$, $\frac{dx}{d\varphi} = \tfrac{1}{2} b \text{ Sin } \varphi$, $v^2 = c^2 \text{ Sin } \varphi^2$, $\frac{2 v dv}{d\varphi} = 2 c^2 \text{ Sin } \varphi \text{ Cos } \varphi$ und $V = \frac{S}{\text{Sin } \varphi}$ setzen kann, so wird

$$2(2h+m+b+\alpha)c^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + (\lambda+1)\frac{bc^2 \operatorname{Sin}\varphi^3}{2}$$

$$= 2gb \operatorname{Sin}\varphi \left[\frac{S}{\operatorname{Sin}\varphi} - (a+\alpha+2\delta h-b) - b(1-\operatorname{Cos}\varphi)\right]$$

$$= 2gb(S-(a+\alpha+2\delta h-b\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}\varphi),$$

folglich ist die in jedem Augenblicke zur Erhaltung der gleichförmigen Bewegung nöthige Kraft

$$S = (a+\alpha+2\delta h-b\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}\varphi + \frac{c^2}{gb}(2h+m+b+\alpha)\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \frac{(\lambda+1)}{4g}c^2 \operatorname{Sin}\varphi^3.$$

Diese Kraft bewirkt, daſs während eines halben Umgangs der Axe, oder in der Zeit $= \frac{\pi b}{2c}$ Secunden, während welcher der Krummzapfen und das Ende der Stange von der höchsten zur niedrigsten Stelle kommt, die Wassermenge $= bff$ durch die obere Mündung der Röhre ausgegossen wird. Wenn aber der Krummzapfen die niedrigste Stelle $H$ (Fig. 62.) erreicht hat, so hebt sich bei fortgesetzter Umdrehung der Axe das an $Q$ befestigte Ende des Hebels, und, wenn man $HGS' = \varphi$ setzt, so findet man für die Kraft, welche die Axe drehen muſs, wenn sich das Ende der Stange in $S'$ befindet, eben so, wie vorhin,

$$S = (\alpha+a+2\delta h-b\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}\varphi + \frac{c^2}{gb}(2h+m+b+\alpha)\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \frac{(\lambda+1)c^2 \operatorname{Sin}\varphi^3}{4g},$$

und es wird einerlei Kraft erfordert, der Krummzapfen mag sich in $S$ oder in der gerade entgegengesetzten Lage befinden.

324. Bei der höchsten Stellung des Krummzapfens in $F$ und der niedrigsten in $H$ wird $S = 0$, oder es ist dann gar keine Kraft nöthig, um die Umdrehungsbewegung

gleichförmig zu erhalten; hingegen, wenn sich die Axe um einen Quadranten gedreht hat, ist

$$S = \alpha + a + 2\delta h + \frac{(\lambda + 1)\, c^2}{4g}.$$

Ist $FGS = \varphi = 45^\circ$ oder $= 225^\circ$, so ist

$$\text{Sin}\, \varphi = \text{Cos}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also}$$

$$S = \frac{a + \alpha + 2\delta h}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} b + \frac{c^2}{2gb}(2h + m + b + \alpha) + \frac{(\lambda + 1)\, c^2}{8g \cdot \sqrt{2}}.$$

Für $\varphi = 135^\circ$ aber und für die entgegengesetzte Stellung ist

$$\text{Sin}\, \varphi = -\text{Cos}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und}$$

$$S = \frac{a + \alpha + 2\delta h}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2} b - \frac{c^2}{2gb}(2h + m + b + \alpha) + \frac{(\lambda + 1) c^2}{8g\sqrt{2}}.$$

325. Wenn also die Axe $MN$ (Fig. 61.) zwei auf einander senkrechte Krummzapfen hätte, deren jeder zwei völlig gleiche Pumpen betriebe, so würde, wenn sich der eine im höchsten oder niedrigsten Stande befände, der andre um einen Quadranten von dieser Stellung entfernt seyn, und in diesem Augenblicke zur gleichförmigen Drehung der Axe und Bewegung der vier Pumpenkolben eine Kraft $S = a + \alpha + 2\delta h + \frac{(\lambda + 1)\, c^2}{4g}$ nöthig.

Hat sich aber die Axe um 45 Grad gedreht, so ist für den einen $\varphi = 45^\circ$, für den andern $\varphi = 135^\circ$, und die jetzt erforderliche Kraft ist

$$S = (a + \alpha + 2\delta h)\sqrt{2} + \frac{(\lambda + 1)\, c^2}{4g \cdot \sqrt{2}},$$

welche der vorigen gleich seyn würde, wenn

$$a + \alpha + 2\delta h = \frac{(\lambda + 1)\, c^2}{4g \cdot \sqrt{2}}.$$

Diese vier Pumpen heben jetzt in $\frac{\pi b}{2c}$ Secunden eine Quantität Wasser, die $= 2bf^2$ ist.

326. Bei der Wirkung aller Maschinen liegt sehr viel daran, daſs ihre Bewegung möglichst gleichförmig sey, und daſs sie beständig mit einerlei Kraft getrieben werden können: man übersieht daher, daſs es nicht vortheilhaft sey, nur zwei Pumpen mit der Axe *MN* zu verbinden, weil die zur gleichförmigen Drehung der Axe nöthige Kraft dann sehr ungleich wird; sind aber zwei auf einander senkrechte Krummzapfen vorhanden, von denen vier Pumpen betrieben werden, so sind die zur gleichförmigen Umdrehung der Axe nöthigen Kräfte viel weniger verschieden. Zu Beförderung dieser Gleichförmigkeit thut man jedoch nicht wohl, der Formel $\frac{(\lambda+1)c^2}{4g}$ einen so groſsen Werth, wie den am Ende des letzten §. angegebnen, zu geben, vielmehr ist es besser, dieser Formel den möglichst kleinsten Werth zu geben, damit bei gleichem Effecte die Kraft nicht so groſs zu seyn brauche. Hier ist, wenn $ee$ die Gröſse der Ausfluſsöfnung der Steigröhre und $ff$ die Weite des Kolbenrohrs bezeichnet, $\lambda+1=\frac{f^4}{e^4}$; es ist daher gut, die obere Mündung der Röhre möglichst groſs zu machen. Ueber die Geschwindigkeit $c$ aber ist nichts der Willkühr überlassen, denn weil in $\frac{\pi b}{2c}$ Sec. die Wassermenge $=2bf^2$ gehoben werden soll, so ist die in einer Secunde gehobene Quantität $=\frac{4cf^2}{\pi}$; diese Wirkung wollen wir mit der Kraft $S$ vergleichen.

Nehmen wir nämlich das Mittel zwischen den beiden Werthen von $S$

$$S=\tfrac{5}{4}(a+\alpha+2\delta h)+\tfrac{5}{6}\,\frac{(\lambda+1)c^2}{4g}$$

(wenn man für $\sqrt{2}$ setzt $\frac{3}{2}$), so wird, weil wir die Kraft selbst, welche den Krummzapfen treibt, $=Sff$, oder dem Gewichte einer Wassermasse gleich setzten, deren

Volumen $= Sff$, der Effect dieser Kraft $= Scff$. Wenn man also annimmt, daſs die Hauptkraft, welche die Maschine treibt, $= V$ ist, und daſs sie mit der Geschwindigkeit $= u$ wirkt, also $Vu = Scff$, so wird die erhobene Wassermenge

$$= \frac{4cf^2}{\pi} = \frac{4Vu}{\pi S} = \frac{\frac{16}{5\pi} Vu}{a + \alpha + 2\delta h + \frac{(\lambda+1)c^2}{6g}},$$

wo der Coefficient $\frac{16}{5\pi}$ fast $= 1$ ist.

327. Wenn nur zwei Paar Pumpen an zwei auf einander senkrechten Krummzapfen befestigt sind, so ist die Ungleichheit der Kraft $S$ noch immer sehr erheblich; man kann diese Ungleichheit vermindern, wenn man vier Paar Pumpen anbringt, und die vier Krummzapfen um halb rechte Winkel von einander abstehen läſst; dann ist nämlich fast immer

$$S = \tfrac{5}{2}(a + \alpha + 2\delta h) + \tfrac{17}{10}\frac{(\lambda+1)c^2}{4g},$$

und in jeder Secunde wird die Wassermenge $= \frac{8cf^2}{\pi}$ gehoben, welche man nun nach den Bezeichnungen des letzten §.

$$= \frac{\frac{16}{5\pi} Vu}{a + \alpha + 2\delta h + \frac{17}{180}\frac{(\lambda+1)c^2}{g}}$$

setzen kann, welcher Ausdruck von dem im vorigen §. gefundnen wenig verschieden ist.

Dieser Ausdruck zeigt auch, daſs man $c$ so klein als möglich machen, und dagegen die Weite des Kolbenrohrs gröſser annehmen muſs. Die Höhe der Pumpe $b$ aber, oder der Halbmesser des Krummzapfens bleibt unsrer Willkür überlassen.

Anmerkung. Ich habe die Folgerungen aus dem letzten Problem so hergesetzt, wie Euler sie findet; ich kann aber einen Zweifel gegen die Richtigkeit der Auflösung des Problems nicht ganz verschweigen. Wenn man nämlich die Kraft, welche in $S$ (Fig. 62.) senkrecht auf $GS$ wirkt, $= Sff$ setzt, so entsteht daraus, meiner Meinung nach, nach der Richtung $SQ$ die Kraft $= Sff . \text{Sin}\, GSQ$, und nicht, wie Euler setzt, $= \frac{Sff}{\text{Sin}\, GSQ}$.

Wenn aber das ist, so müſste man in allen Formeln statt $S$ schreiben $S . (\text{Sin}\, GSQ)^2$. Dann würde also, wenn man $l$ als sehr groſs gegen $\frac{1}{2} b$ betrachtet,

$$V = S . \text{Sin}\,\varphi - \frac{1}{2}\, \frac{S b \,\text{Sin}\,\varphi \,\text{Cos}\,\varphi}{l},$$

$$\text{oder } V = S \,\text{Sin}\,\varphi.$$

Daraus würde dann ferner folgen

$$S = \frac{a + \alpha + 2\delta h - b\,\text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi} + \frac{c^2}{gb}(2h + m + b + \alpha)\frac{\text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi} + \frac{(\lambda + 1)}{4g} c^2 \,\text{Sin}\,\varphi.$$

Wie sehr viel anders nun alle weitern Folgerungen ausfallen würden, erhellt von selbst. — Ich überlasse es dem Leser, diese Anwendungen näher zu untersuchen, und die Zweifel zu prüfen, welche ich hier wenigstens glaubte erwähnen zu müssen. (B.)

## Fünfter Abschnitt.

### Von der Bewegung des Wassers in Röhren, wenn es einigen Widerstand an den Röhrenwänden leidet.

---

328. Problem 67. Wenn das Wasser, indem es sich in der Röhre $IikK$ (Fig. 40.), deren Querschnitte alle gleich und ähnlich sind, fortbewegt, an den Röhrenwänden einen Widerstand leidet, welcher eine bekannte Function der Geschwindigkeit oder des Druckes ist, die Gesetze der Bewegung zu bestimmen, in dem Falle, daſs sonst, auſser der Schwere, keine beschleunigende Kräfte wirken.

Auflösung. Man kann den Widerstand, welchen das Wasser an den Röhrenwänden leidet, als eine bewegende Kraft betrachten, welche der Richtung der Bewegung gerade entgegen wirkt. Ich nehme an, daſs in jedem Querschnitte der Röhre dieser Wasserstand dem innern Umfange der Röhre, oder der von dem durchflieſsenden Wasser berührten Oberfläche proportional sey, zugleich aber auf eine durch Erfahrung näher zu bestimmende Weise von der Geschwindigkeit und dem Drucke auf jede Stelle der Röhrenwand abhänge.

Da die Röhre überall gleich weit und ihre Querschnitte ähnlich sind, so kann ich die Weite der Röhre allenthalben $= \alpha^2$, den innern Umfang der Röhre $= \gamma$ setzen; heiſst also die Länge der Röhre von $I$ an bis zu dem unbestimmten Querschnitte $VZ = s$, so ist des kurzen Stückes bei $VZ$, dessen Länge $= ds$, Oberfläche $= \gamma ds$. Den Widerstand, welchen das Wasser in dieser kurzen Strecke leidet, kann ich also $= V\gamma ds$ setzen, wenn $V$ allgemein eine Function bezeichnet, welche die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit und dem Drucke angibt.

Dieser Widerstand hält ein Theilchen des Flüssigen, dessen Masse $= \alpha^2 ds$ ist, in seiner Bewegung auf (wenn nämlich des Wassers Dichtigkeit $= 1$ ist), denn wir nehmen auch hier an, daſs die Bewegung linearisch sey, oder daſs die im Querschnitte $VZ$ liegenden Theilchen alle sich gleich schnell bewegen, und von einerlei Kräften zur Bewegung angetrieben werden, folglich ist der Widerstand als eine beschleunigende Kraft $= \frac{V\gamma}{\alpha^2}$ zu betrachten, welche der Richtung der Bewegung gerade entgegen wirkt, und wir können nun die Gleichungen für die Bewegung aus §. 254. bestimmen.

Die erste Gleichung wird offenbar hier, wie in §. 257., wenn die Buchstaben die dortige Bedeutung behalten, $\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$, also $x = \Gamma : t$, weil diese Gleichung gar nicht von den beschleunigenden Kräften abhängt. In der zweiten Gleichung aber müssen wir jetzt statt $Pdx + Qdy + Rdz$ das Differential der Wirkung der beschleunigenden Kräfte, nämlich der Schwere und des Widerstandes, setzen. Die Schwere ist $= 1$, und wirkt der Richtung der Ordinaten $z$ entgegen; das Product aus der Kraft in das Differential ihrer Richtung ist also $= - dz$; die aus dem Widerstande entspringende beschleunigende Kraft aber ist $= \frac{V\gamma}{\alpha^2}$, und das Differential ihrer Richtung ist $= - ds$, wenn das Wasser sich von $I$ nach $K$ zu bewegt, aber $= + ds$, wenn die Bewegung gegen $I$ zu gerichtet ist. Das Differential der Wirkung dieser Kraft ist also $= \mp \frac{V\gamma ds}{\alpha^2}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn die Wassertheilchen sich von dem Anfangspunkte, von wo an $s$ gerechnet wird, entfernen, das untere, wenn die Bewegung gegen diesen Anfangspunkt zu gerichtet ist. Statt der Formel $Pdx + Qdy + Rdz$, welche das Differential der gesammten Wirkung der Kräfte aus-

drückt, haben wir also nun $-dz \mp \frac{Vy\,ds}{\alpha^2}$, und folglich aus den im §. 257. angeführten Gründen

$$2g\,dp = -2g\,dz \mp \frac{2g\,Vy\,ds}{\alpha^2} - ds\,.\,\Gamma' : t,$$

wenn $\Gamma' : t = \frac{dx}{dt}$ ist, also

$$2g \int \left[dp \pm \frac{Vy\,ds}{\alpha^2}\right] = -2gz - s\,\Gamma' : t,$$

wenn die Formel $dp \pm \frac{Vy\,ds}{\alpha^2}$ ohne Multiplicator integrabel ist.

329. Um diese Untersuchung fortzusetzen, müſste man vor allen Dingen die Function $V$ kennen. Diese ist nun zwar aus den angestellten Versuchen noch nicht völlig genau bekannt, und es lieſsen sich daher mehrere Hypothesen denken, welche man der Rechnung zum Grunde legen, und aus der nachherigen Vergleichung der Resultate mit der Erfahrung Schlüsse über die Richtigkeit der einen oder der andern ziehen könnte. Die Rechnung läſst sich am leichtesten ausführen, wenn man annimmt, $V$ hänge blos von der Geschwindigkeit ab, und sey entweder einer Potenz der Geschwindigkeit proportional, $V = A\,.\,x^m$, oder werde durch zwei verschiedene Potenzen derselben bestimmt, so daſs man $V = Ax^m + Bx^n$ setzen könne, wo $A$ und $B$ beständige Gröſsen bedeuten. Und diese Hypothesen scheinen auch den Versuchen so angemessen, daſs man eine Abhängigkeit des Widerstandes vom Drucke gar nicht anzunehmen nöthig hat, und die dadurch weit schwierigere gemachte Rechnung nicht zu unternehmen braucht.

330. Diese Untersuchungen können wohl freilich nicht zu Formeln führen, welche völlig genau mit der Erfahrung übereinstimmten, denn theils umfassen sie nicht alle Hindernisse der Bewegung, theils findet, zumal in etwas weitern Röhren, keine völlig linearische Bewegung

Statt, sondern die Wassertheilchen in der Mitte der Röhre bewegen sich anders, als diejenigen, welche die Wand der Röhre berühren *). — Indeſs wird diese Untersuchung darum nicht weniger nützlich seyn.

Ich werde übrigens annehmen, daſs die Röhren keine plötzliche winklichte Beugungen haben, und auf Hindernisse der Bewegung, welche aus plötzlicher Krümmung entspringen, nicht sehen.

331. Um die Untersuchungen allgemeiner zu machen, will ich annehmen, der Widerstand werde durch zwei Glieder ausgedrückt, welche zwei verschiedenen Potenzen der Geschwindigkeit $z$ proportional sind, so daſs man die Function $V = \frac{z^m}{a} + \frac{z^n}{b}$ setzen könne. Die Kraft des Widerstandes, mit welcher derselbe in jedem Augenblicke die Bewegung zu verzögern strebt, ist also nun $= \frac{\gamma}{\alpha^2}\left(\frac{z^m}{a} + \frac{z^n}{b}\right)$, wo $a$ eine Gröſse von $m - 1$ Dimensionen, $b$ aber von $n - 1$ Dimensionen ist. Dieser Ausdruck läſst sich noch bequemer machen, wenn man diejenige Geschwindigkeit $= c$ nennt, bei welcher der Widerstand der beschleunigenden Kraft der Schwere gleich wird; da wir diese immer $= 1$ setzen, so erhält man nun $1 = \frac{\gamma}{\alpha^2}\left(\frac{c^m}{a} + \frac{c^n}{b}\right)$,

$$\text{und daher } \frac{a\,\alpha^2}{\gamma} = c^m + \frac{a\,c^n}{b} = c^m + \lambda\,c^n,$$

wenn ich $\frac{a}{b} = \lambda$ setze. Hiedurch läſst sich der allgemeine Ausdruck für den Widerstand nun in folgenden ver-

*) Man sieht dieses z. B. bei den Oscillationen des Quecksilbers im Barometer, wo die Oberfläche beim Steigen convex, beim Sinken concav wird, statt daſs wir hier annehmen, daſs bei Röhren, die überall gleich weit sind, diejenigen Theilchen, welche einmal in demselben Querschnitte sind, alle gleich schnell fortrücken.

ändern: $\frac{V\gamma}{\alpha^2} = \frac{x^m + \lambda x^n}{c^m + \lambda c^n}$, wo $\lambda$ eine beständige Gröfse von $m - n$ Dimensionen ist.

Die Geschwindigkeit $c$ will ich den Exponenten des Widerstandes nennen. Dieser Exponent ist ungleich bei verschiedenen Röhren, denn in engen Röhren, wo der Widerstand sehr grofs ist, wird schon bei geringer Geschwindigkeit der Widerstand der Schwere gleich; bei weiten Röhren aber wird $c$ sehr grofs, weil erst bei sehr schneller Bewegung die verzögernde Kraft des Widerstandes so grofs wird, wie die der Schwere bei aufwärts geworfenen Körpern. Ist die Röhre nicht überall gleich weit, oder sind ihre Querschnitte unähnlich, so mufs man für jede Stelle der Röhre dem Exponenten des Widerstandes einen verschiedenen Werth beilegen. Nimmt man $c$ unendlich grofs, so setzt man den Widerstand $= 0$, denn da dann erst bei einer unendlichen Geschwindigkeit die beschleunigende Kraft des Widerstandes $= 1$ werden soll, so wird sie bei jeder endlichen Geschwindigkeit unendlich klein.

332. Problem 68. Der Widerstand, welchen das Wasser an den Röhrenwänden leidet, sey eine solche Function der Geschwindigkeit $x$, dafs man sie durch $\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}$ ausdrücken kann; man sucht die Formeln für die Bewegung in einer Röhre, deren Querschnitte alle gleich und ähnlich sind, wenn auf beide Enden der Wassermasse gegebene Kräfte drücken.

Auflösung. Da die Röhre allenthalben gleich weit ist, so hängt die Geschwindigkeit $x$ blos von der Zeit $t$ ab, und dadurch wird die Integration der Gleichung für $dp$ sehr erleichtert, weil in derselben $t$, und folglich auch $x$ als beständig betrachtet wird. Wir fanden im letzten Probleme die allgemeine Gleichung

$$2g\,dp = -2g\,dz \mp 2g.\frac{V\gamma}{\alpha^2}ds - ds.\frac{dx}{dt};$$

setze ich also hier $\frac{V\gamma}{\alpha^2} = \frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}$,

und integrire, so wird

$$2gp = \Delta : t - 2gz \mp 2gs\left(\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}\right) - \frac{s\,dx}{dt},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Bewegung mit der Richtung des wachsenden $s$ übereinstimmt.

Es nehme nun am Ende der Zeit $= t$ die Wassermasse den Raum $MmnN$ (Fig. 41.) ein, und es sey für einen unbestimmten Punkt $z$ die Länge $Az = s$, die Höhe über einer gewissen horizontalen Ebene $= z$ (wie in den vorigen Gleichungen); für die Endpunkte der Wassermasse in $M$ und $N$ aber sey $AM = m$, $AN = m + l$, die Höhe des Punktes $M = \mu$, die des Punktes $N = \nu$, und es drücke auf $Mm$ die Kraft $= M$, auf $Nn$ die Kraft $= N$, so wird für den Querschnitt $Mm$, $p = M$, $s = m$, $z = \mu$, folglich

$$2gM = \Delta : t - 2g\mu \mp 2gm\left(\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}\right) - \frac{m\,dx}{dt},$$

und eben so wird für den Querschnitt $Nn$

$$2gN = \Delta : t - 2g\nu \mp 2g(m+l)\left(\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}\right) - (m+l)\frac{dx}{dt},$$

und ferner

$$2g(M-N) = 2g(\nu - \mu) \pm 2gl\left(\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}\right) + \frac{l\,dx}{dt},$$

eine Gleichung, aus welcher $x$ bestimmt werden kann, wenn $M$, $N$ bekannt, und $\mu$, $\nu$ gegebne Functionen von $m$ sind.

Aus diesen Gleichungen folgt ferner:

$$\Delta : t = 2g(M+\mu) + \frac{2gm(M - N + \mu - \nu)}{l},$$

und man erhält also für den Druck $p$ in jedem Punkte $z$

$$p = M + \mu - z + \frac{(m-s)(M - N + \mu - \nu)}{l},$$

$$\text{oder } p = -z + \frac{(m+l-s)(M+\mu) + (s-m)(N+\nu)}{l}$$

völlig so, wie in §. 261, wenn man dort $b = 1$ und $n = m + l$ setzt. Der Druck auf die Wände der Röhre bleibt also bei diesem Gesetze des Widerstandes in Röhren, die überall gleichweit sind, ganz so, als wenn gar kein Widerstand Statt fände *).

333. Hier kommen eben die Fälle vor, wie im zweiten Abschnitte; ich will aber die allgemeine Untersuchung, welche in der Hauptsache einerlei bleibt, hier nicht so umständlich für die verschiedenen Fälle durchführen, sondern sogleich zu Beispielen übergehen, wo ich einige von den verschiedenen Hypothesen, die in dem allgemeinen Gesetze des Widerstandes enthalten sind, näher betrachten werde.

334. Erstes Exempel. Das Wasser bewegt sich in der geraden Röhre $AK$ (Fig. 41.), welche unter dem Winkel $\eta$ gegen den Horizont geneigt ist, fort, ohne irgendwo auszufliefsen, und auf beide Enden der Wassermasse drückt die Atmosphäre. Zugleich wird vorausgesetzt, dafs der Widerstand sich wie die Potenz $k$ der Geschwindigkeit verhalte, oder dafs $\lambda = 0$ sey.

Ich setze den Druck der Atmosphäre $= K$, um ihn von der Potenz $k$ zu unterscheiden; — man hat also $M = N = K$. Rechnet man nun die Länge der Röhre von $Kk$ an, und setzt $KN = m$, $KM = m + l$, so ist, wenn man auch die Höhen von $K$ an rechnet, $\mu = - m \operatorname{Sin} \eta$, $\nu = - (m + l) \operatorname{Sin} \eta$. Aus den Gleichungen des Problems findet man also, wenn die Bewegung niederwärts geht, wo dann das obere Zeichen gilt, für den Druck im Querschnitte $Nn$

$$2gK = \Delta t + 2gm \operatorname{Sin} \eta - \frac{2gm \cdot x^k}{c^k} - \frac{m\,dx}{dt},$$

---

*) Hier darf man also nicht, wie Langsdorf im Lehrbuche der Hydraulik §. 27 c. thut, den Widerstand als eine am Ende der Wassermasse entgegendrückende Kraft $= \mu'$ betrachten; denn wäre statt des Widerstandes eine solche Kraft vorhanden, so müfste man in dem Werthe von $p$, $N + \mu'$ statt $N$ setzen.

und für den Querschnitt $Mm$

$$2gK = \Delta : t + 2g(m+l)\,\mathrm{Sin}\,\eta - \frac{2g.(m+l).z^k}{c^k} - \frac{(m+l)\,dz}{dt},$$

und daraus ferner

$$\frac{dz}{dt} + \frac{2g.z^k}{c^k} = 2g\,\mathrm{Sin}\,\eta,$$

$$\text{also } \frac{dz}{\mathrm{Sin}\,\eta - \frac{z^k}{c^k}} = 2g\,dt.$$

Wenn hier $z^k$ viel kleiner ist, als $c^k\,\mathrm{Sin}\,\eta$, so kann man das Integral dieser Gleichung durch eine gut convergirende Reihe ausdrücken, weil

$$\left(\mathrm{Sin}\,\eta. - \frac{z^k}{c^k}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\eta}\left(1 + \frac{z^k}{c^k\,\mathrm{Sin}\,\eta} + \frac{z^{2k}}{c^{2k}\mathrm{Sin}\,\eta^2} + \frac{z^{3k}}{c^{3k}\mathrm{Sin}\,\eta^3} + \right),$$

es wird also

$$2gt.\mathrm{Sin}\,\eta = z + \frac{z^{k+1}}{(k+1).c^k\,\mathrm{Sin}\,\eta} + \frac{z^{2k+1}}{(2k+1).c^{2k}\mathrm{Sin}\,\eta^2} + \text{etc.}$$

wenn $z$ mit $t$ zugleich verschwinden soll.

Für den bestimmten Fall, daſs $k = 2$ ist, oder der Widerstand sich verhält, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, findet man das vollständige Integral ohne Hülfe einer Reihe:

$$2gt.\frac{\sqrt{\mathrm{Sin}\,\eta}}{c} = \log.\frac{\sqrt{(c.\sqrt{\mathrm{Sin}\,\eta} + z)}}{\sqrt{(c\sqrt{\mathrm{Sin}\,\eta} - z)}}.$$

Will man $z$ durch den zurückgelegten Weg ausdrücken, und nimmt an, daſs $z = 0$ war für $m = 0$, so findet man aus der Differentialgleichung, indem man $dt = \frac{dm}{z}$ setzt,

$$\frac{c^2 z\,dz}{c^2\,\mathrm{Sin}\,\eta - z^2} = 2g\,dm$$

$$\text{und } 4gm = c^2 \log.\frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\eta}{c^2\,\mathrm{Sin}\,\eta - z^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daſs die Geschwindigkeit, wenn die Bewegung von der Ruhe anfing, sich der Gränze

$x = c \cdot \sqrt{\text{Sin}\,\eta}$ nähert, welche sie erst nach einer unendlichen Zeit erreichen könnte. Wäre hingegen gleich vom Anfange der Bewegung an dem Fluido die Geschwindigkeit $x = c\sqrt{\text{Sin}\,\eta}$ mitgetheilt, so wäre $dx = 0$, und die Geschwindigkeit also unveränderlich. Stände die Röhre vertical, so würde diese Gränze der Geschwindigkeit dem Exponenten des Widerstandes gleich, wie das auch der Natur dieses Exponenten völlig gemäſs ist.

335. Nimmt man in derselben Röhre den Raum über $Nn$ als luftleer an, und bewegt das Wasser sich in derselben aufwärts, so wird $M = 0$ und $N = K$, also, weil jetzt im 332. §. das untere Zeichen gilt,

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{2g(K - l\,\text{Sin}\,\eta)}{l} - \frac{2gx^2}{c^2},$$

$$\text{oder } -2x\,dx = 4g\left(\frac{K}{l} - \text{Sin}\,\eta - \frac{x^2}{c^2}\right)dm,$$

$$\text{also } 4gm = \text{Const} + c^2 \log.\left[\frac{K}{l} - \text{Sin}\,\eta - \frac{x^2}{c^2}\right],$$

oder, wenn $x$ verschwindet, wenn $m = h$ ist,

$$4gh - 4gm = c^2 \log. \frac{K - l\,\text{Sin}\,\eta}{K - l\,\text{Sin}\,\eta - l\frac{x^2}{c^2}},$$

und die Gränze der Geschwindigkeit ist

$$x = c\sqrt{\left(\frac{K - l\,\text{Sin}\,\eta}{l}\right)}.$$

Wenn $c$ sehr groſs ist, so wird

$$-\log\left[1 - \frac{lx^2}{c^2(K - l\text{Sin}\eta)}\right] = +\frac{lx^2}{c^2(K - l\text{Sin}\eta)} + \frac{x^4 \cdot l^2}{2c^4(K - l\text{Sin}\eta)^2},$$

$$\text{also } 4g(h - m) = \frac{l \cdot x^2}{K - l\,\text{Sin}\,\eta} + \frac{l^2 \cdot x^4}{2c^2(K - l\,\text{Sin}\,\eta)^2},$$

welches für $c = \infty$, oder, wenn gar kein Widerstand Statt findet, in $4gh - 4gm = \dfrac{l \cdot x^2}{K - l\,\text{Sin}\,\eta}$ übergeht.

336. Flöſse das Wasser aus der Röhre aus, und fände kein neuer Zufluſs Statt, so wären $m + l$ und $v$ unveränder-

liche Grösen, dagegen aber $l$ veränderlich, indess würde man, weil die Länge der Wassermasse $= l$ ganz aus der Rechnung wegfiel (§. 334.), eben die Gleichungen, wie vorhin, erhalten, indem dieser Fall sich von dem dort betrachteten nur dadurch unterscheidet, dass $l$ veränderlich ist. Die in der Röhre noch übrige Masse wird sich also nach Verlauf einer bestimmten Zeit eben so fortbewegen, wie die unveränderte Wassermasse sich nach eben der Zeit bewegt, in dem Falle, dass das Wasser nirgends ausfliesst.

337. Zweites Exempel. Dieselbe gerade Röhre bleibe beständig bis an *Aa* (Fig. 46.) gefüllt, während das Wasser bei *Oo* ausfliesst, und der Druck auf beide Enden der Wassermasse sey gegeben, das Gesetz des Widerstandes aber wie in dem vorigen Exempel.

Bei *Oo*, wo das Wasser ausfliesst, drückt blos die Atmosphäre auf den Querschnitt *Oo*; dieser Druck sey $= K$, auf *Aa* aber drücke eine grössere Kraft $= K + b$.

Die Gleichungen des 334. §. können hier, da eben das Gesetz des Widerstandes gilt, fast unverändert angewandt werden, nur muss man in dem dort mit *Nn* bezeichneten Querschnitte den Druck $= K + b$ setzen. Es ist also hier

$$2g(K+b) = \Delta : t + 2gm \operatorname{Sin} \eta - 2gm . \frac{x^k}{c^k} - \frac{m\,dx}{dt} \text{ und}$$

$$2gK = \Delta : t + 2g(m+l) \operatorname{Sin} \eta - 2g(m+l) \frac{x^k}{c^k} - \frac{(m+l)\,dx}{dt},$$

$$\text{also } \frac{dx}{dt} + 2g . \frac{x^k}{c^k} = 2g \frac{(b+l) \operatorname{Sin} \eta}{l},$$

woraus man, wenn $b$ unveränderlich ist, $x$ als Function von $t$ bestimmen kann.

Setzt man voraus, dass die Bewegung gleichförmig fortgehe, also $dx = 0$ seyn soll, so muss

$$x^k = c^k . \left[\frac{b + l \operatorname{Sin} \eta}{l}\right]$$

seyn. Wenn also von Anfang an

$$x = c . \sqrt[k]{\left[\frac{b + l \operatorname{Sin} \eta}{l}\right]}$$

gewesen wäre, so würde die Bewegung unbeschleunigt fortdauern.

338. Wenn die Röhre in $Aa$ mit einem sehr weiten Gefäfse in Verbindung steht, so wird, wenn aus diesem immer Wasser zufliefst, die Geschwindigkeit sehr bald gleichförmig, und wenn dieses der Fall ist, so mufs, wofern das angenommene Gesetz des Widerstandes das richtige ist, zwischen der Geschwindigkeit und dem Drucke in $Aa$ (oder dem Unterschiede des Druckes auf $Aa$ und $Oo$) die Gleichung $s^k = c^k \left\{\frac{b}{l} + \text{Sin}\, \eta\right\}$ Statt finden. Dieses könnte zu Vergleichung der Theorie mit Versuchen führen, wenn $b$ und $s$ bei den Versuchen bekannt wären. — Aber wir werden in der Folge eine bequemere Methode zur Prüfung der Theorie kennen lernen.

339. Drittes Exempel. Die Kraft des Widerstandes sey $= \frac{s^2 + \lambda s}{c^2 + \lambda c}$, man sucht die Gleichungen für die Bewegung des Wassers in einer geraden, gegen den Horizont geneigten Röhre, in welcher es sich fortbewegt, ohne auszufliefsen.

Der Winkel, welchen die Röhre mit dem Horizonte macht, sey wieder $= \eta$, so bleiben die Gleichungen denen im §. 334. ganz ähnlich, nur mufs man dort statt $\frac{s^k}{c^k}$ setzen $\frac{s^2 + \lambda s}{c^2 + \lambda c}$; denn ich behalte auch hier die Voraussetzung bei, dafs auf beide Enden der Wassermasse die Atmosphäre drückt. Es ist also nun

$$\frac{ds}{dt} + \frac{2g\,(s^2 + \lambda s)}{c^2 + \lambda c} = 2g\ \text{Sin}\,\eta$$

$$\text{und } 2g\,dt = \frac{c\,ds\,.\,(c + \lambda)}{c\ \text{Sin}\,\eta\,.\,(c + \lambda) - \lambda s - s^2},$$

$$\text{oder } 2g\,dt = \frac{c\,.\,(c+\lambda)\,ds}{[c\,.\,(c+\lambda)\,.\,\text{Sin}\,\eta + \tfrac{1}{4}\lambda^2) - (\tfrac{1}{2}\lambda + s)^2]},$$

woraus, wenn ich $\frac{1}{4}\lambda^2 + c(c+\lambda)\,\text{Sin}\,\eta = f^2$ setze, folgt

$$2gt = \frac{c(c+\lambda)}{2f} \log. \frac{(f+\frac{1}{2}\lambda+x)(f-\frac{1}{2}\lambda-v)}{(f-\frac{1}{2}\lambda-x)(f+\frac{1}{2}\lambda+v)},$$

wenn für $t = 0$ die Geschwindigkeit $= v$ war.

Will man hier die Geschwindigkeit $x$ durch die Zeit $t$ ausdrücken, so wird, wenn ich die beständige Gröfse $\frac{4fg}{c(c+\lambda)} = \alpha$ setze,

$$x = \frac{(f-\frac{1}{2}\lambda)(f+\frac{1}{2}\lambda+v).e^{\alpha t} - (f+\frac{1}{2}\lambda)(f-\frac{1}{2}\lambda-v)}{(f+\frac{1}{2}\lambda+v).e^{\alpha t} + (f-\frac{1}{2}\lambda-v)}.$$

Dieser Werth von $x$ nähert sich, je gröfser $t$ wird, desto mehr der Gränze $x = f - \frac{1}{2}\lambda$, ohne sie je zu erreichen. Wäre aber gleich anfangs $x = v = f - \frac{1}{2}\lambda$, so würde die Geschwindigkeit unveränderlich bleiben. Steht die Röhre vertical, so ist diese Gränze $x = c$, wie sich aus dem Begriffe vom Exponenten des Widerstandes von selbst versteht.

340. **Viertes Exempel.** Das Wasser bewege sich in der Röhre $ABCD$ (Fig. 42 *b.*), deren beide Schenkel $AB$, $CD$ gerade und vertical sind, so dafs die Oberflächen $Mm$, $Nn$ immer in diesen geraden Schenkeln bleiben. Der untere Theil der Röhre mag willkürlich gekrümmt seyn. Man sucht die Gleichungen für die Bewegung, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, und auf beide Oberflächen $Mm$, $Nn$ die Atmosphäre drückt.

Es sey $EF$ diejenige Horizontallinie, in welcher bei der Ruhe sich beide Oberflächen $Mm$, $Nn$ befinden würden, so ist die ganze Länge der Wassermasse

$$l = EB + BC + CF = BC + 2EB,$$

wenn $B$ und $C$ ebenfalls in einer Horizontallinie liegen, und diese Länge bleibt während der ganzen Bewegung ungeändert, weil kein Wasser ausfliefst und die Röhre überall gleich weit ist.

Ich nenne $BC = \gamma$, $EB = h$, also $l = \gamma + 2h$, und rechne die Längen $S$ der Röhre von $A$ an, so daſs $AM = m$, und, wenn $AE = f$ ist, $ME = f - m$; aber für das andere Ende der Wassermasse $m + l = m + \gamma + 2h$ sey. Wenn ich ferner die Höhen $z$, $\mu$, $\nu$ von der Horizontallinie $BC$ an rechne, so wird $\mu = h + f - m$ und $\nu = h + m - f$, und die allgemeinen Formeln lassen sich nun leicht anwenden, wenn man die Richtung der Bewegung kennt. Ich will annehmen, daſs die Oberfläche $Mm$ niederwärts fortrückt, also $m$ wächst; in diesem Falle gilt in der allgemeinen Gleichung das obere Zeichen, und weil der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional seyn soll, so ist $k = 2$ und $\lambda = 0$.

Am Ende der Zeit $= t$ nimmt die Wassermasse den Raum $MBCN$ ein, und ihre Bewegung wird durch die Gleichung $\frac{dx}{dt} + \frac{2gx^2}{c^2} = \frac{4g(f-m)}{l}$ bestimmt, welche, weil $dt = \frac{dm}{x}$ ist, gibt

$$2x\,dx + \frac{4g \cdot x^2\,dm}{c^2} = \frac{8g \cdot dm\,(f-m)}{l}.$$

Diese Gleichung läſst sich leicht integriren, wenn man sie mit $e^{\frac{4gm}{c^2}}$ multiplicirt, und $e$ bedeutet, wie immer, die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Die Integration gibt dann

$$x^2 = \frac{2c^2 f}{l} - \frac{8g}{l} \cdot e^{\frac{-4gm}{c^2}} \int m\,dm \cdot e^{\frac{4gm}{c^2}}, \text{ oder, weil}$$

$$\int m\,dm \cdot e^{\frac{4gm}{c^2}} = \frac{c^4}{16g^2} \cdot e^{\frac{4gm}{c^2}} \left(\frac{4gm}{c^2} - 1\right) + \text{Const. ist,}$$

$$x^2 = \frac{2c^2 f}{l} - \frac{2c^2 m}{l} + \frac{c^4}{2gl} + \frac{\text{Const}}{e^{\frac{4gm}{c^2}}}.$$

Um die Constans zu bestimmen, mufs die Geschwindigkeit für irgend einen Werth von $m$ bekannt seyn. Am besten nimmt man den Anfangspunkt $m$ da, wo $z = 0$ war, oder wo die Oberfläche ihre höchste Lage erreicht und zu sinken anfing: dann müssen $m$ und $z$ zugleich verschwinden, daher Const $= -\frac{2c^2}{l}\left(f+\frac{c^2}{4g}\right)$ und

$$z^2 = \frac{2c^2(f-m)}{l} + \frac{c^4}{2gl} - \frac{2c^2}{l}\cdot e^{\frac{-4gm}{c^2}}\left(f+\frac{c^2}{4g}\right),$$

$$\text{oder } z^2 = \frac{2c^2}{l}\left\{\left(f+\frac{c^2}{4g}\right)\left(1-e^{\frac{-4gm}{c^2}}\right) - m\right\}.$$

Diese Gleichung ist so bestimmt, dafs $z$ mit $m$ zugleich verschwindet, dafs also $A$ der Punkt ist, von welchem an die Oberfläche, als sie um die Höhe $= f$ über den Stand des Gleichgewichts erhoben war, zu sinken anfing; man sieht aber, dafs $z$ noch einmal $= 0$ wird, wenn

$$m = \left(f+\frac{c^2}{4g}\right)\left(1-e^{\frac{-4gm}{c^2}}\right)$$

ist, und wenn man aus dieser Gleichung den Werth von $m$ bestimmen kann, so hat man den niedrigsten Punkt, den die Oberfläche erreicht, und wo sie wieder zu steigen anfängt. Wenn $c$ ziemlich grofs ist, so dafs man höhere Potenzen weglassen darf, so ist

$$1-e^{\frac{-4gm}{c^2}} = \frac{4gm}{c^2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4gm}{c^2}+\frac{16\cdot g^2m^2}{2\cdot3\cdot c^4}-\frac{64\cdot g^3m^3}{2\cdot3\cdot4\cdot c^6}+\right),$$

also, wenn man die Glieder wegläfst, wo $c$ in höhern Potenzen, als der vierten im Nenner vorkommt,

$$m = \frac{4gm}{c^2}\left(f+\frac{c^2}{4g}\right)\left(1-\frac{2gm}{c^2}+\frac{8}{3}\frac{g^2m^2}{c^4}\right),$$

$$\text{woraus } m = 2f-\frac{8}{3}\frac{gf^2}{c^2}+\frac{64}{9}\frac{g^2f^3}{c^4}$$

folgt, für die gröfste Ausweichung der Oberfläche unterwärts. Von diesem Punkte fängt der Rückgang an, den man eben so bestimmen könnte, wie diesen ersten Niedergang, blos mit dem Unterschiede, dafs man für $f$, als die

gröfste Höhe der erhobnen Oberfläche, jetzt $m - f$ setzen, und für $m$ den so eben gefundnen Werth gebrauchen müfste, weil $Nn$ nur um diese geringere Höhe über den Stand der Ruhe erhoben ist. — Wäre der Widerstand $= 0$ oder $c = \infty$, so würde die Geschwindigkeit zum zweitenmal $= 0$, wenn $m = 2f$ ist, oder $Nn$ erreichte eben die Höhe, welche anfangs $Mm$ hatte, wie wir schon wissen.

Um auch die Zeit zu bestimmen, in welcher $m$ einen gewissen Werth erreicht, müfste man die Gleichung

$$\frac{c\,dt}{\sqrt{2gl}} = \frac{dm}{\sqrt{\left\{4g(f-m)+c^2-(4gf+c^2)\cdot e^{\frac{-4gm}{c^2}}\right\}}}$$

auflösen, welches wenigstens durch Quadraturen möglich ist.

341. Der Werth, welchen $m$ für den niedrigsten Stand der Oberfläche erhält, hängt gar nicht von der Länge der in der Röhre enthaltnen Wassermasse ab, wenn also einerlei Röhre genommen wird, oder $c$ einerlei Werth hat, so hängt die Gröfse der ersten Ausweichung blos von $f$, von der Höhe ab, um welche die Oberfläche erhoben war, und in einerlei Röhre ist die Gröfse der Oscillationen ungleich langer Wassermassen gleich, wenn die erste Erhebung der Oberfläche $Mm$ bei allen gleich war. Es ist nämlich offenbar, dafs wenn diese Regel für den ersten Niedergang gilt, sie für alle folgenden Oscillationen gelten wird. Stellt man sich nämlich mehrere ganz gleiche Röhren vor, in welchen Wassermassen von ungleicher Länge in oscillirende Bewegung gesetzt sind, so gibt die Formel

$$m = \left(f + \frac{c^2}{4g}\right)\left(1 - e^{\frac{-4gm}{c^2}}\right)$$

an, dafs, wenn $f$ und $c$ bei diesen verschiedenen Bewegungen einerlei Werth haben, die Oberfläche $Nn$ beim ersten Steigen einerlei Höhe erreicht, $l$ mag grofs oder klein seyn. Beim Sinken von $Nn$ ist also die anfängliche Erhebung (was vorhin $f$ war) wieder gleich grofs in den verschiedenen Fällen, also steigt $Mm$ wieder bei allen diesen Bewegun-

gen gleich viel (obgleich sie die Höhe $= f$ nicht wieder erreicht), und so geht es bei allen immer kleiner werdenden Oscillationen fort. Die Zeit der Oscillation aber hängt von der Länge $l$ der Wassermasse ab.

342. Die Lage der Oberfläche, welche in dem Augenblicke Statt findet, da die Geschwindigkeit ihren gröfsten Werth erreicht hat, findet man aus der Differentialgleichung, welche für $dx = 0$, $x^2 = \frac{2c^2}{l}(f - m)$ gibt, also, wenn man diesen Werth mit dem allgemeinen Werthe von $x$ vergleicht,

$$\frac{c^2}{4g} = \left(f + \frac{c^2}{4g}\right) e^{\frac{-4gm}{c^2}},$$

$$\text{oder } m = \frac{c^2}{4g} \log. \left(1 + \frac{4gf}{c^2}\right).$$

Wenn also $c$ sehr grofs ist, so fängt die Geschwindigkeit an, abzunehmen, wenn

$$m = f - \frac{2gf^2}{c^2} + \tfrac{16}{3}\frac{g^2 f^3}{c^4}$$

ist, das heifst früher, als die Oberfläche diejenige Lage erreicht, welche sie beim Gleichgewichte haben würde.

343. Diese Näherungsformeln geben den Werth von $m$, welcher mit $x = 0$ und $dx = 0$ zusammengehört, aber nur dann ziemlich genau, wenn $c$ beträchtlich grofs ist. Bei engen Röhren hingegen kann der Widerstand zu grofs, und folglich $c$ zu klein werden, um jene Reihen mit Vortheil zu gebrauchen. Bei der Bestimmung desjenigen Werthes von $m$, mit welchem die gröfste Geschwindigkeit zusammengehört, bedarf man dieser Reihen eben nicht; aber um die gröfste Ausweichung unterwärts zu finden, müssen wir aus der allgemeinen Gleichung noch bequemere Ausdrücke herleiten. Ganz allgemein war für den Punkt, wo der Rückgang der Oberfläche $Mm$ anfängt,

$$\frac{m}{f + \frac{c^2}{4g}} = 1 - e^{\frac{-4gm}{c^2}},$$

und hier ist nothwendig der nach dem Gleichheitszeichen stehende Theil ein echter Bruch, also auch nothwendig $m < f + \frac{c^2}{4g}$. Diese Gleichung aber gibt

$$-\frac{4gm}{c^2} = \log\left(1 - \frac{m}{f + \frac{c^2}{4g}}\right),$$

und dieser Logarithme läſst sich nun in eine allemal convergirende Reihe verwandeln, und man findet

$$+\frac{4gm}{c^2} = +\frac{m}{f + \frac{c^2}{4g}} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\left(f + \frac{c^2}{4g}\right)^2} + \frac{1}{3}\frac{m^3}{\left(f + \frac{c^2}{4g}\right)^3} + \text{etc.}$$

woraus man $m$ bestimmen müſste. Indeſs möchte es in solchen Fällen, wo $c$ nicht groſs ist, wohl besser seyn, $m$ durch Probiren zu suchen, als durch eine langsam convergirende Reihe.

344. Ueber die Bestimmung der Zeit, welche zu einem ganzen Niedergange verwendet wird, haben die bisherigen Untersuchungen uns noch wenig belehrt, denn die im §. 340. angegebne Gleichung

$$t = \frac{\sqrt{l}}{c}\int \frac{dm}{\sqrt{\left\{2(f-m) + \frac{c^2}{2g} - \left(2f + \frac{c^2}{2g}\right) e^{\frac{-4gm}{c^2}}\right\}}}$$

läſst sich wenigstens nicht leicht integriren: gleichwohl ist die Bestimmung der Zeit einer Oscillation zu interessant, um hier ganz übergangen zu werden.

Da der unter dem Integrationszeichen stehende Theil nicht von $l$ abhängt, so erhellt zuerst, daſs bei einerlei $c$ und $f$ die Oscillationszeit der Wurzel aus $l$ proportional ist, eben so, wie oben, wo wir auf keinen Widerstand Rücksicht nahmen, aber da $t$ hier zugleich von $f$ abhängt, und bei jeder folgenden Oscillation die Erhebung der Oberfläche über den Stand des Gleichgewichts kleiner wird, so sind die Oscillationen nicht gleichzeitig. — Wir wollen jetzt genauer untersuchen, wie $t$ von $f$ abhängt.

345. Es sey die Höhe, welche der Geschwindigkeit $c$ zugehört, $= h$, also $\frac{c^2}{4g} = h$, und man setze $f = \varrho h$, $m = \sigma h$, wo also $\varrho$ eine unveränderliche, aber in verschiedenen Fällen verschiedene Zahl ist, $\sigma$ aber eine veränderliche Zahl, welche in eben dem Verhältnisse im Fortgange der Zeit wächst, wie $m$ selbst. Wenn man diese Werthe in die Gleichung für $t$ setzt, so wird, weil

$$\frac{dm}{c\sqrt{2}} = \frac{h\,d\sigma}{2\sqrt{2hg}} \text{ ist,}$$

$$t = \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{2g}} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{[\varrho - \sigma + 1 - (\varrho + 1)e^{-\sigma}]}}.$$

Drückt man den gröſsten Werth, welchen $m$ erreicht, auf ähnliche Weise aus, und setzt ihn $= \sigma''. h$, so ist für denselben $\frac{\sigma''}{\varrho - 1} = 1 - e^{-\sigma''}$, und aus diesen Ausdrücken läſst sich schon gleich eine merkwürdige Folgerung ziehen. Man sieht nämlich, daſs $\sigma''$ blos von $\varrho$ abhängt, oder daſs bei verschiedenen Röhren, wo der Widerssand ungleich ist, $\sigma''$ einerlei bleibt, wenn, in den verschiedenen Fällen, $f$ dasselbe Verhältniſs zu der Höhe $h$ behält, welche dem Exponenten des Widerstandes zugehört. Die gröſste Erniedrigung der Oberfläche *Mm* unter der Horizontallinie *EF*, welche $= (\sigma'' - \varrho)\,h$ ist, wird also zur anfänglichen gröſsten Erhebung derselben $= \varrho h$ einerlei Verhältniſs haben, wenn $\varrho$ einerlei Gröſse behält. Offenbar aber wird nun auch die bei der nächsten Oscillation erfolgende Erhebung derselben Oberfläche in verschiedenen Fällen dasselbe Verhältniſs zu $f$ haben, wenn $\varrho$ einerlei bleibt: — oder wenn bei den verschiedenen Bewegungen die erste Erhebung $= f$ immer dasselbe Verhältniſs $= \varrho : 1$ zu der Höhe $h$ hat, welche dem Exponenten des Widerstandes zugehört, so wird die Gröſse der zweiten, dritten und jeder folgenden Oscillation, bei diesen verschiedenen Bewegungen einerlei Verhältniſs zu $f$ haben.

Liefsen sich also Mittel finden, um die Gröfse jeder Oscillation zu messen, so könnte man bei verschiedenen Röhren leicht das Verhältnifs der für sie geltenden Exponenten des Widerstandes durch Experimente bestimmen. Hätte man z. B. in einer Röhre, in welcher die erste Erhebung der Oberfläche 1 Zoll betrug, die zweite Erhebung derselben Oberfläche $= \frac{1}{2}$ Zoll gefunden, zugleich aber in einer zweiten Röhre beobachtet, dafs man die erste Erhebung der Oberfläche $= n$ Zolle nehmen müsse, wenn die zweite Erhebung nur halb so grofs $= \frac{1}{2} n$ Zolle werden soll, so würde man schliefsen, wenn der Exponent des Widerstandes bei jener Röhre $= c$ sey, so sey er bei dieser $= c\sqrt{n}$. Der Beweis für diesen Schlufs ist schon im Vorigen enthalten. Denn wenn bei Versuchen mit verschiedenen Röhren die Gröfse der zweiten Oscillation zur Gröfse der ersten Erhebung der Oberfläche einerlei Verhältnifs hat, so mufs bei diesen verschiedenen Versuchen immer $\varrho$ einerlei Zahl seyn. Bei der ersten Röhre war aber $f = \frac{\varrho c^2}{4g} = 1$ Zoll, bei der zweiten, wo der Exponent des Widerstandes $= c''$ seyn mag, $f = \frac{\varrho c''^2}{4g} = n$ Zoll. Also $\varrho$ dort $= \frac{4g}{c^2}$, und hier $= \frac{4gn}{c''^2}$, und da diese beiden Ausdrücke einerlei Werth haben müssen, $c''^2 = nc^2$, $c'' = c\sqrt{n}$.

346. Aus den Gleichungen für $t$ und $\sigma''$ folgt ferner, dafs bei einerlei Länge der Wassermasse $= l$, die Zeit des ersten Niederganges dieselbe bleibt, wenn $\varrho$ einerlei Werth behält. Sind also bei verschiedenen Röhren die Höhen, welche den Exponenten des Widerstandes zugehören $= h$, $h'$, $h''$ und so ferner, und man erhebt die Oberfläche in den verschiedenen Röhren um $f = \varrho h$, $\varrho h'$, $\varrho h''$, so ist die Zeit des ersten Niederganges gleich grofs, wofern $l$ bei allen gleich ist. Weil aber dann auch die Gröfse der ersten Oscillation, oder die Erhebung der andern Oberfläche $Nn$ sich durch $\sigma'' h$, $\sigma'' h'$, $\sigma'' h''$ ausdrücken läfst, so wird auch

die Zeit des ersten Rückganges, und ferner die Zeit der dritten, vierten u. s. w. Oscillation in allen diesen Röhren gleich seyn, und man hat die allgemeine Regel: In Röhren, in welchen der Widerstand verschieden ist, geschehen in gegebner Zeit gleich viele Oscillationen, wenn bei der Bewegung in allen Röhren $\varrho$ einerlei Werth hat, oder wenn die erste Erhebung der Oberfläche *Mm* über den Stand des Gleichgewichts bei allen einerlei Verhältnifs zu der Höhe hat, welche dem Exponenten des Widerstandes zugehört, und zugleich die Länge der bewegten Wassermasse $l$ bei allen gleich ist.

Diese Regeln gelten aber nur, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, und wir werden sehen, dafs sich bei einem andern Gesetze des Widerstandes andre Folgerungen ergeben würden.

347. Um nun endlich die Zeit einer Oscillation selbst zu bestimmen, müssen wir zur Betrachtung der Gleichung

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int \frac{d\sigma}{\sqrt{[\varrho + 1 - \sigma - (\varrho + 1)\, e^{-\sigma}]}}$$

zurückkehren. Diese läfst sich, wofern es keine andre Mittel zur Auflösung gibt, wenigstens durch Construction auflösen. Zeichnet man nämlich eine Curve, wo zu jeder Abscisse $= \sigma$ die Ordinate

$$= \frac{1}{\sqrt{[\varrho + 1 - \sigma - (\varrho + 1)\, e^{-\sigma}]}}$$

gehört, so ist der Flächenraum, den diese Curve begränzt, $= 2t\sqrt{\frac{2g}{l}}$. Dafs übrigens die Abscissen, Ordinaten und Flächenräume hier blos Zahlenverhältnisse ausdrücken, macht dabei weiter keine Schwierigkeit. Eine andre sehr wichtige Schwierigkeit aber scheint sich dieser Constructionsmethode entgegenzustellen, nämlich die, dafs für

$\sigma = 0$ die Ordinate unendlich wird, und dafs dennoch der Flächenraum von $\sigma = 0$ an gerechnet werden mufs, wenn man brauchbare Bestimmungen erhalten will, weil man die Zeit von dem Augenblicke an rechnen mufs, da $m = 0$ ist, oder die Oberfläche *Mm* ihren Niedergang anfängt. Und, wenn man die ganze Zeit einer Oscillation wissen will, so erhält die Ordinate abermals am Ende der Oscillation einen unendlichen Werth, so dafs der zwischen zwei Asymtoten liegende Flächenraum, der sich von $\sigma = 0$ bis

$$\sigma = (\varrho + 1)(1 - e^{-\sigma})$$

erstreckt, bestimmt werden mufs.

Obgleich aber die Curve neben den Asymtoten sich ins Unendliche erstreckt, so ist der von ihr begränzte Raum doch endlich, und läfst sich bestimmen. Denn für sehr kleine Werthe von $\sigma$ darf man $e^{-\sigma} = 1 - \sigma$ setzen, also

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{[(\varrho+1)(1-e^{-\sigma})-\sigma]}} = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\varrho\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

wenn nämlich diese Integration sich nur von $\sigma = 0$ an bis auf so kleine Werthe erstreckt, dafs man jene Supposition annehmen darf: wollte man mit dieser Genauigkeit sich nicht begnügen, so könnte man auch $e^{-\sigma} = 1 - \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2$ setzen, und das Integral von

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{(\varrho\sigma - \frac{1}{2}\varrho\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2)}} \text{ suchen.}$$

Hat man so den Flächenraum, der zwischen $\sigma = 0$ und $\sigma = 0{,}01$ etwa liegt, gefunden, so kann man nun für die folgenden Abscissen die Ordinaten wirklich berechnen, und so viele berechnen, als nöthig sind, um die zwischen ihnen liegenden Stücke der Curve als gerade zu betrachten, wo sich dann die trapezischen Flächenräume leicht finden lassen. Die kleinste Ordinate gehört mit $\sigma = \log(\varrho + 1)$ zusammen, und wenn $\sigma$ gröfsere Werthe erhält, so fängt die Ordinate wieder an zu wachsen, und wird zuletzt wieder unendlich, daher man den letzten Theil des Flächenraums wieder auf andre Weise suchen mufs.

Wir nannten oben $\sigma''$ denjenigen Werth von $\sigma$, für welchen die Geschwindigkeit $= 0$, also hier die Ordinate unendlich ist, daſs also $\sigma'' = (\rho+1)(1-e^{-\sigma''})$; es sey nun jeder andre Werth von $\sigma = \sigma'' - \sigma'$, also, weil $\sigma''$ unveränderlich ist, $d\sigma = -d\sigma'$ und $e^{-\sigma} = e^{\sigma'-\sigma''}$. Für sehr kleine Werthe von $\sigma'$ kann man also $e^{\sigma'-\sigma''} = e^{-\sigma''}(1+\sigma')$ setzen,

und $(\rho+1)(1-e^{\sigma'-\sigma''}) - \sigma'' + \sigma' = \sigma'[1-(\rho+1)e^{-\sigma''}]$,

weil die übrigen Glieder sich aufheben. Man hat also für kleine Werthe von $\sigma'$

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{[(\rho+1)(1-e^{-\sigma})-\sigma]}} = -\frac{1}{\sqrt{[1-(\rho+1)e^{-\sigma''}]}} \int \frac{d\sigma'}{\sqrt{\sigma'}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{\sigma'}}{\sqrt{[1-(\rho+1)e^{-\sigma''}]}} = \frac{-2\sqrt{\sigma'}}{\sqrt{(\sigma''-\rho)}},$$

wodurch der Flächenraum zwischen der zweiten Asymtote und einer nahe liegenden Ordinate bestimmt wird. Das — Zeichen bezieht sich nur auf das Rückwärtsrechnen der $\sigma'$, und geht uns weiter hiebei nichts an, da der Raum offenbar zu dem übrigen Theile der Fläche hinzukommt. Auch für diesen Theil erhielte man noch mehr Genauigkeit, wenn man $e^{\sigma'-\sigma''} = e^{-\sigma''}(1+\sigma'-\frac{1}{2}\sigma'^2)$ setzte.

Bei wirklicher Anwendung würde man sehr viele Ordinaten dieser Curve berechnen müssen, um die Zeit genau zu erhalten. Man findet aber die Oscillationszeit desto kleiner, je kleiner $\rho$ ist, also wird bei dieser Art von Bewegung die zweite Oscillation kürzere Zeit dauern, als die erste u. s. w., und die Gränze, welcher sich die Zeit der immer kleiner werdenden Oscillationen nähert, ist $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, welches die Oscillationszeit für den Fall war, daſs gar kein Widerstand Statt fand.

Man könnte auch den Werth von $dt$ mit Hülfe des polynomischen Lehrsatzes in eine Reihe entwickeln, und so $t$ durch $\sigma$ vermittelst einer Reihe ausdrücken; aber es

läſst sich wohl nicht allgemein bestimmen, ob diese Reihe gut convergiren wird.

348. Will man diese Untersuchungen auf die Oscillationen des Quecksilbers im Barometer anwenden, so findet man völlig eben die Gleichungen, welche wir bisher betrachtet haben, so daſs also alles das gilt, was für eine eben so lange Quecksilbermasse in einer ofnen Röhre gelten würde.

Da aber diese Untersuchungen nur dann passen, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so will ich doch noch wenigstens eine oberflächliche Betrachtung dieser Bewegung für ein andres Gesetz des Widerstandes hersetzen.

349. Fünftes Exempel. Alles sey wie im vorigen Exempel, aber der Widerstand sey der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional.

Da alle Bezeichnungen des 340. §. ihre Bedeutung behalten, so übersieht man, daſs die Gleichung, welche $z$ bestimmt, hier

$$z\,dz + \frac{2gz\,dm}{c} = \frac{4g\,dm(f-m)}{l}$$

sey. Diese Gleichung ist in Rücksicht der veränderlichen Gröſsen homogen, und wird daher integrabel, wenn man $z = w\,(f-m)$ setzt, wo $w$ eine neue veränderliche Gröſse ist. Diese Substitution gibt

$$z\,dz = w\,dw\,(f-m)^2 - w^2\,dm\,(f-m),$$

und daher wird die vorige Gleichung

$$w\,dw(f-m)^2 - w^2 dm(f-m) + \frac{2gw\,dm}{c}(f-m) = \frac{4g\,dm(f-m)}{l},$$

$$\text{oder } \frac{w\,dw}{\frac{4g}{l} - \frac{2gw}{c} + w^2} = \frac{dm}{f-m}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist auch

$$= \frac{w\,dw}{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right) + \left(\frac{g}{c} - w\right)^2},$$

oder, wenn man $\frac{g}{c} - w = u$ setzt,

$$= \frac{-\frac{g}{c}\,du}{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right) + u^2} + \frac{u\,du}{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right) + u^2},$$

und, da dieses $= \frac{dm}{f-m}$ seyn soll, so wird

$$\text{Const} - \log(f-m) = -\frac{g}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right)}} \text{Arc. tang} \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right)}}$$
$$+ \log. \sqrt{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2} + u^2\right)},$$

oder, weil $u = \frac{g}{c} - \frac{z}{f-m}$ ist,

$$\text{Const} - \log(f-m) =$$
$$= -\frac{g}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4g}{l} - \frac{g^2}{c^2}\right)}} \text{Arc. tang.} \frac{g(f-m) - cz}{(f-m)\sqrt{\left(\frac{4gc^2}{l} - g^2\right)}}$$
$$+ \log \sqrt{\left[\frac{4g}{l} - \frac{2gz}{c(f-m)} + \frac{z^2}{(f-m)^2}\right]}.$$

Soll also auch hier $z$ verschwinden, wenn $m = 0$ ist, so wird

$$\text{Const} = \log. f - \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{4gc^2}{l} - g^2\right)}} \text{Arc. tang.} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\left(\frac{4c^2}{l} - g\right)}}$$
$$+ \log. \left[2\sqrt{\frac{g}{l}}\right],$$

folglich $\log. \frac{2f.\sqrt{\frac{g}{l}}}{\sqrt{\left(\frac{4g(f-m)^2}{l} - \frac{2gx(f-m)}{c} + x^2\right)}}$

$$= \frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{(4c^2-gl)}} \left\{ \text{Arc. tg.} \frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{(4c^2-gl)}} - \text{Arc. tg.} \frac{g(f-m)-cx}{(f-m).\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\sqrt{(4c^2-gl)}} \right\}$$

oder $\log. \frac{f}{\sqrt{\left\{(f-m)^2 - \frac{xl}{2c}(f-m) + \frac{x^2 l}{4g}\right\}}}$

$$= \frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{(4c^2-gl)}} \text{Arc. tang.} \frac{x.\sqrt{(4c^2-gl)}}{4(f-m)\frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{l}} - x\sqrt{gl}}.$$

Aus dieser Gleichung würde zwar der Werth von $x$ schwer zu entwickeln seyn, indeſs kann man doch die Hauptumstände der Bewegung daraus bestimmen. Anfangs wächst $x$ mit $m$ zugleich, und erreicht, wie die Differentialgleichung zeigt, seinen gröſsten Werth, wenn

$$x = \frac{2c.(f-m)}{l} \text{ ist.}$$

Bei diesem Werthe von $x$ läſst sich der zugehörige Werth von $m$ aus der allgemeinen Gleichung zwischen $m$ und $x$ bestimmen; denn man findet, indem man für $x$ jenen Werth substituirt,

$$\log. \frac{f\sqrt{gl}}{(f-m).c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl}-1\right)}} \text{Arc. tang.} \sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl}-1\right)},$$

oder, wenn ich $\sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl}-1\right)} = \text{tang}\,\zeta$ setze,

$$\log. \frac{2f \text{Cos}\,\zeta}{f-m} = \frac{\zeta}{\text{tang}\,\zeta},$$

$$\text{folglich } (f-m) = 2f \text{Cos}\,\zeta.e^{-\frac{\zeta}{\text{tang}\,\zeta}}$$

$$\text{und } m = f - 2f \text{Cos}\,\zeta.e^{-\frac{\zeta}{\text{tang}\,\zeta}}.$$

Wenn $m$ diesen Werth erreicht hat, so ist die Geschwindigkeit am gröfsten, und es fängt also auch hier die Geschwindigkeit früher an, abzunehmen, als die sinkende Oberfläche die Lage erreicht, die sie beim Gleichgewichte hatte.

Wächst nun $m$ noch mehr, so wird sehr bald, weil zugleich $z$ abnimmt, $f - m = \frac{zl}{4c}$, und alsdann wird der in der Gleichung vorkommende Kreisbogen $= \frac{1}{2}\pi$, $= 90^\circ$, weil seine Tangente unendlich wird.

Indem nun $m$ noch mehr wächst, und $z$ abnimmt, wird der Kreisbogen gröfser als $90^\circ$, und wächst, bis $z$ zum zweitenmal verschwindet. Für diesen Augenblick ist seine Tangente $= 0$, und der Bogen $= \pi = 180^\circ$, und man findet für den zugehörigen Werth von $m$ die Gleichung

$$\log. \frac{f}{(m-f)} = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl} - 1\right)}} = \frac{\pi}{\tang \zeta},$$

also für die gröfste Ausweichung unterwärts

$$m = f + f \cdot e^{-\frac{\pi}{\tang \zeta}}.$$

Die Zeit einer Oscillation aber möchte sich wohl sehr schwer bestimmen lassen.

350. Die Zweideutigkeit der hier allenthalben vorkommenden Wurzelgröfsen könnte hier bei einigen der angeführten Resultate scheinbare Zweifel veranlassen; denn da $\sqrt{(f-m)^2} = f - m$ und $= m - f$ seyn kann, so könnte man fragen, ob wirklich die Geschwindigkeit am gröfsten wird, ehe $m = f$ ist. Man kann sich aber leicht von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugen, wenn man die Differentialgleichung betrachtet, denn diese zeigt, dafs für $f = m$, $dz$ negativ wird, also die Geschwindigkeit schon im Abnehmen ist. Für den niedrigsten Punkt, welchen die Oberfläche erreicht, mufs nothwendig $m$ gröfser

als $f$ seyn, daher erhält die Gleichung die angegebene Form.

351. Da tang $\zeta = \sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl} - 1\right)}$ von der Länge der in der Röhre enthaltenen Wassermasse abhängt, so ist bei dieser Hypothese für das Gesetz des Widerstandes die Gröfse der ersten Oscillation nicht gleich grofs bei verschiedenen Werthen von $l$; sondern, wenn in derselben Röhre Wassermassen von ungleicher Länge in oscillirende Bewegung gesetzt werden, und es war die anfängliche Erhebung der Oberfläche $= f$ über den Stand der Ruhe immer gleich grofs, so wird die erste Ausweichung unterwärts desto kleiner, je gröfser die Länge der Wassermasse ist.

Hingegen, wenn in einerlei Röhre dieselbe Wassermasse mehrmals in oscillirende Bewegung gesetzt wird, so hat man in Rücksicht auf die verschiedene anfängliche Erhebung der Oberfläche $= f$ die Regel: In einerlei Röhre ist die Gröfse der ersten Oscillation der Gröfse der anfänglichen Erhebung der Oberfläche proportional, wenn bei verschiedenen Versuchen die oscillirende Wassermasse einerlei Länge hat.

Hieraus folgt auch allgemein, dafs, wenn $f$ und $c$ einerlei Werth behalten, die merklichen Oscillationen desto früher aufhören, je gröfser $l$ ist — eine Regel, welche ganz von derjenigen abweicht, die wir fanden, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional war.

352. Wenn $l$ nur wenig kleiner als $\frac{4c^2}{g}$ ist, so wird $\sqrt{\left(\frac{4c^2}{gl} - 1\right)}$ eine sehr kleine Gröfse, und wenn wir sie, wie vorhin, $=$ tang $\zeta$ setzen, so ist $\zeta$ ein sehr kleiner Bo-

gen. Wird dieser Bogen so klein, daſs man Tangente und Bogen als gleich betrachten kann, so findet die gröſste Geschwindigkeit Statt, wenn $m = f - \frac{2f}{e}$ ist, oder $m = f \cdot \frac{0,718}{2,718}$, weil $e = 2,718 \ldots$ ist. Für die Gröſse der ersten Oscillation aber, oder den Werth von $m$ beim Anfange des Rückganges findet man $m = f + \frac{f}{e^{\frac{\pi}{\zeta}}}$, und, wenn $\zeta = 0$ ist, $m = f$.

Eigentlich müssen für $l = \frac{4c^2}{g}$ oder $l > \frac{4c^2}{g}$ die Formeln anders integrirt werden; man findet aber auch dann, daſs $x$ nicht anders zum zweitenmal $= 0$ werden kann, als indem $m = f$ wird.

Wenn also $l = \frac{4c^2}{g}$ oder gröſser ist, so findet gar keine Oscillation Statt, sondern die gehobne Oberfläche sinkt blos bis zu dem Punkte herab, wo sie sich im Zustande des Gleichgewichts befinden muſs, und ruhet hier.

Auf solche Folgerungen führt die Hypothese, daſs der Widerstand der Geschwindigkeit selbst proportional sey. Andre Voraussetzungen würden in allzuverwickelte Rechnungen führen; aber man sieht hieraus, daſs Versuche über Oscillationen des Wassers in Röhren uns wohl über das Gesetz, wie der Widerstand von der Geschwindigkeit abhängt, belehren könnten.

353. Problem 69. Das Wasser bewegt sich in einer nicht überall gleich weiten Röhre so fort, daſs es an einem Ende ausflieſst, und kein neuer Zufluſs am andern Ende Statt findet; man sucht die Formeln für die Bewegung, wenn hier eben das Gesetz des Widerstandes wie im vorigen Probleme gilt.

Auflösung. Da die Röhre nicht überall gleich weit ist, so ist auch der Widerstand an verschiedenen Stellen ungleich. Man kann indeſs den Begrif eines Exponenten des Widerstandes auch hier beibehalten, und sich für jeden gegebnen Querschnitt eine Geschwindigkeit $= c$ denken, bei welcher in diesem Querschnitte der Widerstand der Schwere gleich würde. Hier ist also $c$ für jeden Querschnitt eine andre Gröſse, welche für jede Stelle aus der Form der Röhre bestimmt werden muſs.

Es stelle $AO$ (Fig. 50.) die Richtungslinie der Röhre vor, welche, wie man will, gekrümmt seyn mag (welches, wofern nur die Krümmungen nicht plötzlich sind, die Bewegung nicht ändert), und $\alpha\omega$ sey die Scale der Höhen. $Oo$ sey die Oefnung, durch welche das Wasser ausflieſst, und ihre Gröſse $= ff$. Am Ende der Zeit $= t$ nehme das in der Röhre noch übrige Wasser den Raum $OMmo$ ein, und es sey $OM = m$, $M\mu = \mu =$ der Höhe dieses Punktes; die Geschwindigkeit, mit welcher in diesem Augenblicke das Wasser durch die Oefnung $Oo$ flieſst, sey $= v$. Ferner sey für irgend einen andern Querschnit $zv$ die Länge $Oz = s$, die Höhe $z\pi = z$, die Gröſse dieses Querschnitts $= \omega^2$, also die Geschwindigkeit in demselben am Ende der Zeit $= t$, $x = \frac{vf^2}{\omega^2}$, und der Exponent des Widerstandes für diesen Querschnitt $= c$. Wenn also der Widerstand durch die Gröſse $\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}$, wofür ich hier gleich $\frac{x^2 + \lambda x}{c^2 + \lambda c}$ setzen will, ausgedrückt wird, so ist, weil auſser dem Widerstande und der Schwere keine beschleunigende Kraft vorkommt, das Differential der Wirkung der beschleunigenden Kräfte $= - dz + \frac{v^2 f^4 + \lambda v f^2 \omega^2}{\omega^4 (c^2 + \lambda c)} . ds$, für den Augenblick, da die Geschwindigkeit des Ausflusses $= v$ ist, und für den Querschnitt $zv$. Setzt man also diesen Werth für $Pdx + Qdy + Rdz$ in die allgemeine Gleichung (§. 283.), so wird

$$2g\,dp = 2g\left[-dz + \frac{x^2 + \lambda x}{c^2 + \lambda c}\,ds\right] - x\,dx - ds\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

und weil hier $x = \frac{vf^2}{\omega^2}$, $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{f^2}{\omega^2}\cdot\frac{dv}{dt}$,

und (da $t$ als beständig angesehen wird)

$$dx = -\frac{2vf^2\,d\omega}{\omega^3},\text{ so ist}$$

$$2g\,dp = -2g\left[dz - \frac{f^4v^2 + \lambda v\omega^2 f^2}{\omega^4(c^2+\lambda c)}\,ds\right] + \frac{2f^4v^2 d\omega}{\omega^5} - \frac{f^2 ds.dv}{\omega^2 dt},$$

woraus sich $p$ bestimmen läſst, wenn $\omega$ und $c$ gegebne Functionen von $s$ sind. Man erhält nämlich

$$2gp = \Delta : t - 2gz + 2gf^2\int\frac{f^2v^2 + \lambda v\omega^2}{\omega^4(c^2+\lambda c)}\,.\,ds - \tfrac{1}{2}\frac{f^4v^2}{\omega^4} - \frac{f^2dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega^2},$$

woraus man weitere Bestimmungen ableiten kann, wenn der Druck auf beide Enden der Wassermasse bekannt ist.

Drückt nämlich auf beide Oberflächen blos die Atmosphäre mit dem Drucke $= k$, und ist die Höhe der Oefnung $Oo = o$, so ist hier $2gk = \Delta : t - \frac{1}{2}v^2$.

Für die Oberfläche sey der Werth der Integrale

$$\int\frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{M} \text{ und } \int\frac{f^2v^2 + \lambda v\omega^2}{\omega^4(c^2+\lambda c)}\,ds = \mathfrak{N},$$

so wird für diese, wenn die Gröſse der Oberfläche $Mm$ jetzt $= a^2$ ist,

$$2gk = \Delta : t - 2g\mu - \tfrac{1}{2}\frac{f^4v^2}{a^4} + 2gf^2\mathfrak{N} - f^2\mathfrak{M}\frac{dv}{dt},$$

und daraus findet man für $v$ die Gleichung

$$0 = \tfrac{1}{2}v^2\frac{(a^4 - f^4)}{a^4} - 2g\mu + 2gf^2\mathfrak{N} - f^2\mathfrak{M}\frac{dv}{dt},$$

woraus dann ferner $p$ bestimmt wird.

354. Um diese Gleichung nur auf einen Fall anzuwenden, will ich annehmen, das Wasser flieſse aus dem sehr weiten Gefäſse $ABCD$ (Fig. 62 *b.*) durch die gerade,

überall gleich weite Röhre $DEFG$ aus. Diese Röhre sey unter dem Winkel $= \eta$ gegen den Horizont geneigt, ihre Länge sey $= l$, ihr Querschnitt $= ff$, eben so groſs, als die Oefnung $FG$, wo das Wasser ausflieſst. In diesem Falle lassen sich die Integrale, welche unaufgelöst in der Gleichung vorkommen, bis an $DE$ leicht bestimmen. Denn wenn alle Querschnitte der Ausfluſsröhre gleich und ähnlich sind, so hat man für die bis an $DE$ genommenen Integrale

$$\int \frac{ds}{\omega^2} = \int \frac{ds}{f^2} = \frac{l}{f^2}$$

$$\text{und} \int \frac{f^2 v^2 + \lambda v \omega^2}{\omega^4 (c^2 + \lambda c)} \cdot ds = \frac{(v^2 + \lambda v) \cdot l}{(c^2 + \lambda c) f^2},$$

wenn $c$ hier den Exponenten des Widerstandes für die Ausfluſsröhre bedeutet.

Nimmt man nun ferner an, daſs die Oberfläche $AB$ so groſs ist, daſs sie sich während der Zeit $t$ so gut wie gar nicht senkt, so bleibt der Theil dieser Integrale von $DE$ bis an die Oberfläche während der ganzen Bewegung ungeändert, ich kann daher $\mathfrak{M} = \frac{l}{f^2} + \mathfrak{A}$ setzen, und $\mathfrak{A}$ als unveränderlich betrachten; hingegen darf man

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}\right) \cdot \frac{l}{f^2}$$

setzen, weil in dem sehr weiten obern Gefäſse fast gar kein merklicher Widerstand Statt findet.

Da hier $a^2$ als unendlich groſs gegen $f^2$ betrachtet wird, so gibt die letzte Gleichung des vorigen §.

$$\tfrac{1}{2} v^2 = 2g\mu + \frac{l\,dv}{dt} + \frac{\mathfrak{A} f^2 . dv}{dt} - 2gl \left(\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}\right).$$

Es ist bekannt, daſs bei dem Ausflusse aus einem so weiten Gefäſse die Geschwindigkeit bald unveränderlich, also $dv = 0$ wird: wenn das der Fall ist, so muſs

$$\tfrac{1}{2} v^2 = 2g\mu - 2gl \left(\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}\right) \text{ seyn.}$$

Und diese Gleichung, bei welcher freilich die Voraussetzung einer linearischen Bewegung nicht strenge im Auge behalten ist, kann zur Vergleichung der Theorie mit Versuchen dienen.

Für den Druck $= p$ in irgend einem Punkte der geraden Röhre, dessen Entfernung von $Oo = s$ ist, findet man

$$p = k - z + s\left(\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}\right) = k - z + \frac{s\left(\mu - \frac{v^2}{4g}\right)}{l}.$$

355. Hätte ich das Gesetz des Widerstandes allgemein $\frac{x^k + \lambda x^n}{c^k + \lambda c^n}$ gesetzt, so würde ich für die gleichförmig gewordne Geschwindigkeit die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}v^2 = 2g\mu - 2gl\left(\frac{v^k + \lambda v^n}{c^k + \lambda c^n}\right)$$

gefunden haben, oder wenn der Widerstand blos der Potenz $n$ der Geschwindigkeit proportional ist,

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{2gl \cdot v^n}{c^n} = 2g\mu.$$

356. Diese Formeln lassen sich nun mit Versuchen vergleichen. Denn obgleich unsre Rechnung Voraussetzungen enthält, die bei den Versuchen nicht strenge Statt finden, so läſst sich doch eine ziemlich genaue Uebereinstimmung erwarten. Versuche, welche sich zu dieser Vergleichung schicken, hat vorzüglich Buat eine groſse Menge angestellt, und sie in seinen Principes d'hydraulique, verifiés par un grand nombre d'experiences bekannt gemacht. Buat selbst verglich sie mit der Hypothese, daſs der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sey, fand aber dann noch eine Menge blos empirisch bestimmter Correctionen nöthig. Um diese auf ungewissen Gründen beruhenden Correctionen zu vermeiden, nahm Hr. Woltman im 1. Bande seiner Beiträge zur hydraulischen Architektur eine neue Vergleichung vor, und fand, daſs bei der Bewegung in Röhren

die Formel $\frac{1}{2}v^2 + \frac{2gl.v^n}{c^n} = 2g\mu$ am besten mit der Erfahrung übereinstimme, wenn man $n = \frac{7}{4}$ setzt, indeſs trift das Resultat der Rechnung doch noch nicht so nahe mit den Versuchen zusammen, als man bei der groſsen Genauigkeit der Versuche zu erwarten berechtigt ist. Etwas genauer werden die Versuche durch die Formel

$$\frac{v^2}{4g} + l.\left(\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}\right) = \mu$$

dargestellt; aber auch hier zeigt die Regularität der Abweichung von den Versuchen, daſs dieses Gesetz des Widerstandes nicht völlig das durch die Versuche bestimmte sey: diese Abweichungen werden besonders bei den sehr langsamen Bewegungen merklich. Indeſs, wenn auch die Voraussetzung, daſs der Widerstand sich wie $\frac{v^2 + \lambda v}{c^2 + \lambda c}$ verhalte, nicht völlig richtig ist, so hat doch dieses Gesetz den Vorzug der Einfachheit, und führt selbst auf bequemere Gleichungen, als wenn man den Widerstand $= \frac{v^n}{c^n}$ und für die Potenz $n$ einen Bruch setzte.

557. Ich theile hier eine Vergleichung der Versuche von Buat und Bossut mit diesem Gesetze des Widerstandes mit. Diese Versuche wurden mit Röhren von 1 Zoll, $1\frac{1}{3}$ Zoll, und 2,01 Zoll Durchmesser angestellt: und man findet, daſs die erste Reihe von Versuchen durch unsre Formel am besten ausgedrückt wird, wenn man $\lambda = 12$ und $c = 199$ Zoll setzt. Ist aber für eine Röhre von 1 Zoll Durchmesser $c = 199$, so muſs (nach §. 331.) für eine Röhre von $1\frac{1}{3}$ Zoll Durchmesser $c = 231$ seyn, wenn $\lambda$ denselben Werth behalten, und $c^2 + \lambda c$ der Gröſse $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ proportional seyn soll: für die Röhre von 2,01 Zoll Durchmesser hingegen wird $c = 285$ Zoll. — Bei diesen Versuchen ist alles in Pariser Zollen ausgedrückt, und es ist bei der Berechnung derselben nur noch zu bemerken,

daſs man statt $\frac{v^2}{4g}$, $\frac{v^2}{478}$ setzen muſs, denn wegen der Contraction des Strahls ist die ausflieſsende Wassermenge geringer, und man würde, wenn auch die Ausfluſsröhre gar nicht da wäre, diese doch nur $= \varkappa^2 \sqrt{478} \cdot \mu$ finden, wenn $\varkappa^2$ den Querschnitt der Ausfluſsöfnung bedeutet, und alles in Pariser Zollen ausgedrückt ist.

## Vergleichung
### der Formel mit den Versuchen.

| No. | Länge der Röhre $= l$. | Höhe des Wasserhälters $= \mu$. | Geschwindigkeit nach der Formel $= v$. | Geschwindigkeit nach der Erfahrung. |
|---|---|---|---|---|
| Versuche von Buat<br>Durchmesser der Röhre = 1 Zoll, $c$ = 199 Zoll. | | | | |
| 39 | 117 | 36,000 | 82,54 | 84,945 |
| 40 | 117 | 26,666 | 70,59 | 71,301 |
| 41 | 138,5 | 20,950 | 58,78 | 58,808 |
| 42 | 117 | 18,000 | 57,41 | 58,310 |
| 43 | 138,5 | 6,000 | 29,89 | 29,341 |
| 44 | 737 | 23,700 | 29,78 | 28,669 |
| 45 | 737 | 14,600 | 22,42 | 21,856 |
| 46 | 737 | 13,700 | 21,59 | 20,970 |
| 47 | 737 | 12,320 | 20,25 | 19,991 |
| 48 | 737 | 8,960 | 16,66 | 16,625 |
| 49 | 737 | 8,960 | 16,66 | 16,284 |
| 50 | 737 | 7,780 | 15,25 | 15,112 |
| 51 | 737 | 5,930 | 12,82 | 13,315 |
| 52 | 737 | 4,200 | 10,21 | 10,671 |
| 53 | 737 | 4,200 | 10,21 | 10,441 |
| 54 | 138,5 | 0,700 | 8,30 | 8,689 |
| 55 | 737 | 0,500 | 2,00 | 3,625 |
| 56 | 737 | 0,150 | 0,67 | 1,589 |

| No. | Länge der Röhre $= l$. | Höhe des Wasserhälters $= \mu$. | Geschwindigkeit nach der Formel $= v$. | Geschwindigkeit nach der Erfahrung. |
|---|---|---|---|---|
| Versuche von Bossut. Durchmesser der Röhre = 1 Zoll, $c = 199$ Zoll. | | | | |
| 57 | 600 | 12 | 22,53 | 22,282 |
| 58 | 600 | 12 | 11,25 | 12,223 |
| Durchmesser der Röhre = $1\frac{1}{3}$ Zoll, $c = 251$ Zoll. | | | | |
| 59 | 360 | 24 | 48,73 | 48,534 |
| 60 | 720 | 24 | 35,23 | 34,473 |
| 61 | 360 | 12 | 33,27 | 33,160 |
| 62 | 1080 | 24 | 28,52 | 28,075 |
| 63 | 1440 | 24 | 24,35 | 24,004 |
| 64 | 720 | 12 | 23,63 | 23,360 |
| 65 | 1800 | 24 | 21,43 | 21,032 |
| 66 | 2160 | 24 | 19,26 | 18,896 |
| 67 | 1080 | 12 | 18,89 | 18,945 |
| 68 | 1440 | 12 | 15,95 | 16,128 |
| 69 | 1800 | 12 | 13,92 | 14,066 |
| 70 | 2160 | 12 | 12,46 | 12,562 |
| Durchmesser der Röhre = 2,01 Zoll, $c = 285$ Zoll. | | | | |
| 71 | 360 | 24 | 57,53 | 58,903 |
| 72 | 720 | 24 | 42,96 | 43,000 |
| 73 | 360 | 12 | 39,61 | 40,322 |
| 74 | 1080 | 24 | 35,41 | 35,765 |
| 75 | 1440 | 24 | 30,45 | 30,896 |
| 76 | 720 | 12 | 29,14 | 29,215 |
| 77 | 1800 | 24 | 27,01 | 27,470 |
| 78 | 2160 | 24 | 24,41 | 24,731 |
| 79 | 1080 | 12 | 23,78 | 23,806 |
| 80 | 1440 | 12 | 20,25 | 20,707 |
| 81 | 1800 | 12 | 17,82 | 18,304 |
| 82 | 2160 | 12 | 16,00 | 16,377 |

Für die Versuche von Couplet *) stimmt die Formel, wenn man *c* nach der oben angegebnen Regel bestimmt, nicht so gut, weil sie bei kleinen Geschwindigkeiten *v* zu klein gibt.

Dieser Fehler liefse sich zwar vermeiden, wenn man $\lambda$ kleiner annähme; aber alsdann würde bei gröfsern Werthen von *v* die Abweichung der Formel von den Versuchen zu grofs. Indefs ist, dieser Abweichungen ungeachtet, diese Formel unter den einfachern doch diejenige, welche die Versuche am besten ausdrückt, und bei den Versuchen mit Röhren von $1\frac{1}{3}$ und 2,01 Zoll Durchmesser stimmt sie fast besser, als die sehr verwickelte Buatsche Formel mit den Versuchen überein.

Bei sehr weiten Röhren sollte man den Widerstand wohl nicht mehr nach den hier betrachteten Formeln berechnen, denn die Voraussetzung, dafs die Geschwindigkeit in jedem Punkte eines Querschnitts gleich grofs sey, oder dafs die ganze Wassermasse sich wie ein fester biegsamer Körper in der Röhre fortschiebe, wird desto unrichtiger, je weiter die Röhre ist. Die Wassertheilchen, welche sich in der Axe der Röhre befinden, werden sich wohl immer geschwinder bewegen, als die, welche die Wände berühren, und der Widerstand, welchen die an den Wänden langsamer fortrückenden Theilchen leiden, ist etwas geringer, als er seyn würde, wenn die ganze Wassermasse mit einer gleichen mittlern Geschwindigkeit fortrückte: dagegen aber leiden auch die in der Mitte der Röhre befindlichen Theilchen noch einen besondern Widerstand, weil sie neben den langsamer fliefsenden vorbeieilen, und sich also von diesen losreifsen müssen. Die genaue Betrachtung aller dieser Umstände würde viele Schwierig-

---

*) Woltmans Beitr. 1. B. S. 161. — Die Formel gibt, wenn man bei der 5 Zoll weiten Röhre $c = 452$ setzt, alle Geschwindigkeiten um 1,4 Zoll kleiner, als die Beobachtung.

keit haben: die Bewegung ist dann auch nicht mehr so beschaffen, wie wir sie hier, dem Begriffe der linearischen Bewegung gemäfs, verlangen.

359. Die bisherigen Untersuchungen noch durch die Betrachtung der Voraussetzung, dafs der Widerstand auch vom Drucke abhänge, zu vervollständigen, scheint eine unnöthige Arbeit zu seyn. Die Formeln, auf welche man alsdann kommt, sind verwickelter, als die bisherigen, und erlauben wenig Anwendungen; auch scheint die Erfahrung den Einflufs des Druckes auf den Widerstand wenigstens als unbedeutend anzugeben. Liefsen sich genaue Versuche über diesen Gegenstand im luftleeren Raume anstellen, so könnte man entscheiden, ob man auf den Druck bei Bestimmung des Widerstandes Rücksicht nehmen müsse; denn da im luftvollen Raume der Druck um das Gewicht einer 32 Fufs hohen Wassersäule gröfser ist, als im Vacuo, so müfste bei sonst gleichen Umständen der Widerstand im luftleeren Raume geringer seyn.

## Sechster Abschnitt.

### Von der Bewegung des Wassers in Röhren, wenn die Wärme nicht überall gleich ist.

---

360. Problem 70. Das Wasser bewegt sich in einer Röhre, wo die Temperatur an verschiedenen Stellen ungleich ist; man sucht die allgemeinen Gesetze dieser Bewegung zu bestimmen, wenn vorausgesetzt wird, daſs das Wasser an jeder Stelle sogleich die dort Statt findende Temperatur annehme, und diese für jede Stelle der Röhre gegeben sey.

Auflösung. Die Röhre $AO$ (Fig. 63.) sey, wie man will, gekrümmt, und ihre Querschnitte ungleich; man nenne die Länge der Röhre bis an einen unbestimmten Querschnitt $Ss$, $AS = s$, die Gröſse dieses Querschnitts $= \omega^2$, und die Höhe des Punktes $S$ über einer bestimmten horizontalen Ebene $= z$; die Curve $\alpha\sigma\omega$ stelle die Scale der Höhen vor, daſs also $S\sigma = z$ ist, und $z$ und $\omega^2$ sind bekannte Functionen von $s$. Es sey ferner in dem Querschnitte $Ss$ die Dichtigkeit $= q$, so ist auch $q$ eine Function von $s$, weil wir voraussetzen, daſs an derselben Stelle der Röhre die Temperatur ungeändert bleibt, und das durch $Ss$ strömende Wasser sogleich diese Temperatur, also auch die Dichtigkeit $= q$ annimmt. Am Ende der Zeit $= t$ flieſse das Wasser durch den Querschnitt $Ss$ mit der Geschwindigkeit $= x$, und übe den Druck $= p$ aus.

Da hier $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$ ist, so geben die Gleichungen des 254. §. $\left(\frac{d.qx\omega^2}{ds}\right) = 0$, und wenn blos die Schwere auf den flüssigen Körper wirkt,

$$\frac{2g\,dp}{q} = -2g\,dz - x\,dx - ds\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daſs $q\varkappa\omega^2 = \Gamma : t$ sey, oder diese Gröſse in einem bestimmten Augenblicke in der ganzen Röhre einerlei Werth erhalte. Wenn also an einer bestimmten Stelle der Röhre die Dichtigkeit $= 1$, der Querschnitt der Röhre $= ff$, und am Ende der Zeit $t$ hier die Geschwindigkeit $= v$ ist, so ist für diesen Zeitpunkt auch allgemein $q\varkappa\omega^2 = vf^2$ oder $\varkappa = \frac{vf^2}{q\omega^2}$. Man kann also, weil $q$ und $\omega^2$ von $t$ unabhängig sind, $v$ aber nicht von $s$ abhängt, $\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) = \frac{f^2 dv}{q\omega^2 dt}$ setzen, und erhält jetzt für $dp$ die Gleichung

$$2g\,dp = -2qg\,dz - q\varkappa\,d\varkappa - \frac{f^2 dv.\,ds}{\omega^2 dt}, \text{ folglich}$$

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2}q\varkappa^2 + \tfrac{1}{2}\int \varkappa^2 dq - \frac{f^2 dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega^2}, \text{ oder}$$

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4 v^2}{2q\omega^4} + \tfrac{1}{2}f^4 v^2\int\frac{dq}{q^2\omega^4} - \frac{f^2 dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega^2}.$$

Um aus dieser Gleichung die Umstände der Bewegung zu bestimmen, muſs der Druck in zwei verschiedenen Querschnitten bekannt seyn: dann läſst sich die unbestimmte Gröſse $\Delta : t$ wegschaffen, und eine bestimmte Gleichung für $v$ finden.

361. Bei Röhren, die überall gleich weit sind, wird $\int\frac{dq}{q^2\omega^4} = -\frac{1}{q\omega^4}$ und $\int\frac{ds}{\omega^2} = \frac{s}{\omega^2}$, also

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{v^2}{q} - \frac{s\,dv}{dt}.$$

362. Da wir an einer bestimmten Stelle der Röhre $q = 1$ gesetzt haben, so bedeutet nun $p$ die Höhe einer Wassersäule von eben der Dichtigkeit, oder eben der Temperatur, welche in jenem Querschnitte der Röhre Statt findet. Will man hingegen allgemein eine gewisse Temperatur festsetzen, bei welcher die Dichtigkeit $= 1$ seyn soll,

so mufs man denjenigen Punkt der Röhre aufsuchen, wo diese Temperatur Statt findet, und die Geschwindigkeit dort $= v$ nennen.

363. Bei den Untersuchungen über das Gleichgewicht flüssiger Körper fanden wir, dafs ein Fluidum nicht in Ruhe bleiben kann, wenn nicht die Dichtigkeit in allen Punkten, wo einerlei Druck Statt findet, gleich grofs ist, oder bei flüssigen Körpern, auf welche blos die Schwere wirkt, wenn nicht in gleichen Höhen die Dichtigkeit überall gleich ist. Es ist daher wohl der Mühe werth, die Bewegung, welche alsdann entsteht, für einige bestimmtere Fälle genauer zu untersuchen. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, da eine kreisförmige vertical gestellte Röhre fortdauernd an einer Seite wärmer erhalten wird, als an der andern. $ASBD$ (Fig. 64.) sey eine solche Röhre, und $ACB$ ihr horizontaler Durchmesser. Die Temperatur sey in $A$ sehr hoch, und nehme ab, je weiter man sich an beiden Seiten von $A$ nach $B$ zu entfernt, in $B$ aber sey die Wärme am kleinsten.

Da wir annehmen, dafs die Röhre sehr eng sey, so können wir auch voraussetzen, dafs das Wasser, indem es sich bewegt, an jeder Stelle die Temperatur der Röhre erhalte: die Temperatur jedes Punktes der Röhre aber betrachten wir als während der ganzen Bewegung unveränderlich.

364. Problem 71. Wenn die kreisförmige, überall gleich weite und vertical gestellte Röhre $ASBD$ (Fig. 64.) immerfort in $A$ wärmer als in $B$ erhalten wird, und diese Röhre ist mit Wasser gefüllt, diese Bewegung des Wassers zu bestimmen, wenn dasselbe in jedem Punkte die Temperatur der Röhre sogleich annimmt.

Auflösung. Der Halbmesser $CA$ des Kreises sey $= c$, die Weite der Röhre sey überall $= ff$, und der Durchmesser $AB$, in welchem die gröfste Verschiedenheit der Temperaturen Statt findet, sey horizontal. Da die

Wärme in $A$ am gröſsten ist, so ist die Dichtigkeit hier am kleinsten, in $B$ hingegen am gröſsten: man setze die mittlere Dichtigkeit $= 1$, die in $A$ Statt findende $= 1 - \alpha$, und nehme an, daſs für jeden Punkt $S$, wo der Winkel $ACS = \varphi$ ist, die Dichtigkeit $q = 1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi$ sey, also in $B$, $q = 1 + \alpha$.

Die Höhe des Punktes $S$ über der Horizontallinie $AB$ ist $PS = z = c \operatorname{Sin} \varphi$, und der Bogen $AS = s = c\varphi$. Wenn nun am Ende der Zeit $= t$ hier die Geschwindigkeit $= x$ und der Druck $= p$ ist, an derjenigen Stelle aber, wo die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt worden, die Geschwindigkeit $= v$, so hat man $x = \frac{v}{q} = \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi}$, es läſst sich also nun der Druck an dieser Stelle aus der Gleichung des 361. §. bestimmen. Man hat hier

$\int q\,dz = c\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi (1 - \alpha \operatorname{Cos}\varphi) = c \operatorname{Sin}\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha c\varphi - \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin} 2\varphi$,

foglich

$$2gp = \Delta : t - 2gc(\operatorname{Sin}\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi) - \frac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos}\varphi} - \frac{c\varphi \,.\, dv}{dt}.$$

In dem Punkte $A$ ist also, weil hier $\varphi = 0$,

$$2gp = \Delta : t - \frac{v^2}{1 - \alpha},$$

in $B$ aber, wo $\varphi = \pi = 180^\circ$,

$$2gp = \Delta : t + \alpha g c \pi - \frac{v^2}{1 + \alpha} - \frac{\pi c\, dv}{dt}.$$

Man kann aber auch für den Punkt $A$, $\varphi = 2\pi$ setzen, und erhält dann für den Druck in $A$

$$2gp = \Delta : t + 2\alpha g c \pi - \frac{v^2}{1 - \alpha} - \frac{2\pi c\, dv}{dt}.$$

Da nun dieser Druck nothwendig einerlei seyn muſs mit dem, welchen wir vorhin für denselben Punkt fanden, so muſs $2\alpha g c \pi - \frac{2\pi c\, dv}{dt} = 0$, oder $\alpha g\, dt = dv$ und $v = \alpha g t$ seyn. Wenn also im Anfange der Zeit $t$ die Geschwindigkeit $= 0$ war, so wächst sie in eben dem Verhältnisse, wie die Zeit selbst.

Für jede Stelle $S$ der Röhre aber findet man am Ende der Zeit $t$ den Druck

$$p = \Sigma : t - c \operatorname{Sin} \phi + \tfrac{1}{2} \alpha c (\phi + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\phi) - \frac{\alpha^2 g t^2}{2(1 - \alpha \operatorname{Cos} \phi)} - \tfrac{1}{2} \alpha c \phi$$

oder $$p = \Sigma : t - c(\operatorname{Sin} \phi - \tfrac{1}{4} \alpha \operatorname{Sin} 2\phi) - \frac{\alpha^2 g t^2}{2(1 - \alpha \operatorname{Cos} \phi)},$$

der Druck wird also

in $A$, wo $\phi = 0$ - - $p = \Sigma : t - \frac{\alpha^2 g t^2}{2(1 - \alpha)}$,

in $E$, wo $\phi = 90^\circ$ - - $p = \Sigma : t - c - \frac{\alpha^2 g t^2}{2}$,

in $B$, wo $\phi = 180^\circ$ - - $p = \Sigma : t - \frac{\alpha^2 g t^2}{2(1 + \alpha)}$,

in $D$, wo $\phi = 270^\circ$ - - $p = \Sigma : t + c - \frac{\alpha^2 g t^2}{2}$.

365. Der Druck war also im Anfange der Zeit $t$, da der flüssige Körper noch in Ruhe war, in $E$ am kleinsten, nahm aber gegen $B$ hin langsamer zu, als gegen $A$ hin, und das Wasser mufste also anfangen, nach der Richtung $AEB$ fortzufliefsen. Sucht man nämlich für $t = 0$ den Druck in zwei gleich weit von $E$ liegenden Punkten, wo für den einen $\phi = 90^\circ - \gamma$, für den andern $\phi = 90^\circ + \gamma$ ist, so findet man für jenen $p = \Sigma : t - c \operatorname{Cos} \gamma + \frac{1}{4} \alpha c . \operatorname{Sin} 2 g$, für diesen $p = \Sigma : t - c \operatorname{Cos} \gamma - \frac{1}{4} \alpha c . \operatorname{Sin} 2 \gamma$, also, wenn $\gamma < 90^\circ$ ist, in jenem Punkte $p$ gröfser, als in diesem. Nimmt man hingegen $\gamma$ gröfser als $90^\circ$, so wird $\operatorname{Sin} 2\gamma$ negativ, und folglich wird der Druck in jedem Punkte des Quadranten $BD$ gröfser, als in dem gleich hoch liegenden Punkte des Quadranten $DA$.

366. Diese Bewegung nach der Richtung $AEBD$ wird gleichförmig beschleunigt, und die Beschleunigung ist desto gröfser, je erheblicher der Unterschied der in $A$ und $B$ Statt findenden Wärme ist. Hätte das Wasser in $A$ eine Wärme von 80 Gr. Reaum., in $B$ aber beinahe die

Kälte des Eises, so würde $\alpha$ etwa $= \frac{1}{30}$, folglich $v = \frac{1}{30} g t$, ungefähr $= t \cdot \frac{1}{2}$ Fuſs seyn: das Wasser würde sich also dann am Ende der ersten Minute schon mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuſs in einer Secunde fortbewegen, wenn nicht wegen der Mittheilung der Wärme die Temperatur allmählig immer gleichförmiger würde. Diesen Umstand könnte man mit in Rechnung bringen, wenn man annähme, daſs $\alpha$ nach und nach kleiner würde; aber da diese Mittheilung der Wärme bei verschiedenen Körpern ungleich ist, so läſst sich hierüber wohl nichts Genaues im Allgemeinen bestimmen. Das aber ist wenigstens wohl gewiſs, daſs das Wasser eine sehr schnelle Bewegung annehmen wird, wenn die Wärme in *A*, eine lange Zeit durch, erheblich gröſser, als in *B* ist.

367. Der Druck, welchen die Röhre in jedem Punkte leidet, wird durch die vorigen Formeln noch nicht vollständig bestimmt, weil sie noch die willkürliche Function $\Sigma : t$ enthalten. Jene Formeln zeigen indeſs, daſs, sobald die Bewegung angefangen hat, der Druck in *B* allemal gröſser, als in *A* ist. Soll für einen gewissen Zeitpunkt der Druck völlig bestimmt werden, so muſs für eben diesen Augenblick der Druck an einer bestimmten Stelle gegeben seyn: er sey am Ende der Zeit $t$ im höchsten Punkte in $E = 0$, so ist für diesen Augenblick $\Sigma : t = c + \frac{1}{2}\alpha^2 g t^2$, folglich in *D* der Druck $= 2c$, in *B* aber $= c + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3 g t^2}{1+\alpha}$.

368. Ich nahm hier an, daſs die gröſste und kleinste Wärme an den beiden Enden des Horizontaldurchmessers Statt finde — welcher Zustand zu Bewirkung der Bewegung am vortheilhaftesten ist. Wäre der höchste Punkt *E* am meisten erwärmt gewesen, und die Wärme in allen von *E* gleich weit entfernten Punkten gleich groſs, so würde gar keine Bewegung entstehen, sondern das Wasser, wenn es anfangs in Ruhe war, fortdauernd ruhen. Hieraus folgt auch, daſs die Bewegung nicht lange beschleunigt werde,

wenn zwar anfangs die Wärme in *A* am gröſsten war, aber diese Wärme nicht unterhalten wird; denn nun wird das fortflieſsende Wasser den höher liegenden Punkten *S*, *E* Wärme mittheilen, und das in *B* abgekühlte Wasser wird die tiefer liegenden erkälten, die gröſste Wärme wird also immer mehr nach *E*, die kleinste nach *D* fortrücken, und die Beschleunigung immer mehr abnehmen.

369. Problem 72. Es sey, wie im vorigen Probleme, die vertical gestellte kreisförmige Röhre in *A* am stärksten, in *B* am wenigsten erwärmt, aber die Röhre sey nicht überall gleich weit, man sucht die Bewegung des Wassers, womit die Röhre ganz angefüllt ist, zu bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser des Kreises $CA = CB$ (Fig. 64.) sey $= c$, die Dichtigkeit des Wassers in *A* sey $= 1 - \alpha$, in $B = 1 + \alpha$, an jeder unbestimmten Stelle *S* aber $= 1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi$, wenn der Winkel $ACS = \varphi$ ist. In *E* und *D* sey die Weite der Röhre $= ff$, in $A = ff(1-\beta)$, und allgemein in jedem Punkte $S = \omega^2 = f^2(1 - \beta \operatorname{Cos} \varphi)$, endlich sey am Ende der Zeit $= t$ in *E* und *D*, wo die Dichtigkeit $= 1$ ist, die Geschwindigkeit $= v$, also in *S* die Geschwindigkeit $s = \dfrac{v}{(1-\alpha \operatorname{Cos} \varphi)(1 - \beta \operatorname{Cos} \varphi)}$, wie die erste Gleichung des 360. §. zeigt. Die dortige Gleichung für den Druck *p* war

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2} q s^2 + \int s^2 dq - \frac{f^2 dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega^2}.$$

Da hier $z = c . \operatorname{Sin} \varphi$ und $q = 1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi$ ist, so wird wieder

$$\int q\,dz = c \operatorname{Sin} \varphi - \tfrac{1}{2}\alpha c \varphi - \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin} 2\varphi,$$

das Integral $\int \frac{ds}{\omega^2}$ aber wird

$$= \int \frac{ds}{f^2(1 - \beta \operatorname{Cos} \varphi)} = \frac{c}{f^2}\int\frac{d\varphi}{1 - \beta \operatorname{Cos} \varphi},$$

$$= \frac{c}{f^2 \cdot \sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. Sin. } \left[\frac{\sqrt{(1-\beta^2)} \operatorname{Sin} \varphi}{1-\beta \operatorname{Cos} \varphi}\right] ^{*)},$$

ferner, da $dq = \alpha \, d\varphi \operatorname{Sin} \varphi$,

$$\int s^2 dq = \alpha v^2 \int \frac{d\varphi \operatorname{Sin} \varphi}{(1-\alpha \operatorname{Cos} \varphi)^2 (1-\beta \operatorname{Cos} \varphi)^2} ^{**)},$$

$$= \frac{\alpha v^2}{(\alpha-\beta)^2} \left[\frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta \operatorname{Cos} \varphi}{(1-\alpha \operatorname{Cos} \varphi)(1-\beta \operatorname{Cos} \varphi)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \log. \frac{1-\beta \operatorname{Cos} \varphi}{1-\alpha \operatorname{Cos} \varphi}\right].$$

---

*) Setzt man nämlich $\operatorname{Cos} \phi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, so wird

$$\int \frac{d\phi}{1-\beta \operatorname{Cos} \phi} = \int \frac{2\,dx}{1-\beta+x^2(1+\beta)} = \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. tg. } \frac{x(1+\beta)}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. tang. } \left(\frac{\sqrt{(1+\beta)} \cdot \sqrt{(1-\operatorname{Cos} \phi)}}{\sqrt{(1-\beta)} \cdot \sqrt{(1+\operatorname{Cos} \phi)}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. tang. } \left(\frac{\sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)}} \cdot \text{tang. } \tfrac{1}{2}\phi\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. Sin. } \left(\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi \cdot \sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta \operatorname{Cos} \phi)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ Ang. Sin. } \left(\frac{\operatorname{Sin} \phi \cdot \sqrt{(1-\beta^2)}}{1-\beta \operatorname{Cos} \phi}\right),$$

weil, wenn $\text{Ang. Sin.} \left(\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi \cdot \sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta \operatorname{Cos} \phi)}}\right) = \psi$ heiſst,

$$\operatorname{Sin} 2\psi = 2 . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\phi \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta \operatorname{Cos} \phi}} \times \operatorname{Cos} \psi = \frac{\operatorname{Sin} \phi \cdot \sqrt{(1-\beta^2)}}{1-\beta \operatorname{Cos} \phi}$$

ist.

**) Da $d\phi \operatorname{Sin} \phi = -d . \operatorname{Cos} \phi$ ist, so kann man, indem $\operatorname{Cos} \phi = -y$ gesetzt wird,

$$\frac{d\phi \operatorname{Sin} \phi}{(1-\alpha \operatorname{Cos} \phi)^2 \cdot (1-\beta \operatorname{Cos} \phi)^2} = \frac{dy}{(1+\alpha y)^2 (1+\beta y)^2}$$

setzen, und durch Zerlegung in einfache Brüche findet man dieses Differential:

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{\alpha^2 dy}{(1+\alpha y)^2} + \frac{\beta^2 dy}{(1+\beta y)^2} - \frac{2\alpha^2\beta}{(\alpha-\beta)} \cdot \frac{dy}{(1+\alpha y)} + \frac{2\alpha\beta^2}{(\alpha-\beta)} \cdot \frac{dy}{(1+\beta y)}\right),$$

woraus sich leicht das Integral bestimmen läſst.

Man findet also für den Druck in $A$, wenn $\varphi = 0$ ist,

$$2gp = \Delta : t - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{(1-\alpha)(1-\beta)^2}$$
$$+ \frac{\alpha v^2}{2(\alpha-\beta)^2} \left\{ \frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \log. \frac{1-\beta}{1-\alpha} \right\}.$$

Für eben diesen Punkt aber findet man auch, wenn man $\varphi = 2\pi$ und Ang. Sin. $\frac{\sqrt{(1-\beta^2)} . \operatorname{Sin}\varphi}{1-b\operatorname{Cos}\varphi} = 2\pi$ setzt,

$$2gp = \Delta : t + 2\pi . \alpha g c . - \frac{v^2}{2(1-\alpha)(1-\beta)^2} - \frac{2\pi c dv}{dt . \sqrt{(1-\beta^2)}}$$
$$+ \frac{\alpha v^2}{2(\alpha-\beta)^2} \left\{ \frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)} \log. \frac{1-\beta}{1-\alpha} \right\}.$$

Und da beide Werthe gleich seyn müssen, so ist

$$\alpha g dt . \sqrt{(1-\beta^2)} = dv \text{ und } v = \alpha g t \sqrt{(1-\beta^2)},$$

wenn für $t = 0$, $v = 0$ war.

370. Die Ungleichheit der Weite der Röhre verursacht also, wenn die Gröfse der Querschnitte dem angenommenen Gesetze gemäfs ist, eine Verminderung der Geschwindigkeit, und es ist hiebei gleichgültig, ob die Röhre in $A$ oder in $B$ am weitesten ist. Wäre $\beta = 1$, also in $A$ oder $B$ der Querschnitt der Röhre $= 0$, so entstände gar keine Bewegung, wie sich schon von selbst versteht.

371. Wenn $\beta = \alpha$ oder die Dichtigkeit allenthalben der Weite der Röhre proportional ist, so wird

$$\int z^2 dq = \frac{-v^2}{3(1-\alpha\operatorname{Cos}\varphi)^3} \text{ und } z^2 q = \frac{v^2}{(1-\alpha\operatorname{Cos}\varphi)^3},$$

$$\text{folglich } -\tfrac{1}{2} q z^2 + \tfrac{1}{2}\int z^2 dq = -\tfrac{2}{3} . \frac{v^2}{(1-\alpha\operatorname{Cos}\varphi)^3},$$

$$\text{und } v \text{ wird nun } = \alpha g t \sqrt{(1-\alpha^2)}.$$

372. Diese Untersuchung zeigt im Allgemeinen, wie die Bewegung verschieden ist, bei Röhren, deren Querschnitte alle gleich, oder deren Querschnitte ungleich sind. Wir wollen jetzt sehen, wie die Bewegung sich ändert,

wenn die gröſste und kleinste Wärme nicht in den Endpunkten des horizontalen Durchmessers, sondern irgend eines gegen den Horizont geneigten Durchmessers Statt findet. Hiebei setze ich die Röhre wieder als überall gleichweit voraus.

373. Problem 73. Die kreisförmige Röhre $AHI$ (Fig. 65.) sey überall gleich weit und vertical gestellt; der Durchmesser $AB$, in dessen Endpunkten die gröſste und kleinste Wärme Statt findet, sey unter dem Winkel $ACH = \zeta$ gegen den Horizont $HI$ geneigt; man sucht die Formeln für die Bewegung des Wassers, womit diese Röhre ganz angefüllt ist.

Auflösung. Des Kreises Halbmesser sey $= c$, die Weite der Röhre überall $= ff$; für den unbestimmten Punkt $S$ sey der Winkel $ACS = \varphi$, und in demselben die Dichtigkeit des Wassers $q = 1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi$. Die Dichtigkeit ist also in $E$ und $F$, $q = 1$, und wenn die dort Statt findende Geschwindigkeit $= v$, in $S$ aber die Geschwindigkeit $= u$ heiſst, so ist $u = \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi}$, des Punktes $S$ Höhe über der Horizontallinie $HI$ ist $= z = c . \operatorname{Sin} (\varphi - \zeta)$, und der Bogen $AS = s = c\varphi$. Der Druck $p$ wird also durch folgende Gleichung bestimmt:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \int (1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi) d\varphi \operatorname{Cos} (\varphi - \zeta) - \frac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi} - \frac{c\varphi dv}{dt},$$

aber $\int d\varphi . \operatorname{Cos} \varphi . \operatorname{Cos} (\varphi - \zeta) = \frac{1}{2} \int d\varphi . \operatorname{Cos} \zeta + \frac{1}{2} \int d\varphi \operatorname{Cos} (2\varphi - \zeta)$,

$$= \tfrac{1}{2} \varphi \operatorname{Cos} \zeta + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin} (2\varphi - \zeta),$$

also $2gp = \Delta : t - 2gc . \operatorname{Sin} (\varphi - \zeta) + \alpha g c \varphi \operatorname{Cos} \zeta$

$$+ \tfrac{1}{2} \alpha g c \operatorname{Sin} (2\varphi - \zeta) - \frac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi} - \frac{c \varphi dv}{dt}.$$

Setzt man in dieser Gleichung einmal $\varphi = 0$, das andremal $\varphi = 2\pi$, so erhält man für den Druck in $A$ den doppelten Ausdruck

$$2gp = \Delta : t + 2gc . \operatorname{Sin} \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha g c \operatorname{Sin} \zeta - \frac{v^2}{1 - \alpha}$$

$$\text{und } 2gp = \Delta : t + 2gc \operatorname{Sin}\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha gc \operatorname{Sin}\zeta - \frac{v^2}{1-\alpha} + 2\pi\alpha gc \operatorname{Cos}\zeta - \frac{2c\pi dv}{dt}.$$

Es mufs daher $dv = \alpha g dt . \operatorname{Cos}\zeta$ seyn; oder $v = \alpha g t . \operatorname{Cos}\zeta$, wenn $v$ mit $t$ zugleich verschwinden soll. Der Druck in jedem andern Punkte $S$ wird nun durch die Gleichung

$$2gp = \Delta : t - 2cg . \operatorname{Sin}(\phi - \zeta) + \tfrac{1}{2}\alpha cg \operatorname{Sin}(2\phi - \zeta) - \frac{\alpha^2 t^2 g^2 \operatorname{Cos}\zeta^2}{(1 - \alpha \operatorname{Cos}\phi)}$$

bestimmt.

374. Für den Anfang der Bewegung ist also

$$p = \Sigma : t - c \operatorname{Sin}(\phi - \zeta) + \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin}(2\phi - \zeta),$$

also war damals in $A$ der Druck

$$= \Sigma : t + c . \operatorname{Sin}\zeta + \frac{\alpha c . \operatorname{Sin}\zeta}{4},$$

in dem gegenüber eben so hoch liegenden Punkte aber, für welchen $\phi = 180° + 2\zeta$ ist, der Druck

$$= \Sigma : t + c \operatorname{Sin}\zeta + \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin} 3\zeta.$$

Allgemein aber ist für zwei gleich hoch liegende Punkte, wenn für den einen $ACS = \phi$, für den andern

$$ACS' = 180° - \phi + 2\zeta,$$

der Druck in jenem für den Anfang der Bewegung

$$= \Sigma : t - c . \operatorname{Sin}(\phi - \zeta) + \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin}(2\phi - \zeta),$$

in diesem $= \Sigma : t - c \operatorname{Sin}(\phi - \zeta) + \tfrac{1}{4}\alpha c \operatorname{Sin}(3\zeta - 2\phi)$; der Druck ist also in $S$ gröfser, als in $S'$, wenn

$$\operatorname{Sin}(2\phi - \zeta) > \operatorname{Sin}(3\zeta - 2\phi)$$

ist; folglich beim Anfange der Bewegung der Druck zwischen $A$ und $H$ kleiner, als in den gegenüber gleich hoch liegenden Punkten; oberhalb $H$ aber wird in dem ganzen Quadranten $HR$ der Druck in jedem Punkte gröfser, als in den gegenüber gleich hoch liegenden, und eben so für jeden zwischen $I$ und $Q$ liegenden Punkt gröfser, als in dem gegenüber zwischen $Q$ und $H$ liegenden. — Die Wassermasse wird also anfangen, sich nach der Richtung $AHS$ fortzubewegen.

375. Wenn $\zeta = 90°$ ist, so wird Cos $\zeta = 0$, und folglich $v = 0$, also findet dann keine Bewegung Statt, sondern das Wasser bleibt im Gleichgewichte, weil die Wärme der Röhre in gleichen Höhen gleich groſs ist. Ist $\zeta > 90°$, so wird der Cosinus negativ, und die Bewegung geht nun nach der entgegengesetzten Richtung, nämlich immer so, daſs das Wasser unten von der kältesten Stelle nach der wärmsten flieſst, oben aber von der wärmern nach der kalten Gegend, wie dies schon oben bei den Lehren vom Gleichgewichte angeführt ist.

376. Die bisherigen Untersuchungen aber gelten nur, wenn die Röhre ganz mit Wasser gefüllt ist, denn wenn ein Theil derselben leer gelassen wird, so kann in den meisten Fällen das Gleichgewicht bestehen. Doch findet dieses nicht Statt, wenn der leer gelassene Raum sehr klein ist, und es ist daher der Mühe werth, diesen Fall, da die Röhre nicht ganz gefüllt ist, noch näher zu betrachten.

377. Problem 74. Es sey $ASBA$ (Fig. 66.) wieder eine kreisförmige vertical gestellte Röhre, die überall gleich weit ist, die gröſste Wärme finde in $A$, die kleinste in $B$ an den beiden Enden des horizontalen Durchmessers $AB$ Statt. Es soll die Bewegung des Wassers in dieser Röhre bestimmt werden, wenn nur ein Theil derselben $MN$ mi Wasser gefüllt ist.

Auflösung. Des Kreises Halbmesser sey $= 1$, der Querschnitt der Röhre $= ff$; der unbestimmte Bogen $AS$ sey $= s$, und die Dichtigkeit in $S$, $q = 1 - \alpha$ Cos $s$. Am Ende der Zeit $= t$ nehme das Wasser in der Röhre den Raum $MN$ ein, und es sey der Bogen $AM = m$, $AN = n$, so weiſs man erstlich, daſs die ganze Masse des Wassers immer dieselbe bleibt, also das Integral $\int q\,ds$, wenn man es auf die ganze Wassermasse erstreckt, unveränderlich ist. Es ist aber $\int q\,ds = s - \alpha$ Sin $s$, also, wenn man dieses Integral von den Gränzen $s = m$ bis $s = n$ nimmt, die ganze Wassermasse $= n - m - \alpha$ (Sin $n$ — Sin $m$), diese

sey $= 2\lambda$, und man setze $m - \alpha \operatorname{Sin} m = u - \lambda$, $n - \alpha \operatorname{Sin} n = u + \lambda$, so wird, weil $\alpha$ ein kleiner Bruch ist, beinahe $m = u - \lambda + \alpha \operatorname{Sin}(u - \lambda)$

und $n = u + \lambda + \alpha \operatorname{Sin}(u + \lambda)$,

und für den Fall, daſs die Röhre ganz gefüllt wäre, würde man $n = m + 2\pi$ und $\lambda = \pi$ haben; die Röhre ist also nicht ganz gefüllt, wenn $\lambda < \pi$ ist, und $\pi$ bedeutet den halben Umfang des Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist.

Da hier $z = \operatorname{Sin} s$, so ist

$$\int q\,dz = \operatorname{Sin} s - \tfrac{1}{2}\alpha s - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{Sin} 2s,$$

und für den Druck $p$ im Punkte $S$ wird

$$2gp = \Delta : t - 2g(\operatorname{Sin} s - \tfrac{1}{2}\alpha s - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{Sin} 2s) - \frac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos} s} - \frac{s\,dv}{dt}.$$

Dieser Druck ist für beide Endpunkte $M$, $N$ gleich groſs, und daher

$$\left.\begin{array}{l} 2g(\operatorname{Sin} n - \tfrac{1}{2}\alpha n - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{Sin} 2n) + \dfrac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos} n} + \dfrac{n\,dv}{dt} \\ -2g(\operatorname{Sin} m - \tfrac{1}{2}\alpha m - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{Sin} 2m) - \dfrac{v^2}{1 - \alpha \operatorname{Cos} m} - \dfrac{m\,dv}{dt} \end{array}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung läſst sich bestimmen, unter welchen Umständen das Gleichgewicht bestehen kann; denn wenn dieses möglich seyn soll, so muſs $v = 0$ und $dv = 0$ seyn, also

$$\operatorname{Sin} n - \operatorname{Sin} m - \tfrac{1}{2}\alpha(n - m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\operatorname{Sin} 2n - \operatorname{Sin} 2m) = 0.$$

In allen Fällen, wo dieser Gleichung Genüge geschieht, findet das Gleichgewicht Statt, in allen andern Fällen muſs Bewegung entstehen.

Man sieht sogleich, daſs diese Gleichung nicht richtig seyn kann, wenn $n = m + 2\pi$, daher ist alsdann das Gleichgewicht unmöglich. Es sey also $n = 2\pi + m - \delta$, so bleibt das Fluidum in Ruhe, wenn

$$0 = \operatorname{Sin}(m - \delta) - \operatorname{Sin} m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) - \tfrac{1}{4}\alpha[\operatorname{Sin}(2m - 2\delta) - \operatorname{Sin} 2m]$$

ist. Man nehme $\delta$ als sehr klein an, so verändert sich diese Gleichung in

$$0 = \delta \operatorname{Cos} m + \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) - \frac{\alpha\delta}{2}\operatorname{Cos} 2m,$$

woraus für $m$ der beinahe richtige Werth $\operatorname{Cos} m = -\frac{\pi\alpha}{\delta}$ folgt. Wenn also nicht $\delta > \pi\alpha$ ist, so erhält $m$ keinen möglichen Werth, und das Gleichgewicht kann gar nicht bestehen.

In allen Fällen läſst sich die entstehende Bewegung aus der oben gefundenen Gleichung bestimmen. Führt man nämlich die Gröſse $u$ in die Rechnung ein, und setzt

$$m = u - \lambda + \alpha \operatorname{Sin}(u - \lambda),$$
$$n = u + \lambda + \alpha \operatorname{Sin}(u + \lambda),$$

so wird, weil $\alpha$ klein ist, beinahe

$$\operatorname{Sin} m = \operatorname{Sin}(u-\lambda) + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{Sin} 2(u-\lambda),$$
$$\operatorname{Cos} m = \operatorname{Cos}(u-\lambda) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos} 2(u-\lambda),$$
$$\operatorname{Sin} n = \operatorname{Sin}(u+\lambda) + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{Sin} 2(u+\lambda),$$
$$\operatorname{Cos} n = \operatorname{Cos}(u+\lambda) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos} 2(u+\lambda),$$
$$\operatorname{Sin} 2m = \operatorname{Sin} 2(u-\lambda) - \alpha \operatorname{Sin}(u-\lambda) + \alpha . \operatorname{Sin} 3(u-\lambda),$$
$$\operatorname{Sin} 2n = \operatorname{Sin} 2(u+\lambda) - \alpha \operatorname{Sin}(u+\lambda) + \alpha \operatorname{Sin} 3(u+\lambda).$$

Da nun die Geschwindigkeit in $M$, $= \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{Cos} m}$ ist, und die Oberfläche $M$ in der Zeit $dt$ den Raum $dm$ durchläuft, so ist

$$dt = \frac{dm\,(1 - \alpha \operatorname{Cos} m)}{v} = \frac{du}{v},$$

und, weil $\alpha$ sehr klein ist, so kann man auch

$$\frac{1}{1 - \alpha \operatorname{Cos} n} = 1 + \alpha \operatorname{Cos} n$$

setzen, und die Gleichung für $v$ erhält nun folgende Gestalt:

$$2g(\operatorname{Sin} n - \operatorname{Sin} m) - \alpha g(n-m) - \tfrac{1}{2}\alpha g (\operatorname{Sin} 2n - \operatorname{Sin} 2m)$$
$$+ \alpha v^2 (\operatorname{Cos} n - \operatorname{Cos} m) + \frac{v\,dv}{du}(n-m) = 0.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Sin} n - \operatorname{Sin} m = 2 \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos} u + \alpha \operatorname{Sin} 2\lambda . \operatorname{Cos} 2u . n - m = 2\lambda$$
$$+ 2\alpha \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos} u.$$
$$\operatorname{Cos} n - \operatorname{Cos} m = -2 \operatorname{Sin}\lambda . \operatorname{Sin} u - \alpha \operatorname{Sin} 2\lambda \operatorname{Sin} 2u.$$
$$\operatorname{Sin} 2n - \operatorname{Sin} 2m = 2 \operatorname{Sin} 2\lambda \operatorname{Cos} 2u - 2\alpha (\operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos} u$$
$$- \operatorname{Sin} 3\lambda \operatorname{Cos} 3u),$$

folglich, wenn man die in $\alpha^2$ multiplicirten Glieder wegläfst,

$$2vdv\,(\lambda + \alpha \,\text{Sin}\,\lambda\,\text{Cos}\,u) - 2\alpha v^2 du\,\text{Sin}\,\lambda\,\text{Sin}\,u$$
$$= -2gdu\,(2\,\text{Sin}\,\lambda\,\text{Cos}\,u - \alpha\lambda + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{Sin}\,2\lambda\,\text{Cos}\,2u),$$

Diese Gleichung wird durch den Multiplicator $\lambda + \alpha\,\text{Sin}\lambda\,\text{Cos}u$ integrabel, und alsdann

$$v^2(\lambda + \alpha\,\text{Sin}\,\lambda\,\text{Cos}\,u)^2 = \text{Const} - 4g\lambda\,.\,\text{Sin}\,\lambda\,\text{Sin}\,u + 2\alpha g\lambda^2 u$$
$$- 2\alpha g u\,\text{Sin}\,\lambda^2 - \alpha g\,\text{Sin}\,\lambda^2\,.\,\text{Sin}\,2u - \tfrac{1}{2}\alpha g\lambda\,\text{Sin}\,2\lambda\,.\,\text{Sin}\,2u.$$

378. Wenn $\lambda = \pi$ oder die ganze Röhre mit Wasser gefüllt ist, so wird $v^2 = \text{Const} + 2\alpha g u$,

$$\text{also } dt = \frac{du}{\sqrt{(\text{Const} + 2g\alpha u)}}$$

$$\text{und } t = \frac{1}{\alpha g}\sqrt{(\text{Const} + 2g\alpha u)} = \frac{v}{\alpha g},$$

wie wir es schon oben gefunden haben.

Für andre Fälle fanden wir vorhin, dafs $\delta > \alpha\pi$ seyn mufs, wenn das Gleichgewicht möglich seyn soll, also ist $\delta = \alpha\pi$ die Gränze, bis zu welcher $\delta$ wachsen darf, ohne die Möglichkeit des Gleichgewichts aufzuheben. Es sey nun $\delta = \alpha\pi$, so wird das Gleichgewicht Statt finden, wenn $m = \pi$ oder $= -\pi$, und $n = \pi - \alpha\pi$ ist. Dann ist der untere Halbkreis ganz mit Wasser gefüllt, der obere aber enthält bis an $Dd$ Wasser, wenn $BD = \alpha\pi$ ist, und dieser Zustand ist der äufserste, bei dem noch das Gleichgewicht bestehen kann.

Wenn also der leer gelassene Raum gröfser ist, als $\alpha\pi$, so kann das Fluidum im Gleichgewichte bleiben, ist er aber kleiner, so entsteht nothwendig Bewegung.

379. Da $\alpha$ sehr klein ist, so kann das Gleichgewicht immer bestehen, wenn der leer gelassene Raum erheblich grofs ist: aber die für den äufsersten Zustand des Gleichgewichts gefundnen Ausdrücke sind nicht genau, weil wir auf die Glieder, die $\alpha^2$ enthalten, keine Rücksicht genommen haben. Um sie näher zu bestimmen, sey $\lambda = \pi - \varepsilon$ und $\varepsilon$ ein sehr kleiner Bogen. Setzt man diesen Werth in

die zwischen $u$ und $v$ gefundene Differentialgleichung, so werden $v = 0$ und $dv = 0$, wenn

$$2\varepsilon \operatorname{Cos} u - \alpha\pi + \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \operatorname{Cos} 2u = 0$$

$$\text{oder } \varepsilon = \frac{\alpha\pi}{2 \operatorname{Cos} u + \alpha - \alpha \operatorname{Cos} 2u}$$

ist. Dieser Werth von $\varepsilon$ wird am kleinsten, wenn $u = 0$ ist, und dann kann man $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\pi$ setzen.

Dieses ist die Gränze, wo die Möglichkeit des Gleichgewichts aufhört, und für diesen äufsersten Zustand des Gleichgewichts ist $m = -\pi + \frac{1}{2}\alpha\pi$ und $n = \pi - \frac{1}{2}\alpha\pi$, der leer gelassene Raum aber $= \alpha\pi$. Die Wassermasse nimmt also beim Gleichgewichte eine solche Lage an, dafs ihre beide Enden um den Raum $\frac{1}{2}\alpha\pi$ von $B$ abstehen, und die Stelle leer bleibt, wo die Dichtigkeit am gröfsten seyn sollte.

330. **Problem 75.** In einer in sich zurückkehrenden Röhre von willkürlicher Figur sey der Grad der Wärme in gleichen Höhen ungleich, so dafs das Wasser, womit die Röhre ganz angefüllt ist, nicht in Ruhe bleiben kann, man sucht die Formeln für die hier entstehende Bewegung.

**Auflösung.** In $A$ (Fig. 67.) sey die Wärme am gröfsten, also die Dichtigkeit am kleinsten, und diese Dichtigkeit bezeichne man mit $= 1$; die Weite der Röhre sey hier $= ff$, in dem gegenüber stehenden Punkte $B$ sey die Dichtigkeit am gröfsten, $= 1 + \alpha$. Man betrachte nun den unbestimmten Punkt $S$ der Röhre, und setze die Länge $AS = s$, die Gröfse des Querschnitts $Ss$, $\omega^2$, die Höhe desselben über der durch $A$ gehenden horizontalen Ebene $= z$, die Dichtigkeit an dieser Stelle $= q$.

Wenn nun am Ende der Zeit $= t$ das Wasser im Punkte $A$ die Geschwindigkeit $= v$, in $S$ die Geschwindigkeit $= x$ erlangt hat, so ist $x = \frac{f^2 v}{q\omega^2}$, und man findet für den Druck $= p$ im Querschnitte $Ss$ die Gleichung

$$2gp = \Delta : t - 2gqz + 2g\int z dq - \frac{f^4 v^2}{q\omega^4} - 2f^4 v^2 \int \frac{d\omega}{q\omega^5} - \frac{f^2 dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega^2},$$

wo die Integrale so genommen werden müssen, daſs sie für $s = 0$ verschwinden.

Da man auch hier für den Druck in $A$ zwei verschiedene Ausdrücke erhält, je nachdem man $s = 0$ oder $s =$ der ganzen Länge der Röhre in die Formel setzt, so gibt nothwendige Gleichheit beider Werthe eine Gleichung für $v$. Setzt man $s$ und $z = 0$, so wird $2gp = \Delta : t - v^2$, weil $q = 1$ und $\omega^2 = ff$ ist. Aber die Bestimmung des zweiten Ausdrucks für eben diesen Druck, wenn man nämlich für $s$ die ganze Länge der Röhre setzt, hat etwas mehr Schwierigkeit. Bei einer überall gleich weiten Röhre würde die Formel $f^2 \int \frac{ds}{\omega^2}$ die Länge der Röhre selbst ausdrücken, oder wenn die ganze Länge der Röhre $= a$ ist, so würde dieses Integral, wenn man es auf die ganze Röhre bezöge, selbst $= a$ werden, allgemein wollen wir dieses Integrals Werth für die ganze Röhre $= \lambda a$ setzen; der eben so genommene Werth des Integrals $\int \frac{d\omega}{q\omega^5}$ sey $= \frac{\mu}{2f^4}$. Den vollständigen Werth des Integrals $\int q dz$ aber müssen wir etwas umständlicher betrachten. Wir bezeichneten mit $q$ die Dichtigkeit in $S$, und nannten die Höhe dieses Punktes $= z$; es sey nun $S's'$ ein zweiter Querschnitt, wo die Dichtigkeit eben so groſs ist, als in $Ss$, und die Höhe desselben über $A$ sey $= z'$. Bei der Betrachtung dieses Punktes $S'$ muſs man $dq$ negativ nehmen, weil, wenn hier $s$ wächst, $q$ abnimmt, denn die Dichtigkeit nimmt ab, wenn $S'$ weiter nach $A$ zu genommen wird. Um also den Werth des Integrals $\int z dq$ für die ganze Röhre zu kennen, brauchte man nur die Summe der Integrale $\int z dq$ und $-\int z' dq$ jedes von $A$ bis $B$ genommen, zu suchen, oder das Integral $\int (z - z') dq$ von $A$ bis an $B$ zu nehmen. Es sey, um dieses Integral durch Construction zu bestimmen, die gerade Linie (Fig. 68.) $AC = 1 =$ der kleinsten Dichtigkeit, und

$CB = 1 + \alpha =$ der gröſsten Dichtigkeit; ferner mögen $CE$, $CF$, $CG$, $CH$ u. s. w. die Dichtigkeit in den Punkten $E$, $E'$, $F$, $F'$, $G$, $G'$, $H$, $H'$ u. s. w. der Röhre $ASBA$ ausdrücken. In jedem Punkte $G$ der Linie $AB$ (Fig. 68.) ziehe man nun eine senkrechte Ordinate, und mache sie dem Unterschiede der Höhen $z - z'$ der Punkte $G$, $G'$ (Fig. 67.) gleich, wo die durch die Abscisse $CG$ ausgedrückte Dichtigkeit Statt findet, daſs also $Ee =$ dem Unterschiede der Höhen der Punkte $E$, $E'$, $Ff =$ dem Unterschiede der Höhe für $F$, $F'$ u. s. w. gleich ist: — wenn die Curve $AefghB$ so gezogen ist, so drückt der durch sie begränzte Flächenraum das Integral $\int z dq$ für die ganze Röhre aus. Dieses Integral sey $= h$, so läſst sich nun der Druck in $A$ auch so ausdrücken:

$$2gp = \Delta : t + 2gh - v^2 - \mu v^2 - \frac{\lambda a dv}{dt},$$

und da dieses $= \Delta : t - v^2$ seyn muſs, so folgt, daſs

$$2ghdt = \mu v^2 dt + \lambda a dv,$$

$$\text{oder } dt = \frac{\lambda a dv}{2gh - \mu v^2} \text{ seyn muſs.}$$

Diese Gleichung gibt verschiedene Werthe für $t$, je nachdem $\mu$ positiv, negativ oder $= 0$ ist.

I. Wenn $\mu = 0$, so ist $t = \frac{\lambda a v}{2gh}$.

II. Wenn $\mu$ positiv ist, so wird, wenn man $\mu = \frac{2gh}{m^2}$ setzt, $dt = \frac{\lambda a m^2 dv}{2gh(m^2 - v^2)}$ und $t = \frac{\lambda a m}{4gh} \log. \frac{m + v}{m - v}$, wenn $t$ und $v$ zugleich verschwinden sollen. Es wird also, wenn man $\frac{\lambda a m}{4gh} = \frac{1}{\gamma}$ setzt, $v = \frac{m(e^{\gamma t} - 1)}{e^{\gamma t} + 1}$, und $v$ nähert sich der Gränze $v = m$, ohne je diese Gröſse zu erreichen.

III. Wenn $\mu$ negativ ist, so setze man $\mu = -\frac{2gh}{m^2}$, dafs $dt = \frac{\lambda a dv}{2gh\left(1 + \frac{v^2}{m^2}\right)}$ und $t = \frac{\lambda am}{2gh}$ Arc. tang. $\frac{v}{m}$,

$$\text{oder } v = m \text{ tang. } \frac{2ght}{\lambda am}$$

werde. In diesem Falle würde also schon nach einer endlichen Zeit die Geschwindigkeit unendlich grofs.

381. Exempel. Die Röhre sey kreisförmig und vertical gestellt, sie sey ganz mit Wasser gefüllt, und ihr Halbmesser $= c$. Der Winkel $ACS$ (Fig. 64.) sey $= \varphi$, die Dichtigkeit in $S$, $q = 1 - \alpha \operatorname{Cos} \varphi$, des Querschnitts $Ss$ Gröfse $\omega^2 = f^2 (1 - \beta \operatorname{Sin} \varphi)$, die Höhe $z = c \operatorname{Sin} \varphi$, der Bogen $s = c\varphi$.

Die vorigen Untersuchungen führten auf folgende Gleichung für die Bewegung:

$$0 = 2g \int z dq - 2f^4 v^2 \int \frac{d\omega}{q\omega^5} - \frac{f^2 dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega^2};$$

es ist aber hier

$$\int z dq = \alpha c \int d\varphi \operatorname{Sin} \varphi^2 = \tfrac{1}{2} \alpha c (\varphi - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\varphi),$$

also, wenn man dieses Integral auf den ganzen Umfang bezieht, $\int z dq = \alpha c \pi$; ferner ist

$$f^2 \int \frac{ds}{\omega^2} = \int \frac{c\, d\varphi}{1 - \beta \operatorname{Sin} \varphi} = \frac{c}{\sqrt{(1-\beta)^2}} \Big\{ \text{Arc. Sin} \sqrt{(1-\beta)^2}$$

$$- \text{Arc. Sin.} \left[ \frac{\operatorname{Cos} \varphi \sqrt{(1-\beta^2)}}{1 - \beta \operatorname{Sin} \varphi} \right] \Big\};$$

nennt man nun $\psi$ denjenigen Winkel, dessen Sinus $= \frac{\operatorname{Cos} \varphi \sqrt{(1-\beta^2)}}{1 - \beta \operatorname{Sin} \varphi}$, so wird für $\varphi = 90°$, $\psi = 0$, für $\varphi = \pi$, $\psi = -$ Ang. Sin. $\sqrt{(1-\beta^2)}$, für $\varphi = 270°$, $\psi = -\pi$, endlich für $\varphi = 2\pi$, $\psi = -2\pi +$ Arc. Sin. $\sqrt{(1-\beta^2)}$, für den ganzen Umfang wird also das Integral

$$f^2 \int \frac{ds}{\omega^2} = \frac{2\pi c}{\sqrt{(1-\beta^2)}}.$$

Endlich erhält man für das dritte Integral

$$2f^4\int\frac{d\omega}{q\,\omega^5}=-\beta\int\frac{d\varphi.\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{(1-\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,(1-\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^3},$$

wo, wenn $\alpha$ und $\beta$ sehr klein sind, der Nenner

$$=1-\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi-3\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

gesetzt werden kann, und

$$2f^4\int\frac{d\omega}{q\,\omega^5}=-\beta\int d\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(1+\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi+3\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$$

$$=-\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha\beta\varphi-\tfrac{1}{4}\alpha\beta\,\mathrm{Sin}\,2\varphi-\tfrac{3}{2}\beta^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2,$$

welches $=-\alpha\beta\pi$ wird, für $\varphi=2\pi$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für $v$, so wird

$$0=2\pi.\alpha g c+\alpha\beta\pi v^2-\frac{2\pi c.\,dv}{dt.\sqrt{(1-\beta^2)}},$$

wo ich $\sqrt{(1-\beta^2}=1$ setze, weil $\beta$ als sehr klein vorausgesetzt ist, Es wird also]

$$dt=\frac{c\,dv}{\alpha g c+\frac{1}{2}\alpha\beta v^2},$$

$$\text{folglich } v=\frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}\ \mathrm{tang.}\ \frac{\alpha g t.\sqrt{\beta}}{\sqrt{2gc}},$$

wo also, wenn $t=\dfrac{\pi\sqrt{2gc}}{2\alpha g\sqrt{\beta}}$ ist, die Geschwindigkeit unendlich ist.

Wäre $\beta$ negativ, oder $\omega^2=f^2(1+\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$, so würde die Differentialformel der im Probleme unter dem zweiten Falle betrachteten ähnlich seyn, und die Geschwindigkeit sich der beständigen Gränze $=\sqrt{\dfrac{2gc}{\beta}}$ unendlich nähern.

382. Das Beispiel, da $\omega^2=f^2(1-\beta\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$, zeigt im Allgemeinen, daſs, wenn der obere Theil der Röhre *AEB* enger, als der untere ist, das Wasser eine so sehr beschleunigte Bewegung annimmt, daſs schon nach einer endlichen Zeit die Geschwindigkeit unendlich wird (oder unendlich werden müſste, wenn nicht die Mittheilung der

Wärme und der Widerstand an den Wänden der Röhre dieses hinderte). Ist hingegen der untere Theil der Röhre enger, als der obere, so kann die Geschwindigkeit einen gewissen endlichen Werth nie übertreffen.

383. Man kann das vorige Exempel auch auflösen, wenn $\beta$ nicht sehr klein ist, und findet auch dann die Behauptung des vorigen §. bestätigt, ich will mich aber dabei nicht aufhalten, sondern gehe zu der einzigen nützlichen Anwendung über, welche sich von diesen Untersuchungen auf den Luftzug in Schornsteinen machen läſst. Obgleich man hier darauf Rücksicht nehmen sollte, daſs die Dichtigkeit der Luft auch vom Drucke abhängt, so setze ich doch dieses bei Seite, und betrachte blos die Bewegung eines unelastischen flüssigen Körpers in einer geraden Röhre, wenn der untere zu starke Druck das erwärmte Fluidum aufwärts treibt, und unten beständig neuer Zufluſs Statt findet.

384. Problem 76. Die gerade verticale Röhre $AB$ (Fig. 69.) ist in ein sehr groſses Gefäſs mit Wasser ganz eingetaucht, und selbst mit Wasser gefüllt. Das in der Röhre enthaltene Wasser ist erwärmt, das äuſsere Wasser im Gefäſse aber kalt, man sucht die Gesetze der in der Röhre entstehenden Bewegung, wenn die Wärme der Röhre als bekannt vorausgesetzt und angenommen wird, daſs das durchflieſsende Wasser sogleich eben den Grad der Wärme erhält; endlich auch der Druck an beiden Enden der Röhre gegeben ist.

Auflösung. Es sey $C$ der Punkt, wo die Wärme am gröſsten ist, und in jedem andern Punkte der Röhre $S$ ist der Unterschied der Wärme durch eine Function der Entfernung von diesem Punkte gegeben. Man setze die Dichtigkeit des Wassers auſserhalb der Röhre $= 1$, und nehme an, daſs auch in $A$ an der obern Oefnung der Röhre dieselbe Dichtigkeit Statt finde, in $C$ aber sey die Dichtigkeit $= 1 - \alpha$. Die Entfernung des Punktes $C$ von $A$ sey

$CA = a$, die Länge der ganzen Röhre $AB = l$, die Entfernung des unbestimmten Punktes $S$ von $C$ sey $CS = s$, die Dichtigkeit in $S$ sey $q = 1 - \alpha + \frac{\alpha s^n}{a^n}$, der Querschnitt $Ss = \omega^2$, hingegen $Aa = ff$; man rechne die Höhen $z$ von $B$ an, so daſs für $S$, $z = l - a + s$ sey, endlich sey am Ende der Zeit $t$ die Geschwindigkeit in $Aa = v$, in jedem andern Querschnitte $Ss$ aber $= x = \frac{f^2 v}{\omega^2}$, und der Druck in $S$ sey $= p$.

Um hier die allgemeine Gleichung des 360. §. anzuwenden, muſs man die Werthe der dort unaufgelösten Integrale suchen; dieses läſst sich aber, da für $\omega^2$ noch keine bestimmte Function angenommen ist, nur für das Integral $\int q dz$ ausführen, welches, da $dz = + ds$ oder $= - ds$ ist, sich in $\int \pm ds \left(1 - \alpha + \frac{\alpha s^n}{a^n}\right)$ verwandelt, wo das Zeichen + für die oberhalb $C$ liegenden Punkte, das Zeichen — für die unterhalb liegenden gilt.

Es wird also für den Endpunkt $A$, wo $s = a$,

$$\int q dz = (1 - \alpha) a + \frac{\alpha a}{n + 1} = a - \frac{n}{n + 1} \alpha a,$$

für den Endpunkt $B$ aber

$$\int q dz = (a - l)(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{n + 1} \frac{(l - a)^n}{a^n} (a - l),$$

wenn dieses Integral mit $s$ zugleich verschwindet.

Wir haben den Druck in $A$ und $B$ als bekannt vorausgesetzt; er sey in $A$, $= k$, in $B$ aber $= k + l$, nämlich in $B$ um so viel gröſser, als das Gewicht der Wassersäule, deren Höhe $= l$ und Dichtigkeit $= 1$ ist, beträgt. Man bezeichne ferner die Werthe, welche die unaufgelösten Integrale erlangen, mit folgenden Buchstaben:

für $A$ sey - - $\int \frac{dq}{q^2 \omega^4} = \mathfrak{M}$ und $\int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N}$,

für $B$ - - - $\int \frac{dq}{q^2 \omega^4} = \mathfrak{M}'$ und $\int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N}'$,

endlich sey der Querschnitt $Bb = \gamma^2$, so geben die allgemeinen Formeln für den Punkt $A$

$$2gk = \Delta : t - 2g\left(a - \frac{n}{n+1}\alpha a\right) - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}f^4 v^2 \mathfrak{M} - f^2 \mathfrak{N} \frac{dv}{dt},$$

und für den Punkt $B$

$$2g(k+l) = \Delta : t - 2g(a-l)(1-\alpha) - \frac{2g\alpha}{n+1} \cdot \frac{(l-a)^n}{a^n}(a-l)$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{f^4 v^2}{\gamma^4 \left\{1 - \alpha + \alpha \left(\frac{l-a}{a}\right)^n\right\}} + \tfrac{1}{2} f^4 v^2 \mathfrak{M}' - f^2 \mathfrak{N}' \frac{dv}{dt}.$$

Aus der Differenz findet man für $v$ eine Gleichung, welche alle Umstände der Bewegung im Allgemeinen bestimmt.

385. Exempel. Die Röhre sey überall gleich weit, und die Dichtigkeit sey $= 1 - \alpha \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)$ in jedem Punkte, dessen Entfernung von $C = s$ ist; zugleich sey die Länge der Röhre $l = a(1+\lambda)$, und $\lambda$ wenigstens nicht gröfser, als 1, oder $l \lessdot 2a$.

In diesem Falle wird

$$\int \frac{dq}{q^2 \omega^4} = C - \frac{1}{qf^4} = \frac{\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{q}\right)}{f^4} \text{ und } f^2 \int \frac{ds}{\omega^2} = s,$$

wenn beide in $C$ verschwinden sollen, daher

$$f^4 \mathfrak{M} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ und } f^4 \mathfrak{M}' = + \frac{\alpha \lambda^2}{(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha\lambda^2)},$$

und $f^2 \mathfrak{N} = a$, $f^2 \mathfrak{N}' = -\lambda a$. Folglich wird

$$2gk = \Delta : t - 2ga + \tfrac{4}{3}\alpha a g - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha v^2}{1-\alpha} - \frac{a\,dv}{dt},$$

$$2g(k + a + \lambda a) = \Delta : t + 2g \cdot \lambda a (1-\alpha) + \frac{2\alpha g}{3} \cdot \lambda^3 a$$

$$- \frac{v^2}{2(1-\alpha+\alpha\lambda^2)} + \frac{\alpha \lambda^2 v^2}{2(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha\lambda^2)} + \frac{\lambda a\,dv}{dt},$$

$$\text{daher } \frac{dv}{dt} = \frac{2\alpha g}{3}(2+\lambda-\lambda^2) + \frac{\alpha v^2 (1-\lambda)}{a(1-\alpha+\alpha\lambda^2)},$$

und die Bewegung fällt verschieden aus, je nachdem $\lambda$ gleich 1, oder kleiner als 1 ist.

Für $\lambda = 1$, oder wenn der wärmste Punkt gerade in der Mitte der Röhre liegt, erhält man $v = \frac{4}{3}\alpha g t$, für die übrigen Fälle aber, wenn nämlich $\lambda < 1$ ist,

$$v = \frac{\sqrt{[\frac{2}{3} g a (1-\alpha+\alpha\lambda^2)(2+\lambda-\lambda^2)]}}{\sqrt{(1-\lambda)}} \times \text{tang.} \left\{\frac{\alpha t \sqrt{[\frac{2}{3} g (1-\lambda)(2+\lambda-\lambda^2)]}}{\sqrt{[a-\alpha a(1-\lambda^2)]}}\right\}.$$

Die Geschwindigkeit wächst also schneller, wenn der wärmste Punkt dem untern Ende der Röhre näher liegt. Wäre *B* selbst der wärmste Punkt, so hätte man $\lambda = 0$, und daher

$$v = \sqrt{[\tfrac{4}{3} g a (1-\alpha)]} \;.\; \text{tang.} \left\{\alpha t \;.\; \sqrt{\frac{4g}{3a(1-\alpha)}}\right\}.$$

386. Die Voraussetzungen dieses Problems sind nicht mehr anwendbar, wenn *BC* (Fig. 69.) gröfser, als *AC* ist, denn dann würden unsre Formeln die Dichtigkeit in *B* gröfser als 1 geben, gröfser als die Dichtigkeit des Wassers im Gefäfse ist, ein Fall, der wenigstens in der Wirklichkeit nicht vorkommt. Ich will daher jetzt die Formeln so einrichten, dafs sie für den gewöhnlich vorkommenden Fall passen, wo nur in einem Theile der Röhre die Dichtigkeit des umgebenden Fluidi ist, in dem übrigen Theile aber die natürliche = 1 gesetzte Dichtigkeit Statt findet.

387. P r o b l e m 77. Alle Umstände bleiben wie im vorigen Probleme, aber die gröfsere Wärme, oder die verminderte Dichtigkeit findet nur in einem Theile der Röhre Statt, während im übrigen Theile der Röhre die Dichtigkeit = 1 ist: man sucht die Gleichungen für die Bewegung.

A u f l ö s u n g. Es sey wieder *C* (Fig. 69.) der am meisten erwärmte Punkt, und die Dichtigkeit in dem

Querschnitte $Cc$ sey $= 1 - \alpha$. Von $C$ an wachse die Dichtigkeit, und in der Entfernung $Cf = c$ werde sie der natürlichen Dichtigkeit gleich $= 1$, so daſs blos in dem Raume, dessen Länge $= 2c$ ist, eine geringere Dichtigkeit Statt findet; in gröſsern Entfernungen von $C$ aber sey überall die Dichtigkeit $= 1$. Die Länge der ganzen Röhre sey $= l$, die Länge des oberhalb $C$ liegenden Theils $= a$; ferner sey in der unbestimmten Entfernung $Cs = s$ der Querschnitt $Ss = \omega^2$, die Dichtigkeit $= 1 - \alpha S$, wo $S$ eine Function von $s$ ist, die $= 0$ gesetzt wird, wenn $s > \pm c$ ist. Endlich sey der Querschnitt $Aa = ff$, und am Ende der Zeit $= t$ die Geschwindigkeit in demselben $= v$; in $A$ sey der Druck $= k$, in $B$ aber der Druck $= k + l$.

Um die Formeln des 360. §. hier anzuwenden, unterscheide ich zwei verschiedene Fälle, erstlich, wenn sowohl $CA$ als $CB$ gröſser als $Cf = c$, also blos in der Mitte der Röhre ein gewisser Raum erwärmt ist, zweitens, wenn $C$ nicht so weit von dem einen Ende der Röhre abliegt, und daher die gröſsere Wärme sich bis an eine der beiden Oefnungen erstreckt.

I. Wenn sowohl $a > c$, als $l - a > c$, so hat die Bestimmung der Integrale $\int q\,dz$ und $\int \frac{dq}{q^2 \omega^4}$ nur bis zu den Gränzen $s = + c$ und $s = - c$ einige Schwierigkeit, jenseit dieser Gränzen ist $q$ unveränderlich, und folglich $dq = 0$, daher behält $\int \frac{dq}{q^2 \omega^4}$ seinen für $s = \pm c$ erlangten Werth ungeändert, und der Werth von $\int q\,dz$ ist $=$ Const $+ s$, wenn die Const. dem Werthe gemäſs angenommen wird, welchen das Integral für $s = c$ erlangt.

Es sey also, um hier nur bei allgemeinen Bezeichnungen stehen zu bleiben,

für $s = + c$ . . . $\int q\,dz = \mathfrak{L}$ und $\int \frac{dq}{q^2 \omega^4} = \mathfrak{M}$,

$$\text{für } s = -c \quad \cdots \quad \int q\,dz = \mathfrak{L}' \text{ und } \int \frac{dq}{q^2\,\omega^4} = \mathfrak{M}',$$

so wird für größere Werthe von $s$

$$\int q\,dz = \int \pm\, q\,ds = \mathfrak{L} + s - c \text{ oder } = \mathfrak{L}' - s + c,$$

je nachdem $s$ positiv oder negativ ist, denn $dz$ ist $= ds$, weil wir annehmen, die Richtungslinie der Röhre sey vertical. — Es wird daher für die Endpunkte der Röhre für $A$, wo $s = a$ ist,

$$\int q\,dz = \mathfrak{L} + a - c, \quad \int \frac{dq}{q^2\,\omega^4} = \mathfrak{M},$$

für $B$, wo $s = a - l$ ist,

$$\int q\,dz = \mathfrak{L}' - (l - a - c) \text{ und } \int \frac{dq}{q^2\,\omega^4} = \mathfrak{M}',$$

die Werthe des Integrals $\int \frac{ds}{\omega^2}$ setze ich

$$\text{für } A \quad \cdots\cdots \quad \int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N},$$

$$\text{für } B \quad \cdots\cdots \quad \int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N}',$$

und den Querschnitt $Bb = \gamma^2$; da nun in beiden Endpunkten der Röhre die Dichtigkeit $= 1$ ist, so geben die allgemeinen Formeln für $A$

$$2gk = \Delta : t - 2g\mathfrak{L} - 2g(a-c) - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}f^4\mathfrak{M}v^2 - f^2\,\frac{\mathfrak{N}\,dv}{dt},$$

für $B$ aber

$$2g(k + l) = \Delta : t - 2g\mathfrak{L}' + 2g(l - a - c) - \tfrac{1}{2}\,\frac{f^4 v^2}{\gamma^4}$$
$$+ \tfrac{1}{2}f^4\mathfrak{M}'v^2 - f^2\,\frac{\mathfrak{N}'\,dv}{dt},$$

daher

$$\frac{f^2\,dv}{dt}(\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}) = 2g(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}') - 4gc + \tfrac{1}{2}v^2\left[1 - \frac{f^4}{\gamma^4}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}f^4 v^2 (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}),$$

woraus $v$ bestimmt werden muſs.

II. Wenn $a$ oder $l - a$, oder beide Gröfsen kleiner sind, als $c$, so ist die Dichtigkeit am Ende der Röhre nicht mehr $= 1$, sie sey also für $Aa$, $q = b$, und die Geschwindigkeit in diesem Querschnitte am Ende einer gewissen Zeit noch $= v$, so wird im Querschnitte $Ss = \omega^2$, wo die Dichtigkeit $= q$ ist, die Geschwindigkeit $x = \frac{bf^2 v}{q\omega^2}$, daher im 360. §. jetzt $bv$ statt $v$ gesetzt werden mufs. Ich setze ferner für $A$, wo $q = b$ ist,

$$\int q\,dz = \mathfrak{L}'', \int \frac{dq}{q^2\omega^4} = \mathfrak{M}'', \int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N};$$

für $B$, wo $q = b'$ ist,

$$\int q\,dz = \mathfrak{L}''', \int \frac{dq}{q^2\omega^4} = \mathfrak{M}''', \int \frac{ds}{\omega^2} = \mathfrak{N}'.$$

Es wird also nun

$$2gh = \Delta : t - 2g\mathfrak{L}'' - \tfrac{1}{2}bv^2 + \tfrac{1}{2}b^2 f^4 v^2 \mathfrak{M}'' - bf^2 \frac{dv\,\mathfrak{N}}{dt}$$

und

$$2g(h+l) = \Delta : t - 2g\mathfrak{L}''' - \tfrac{1}{2}\frac{b^2 f^4 v^2}{b'\gamma^4} + \tfrac{1}{2}b^2 f^4 v^2 \mathfrak{M}''' - bf^2\mathfrak{N}' \frac{dv}{dt},$$

daher

$$2gl = 2g(\mathfrak{L}'' - \mathfrak{L}''') + \tfrac{1}{2}bv^2\left[1 - \frac{bf^4}{b'\gamma^4}\right] + \tfrac{1}{2}b^2 f^4 v^2 (\mathfrak{M}''' - \mathfrak{M}'')$$
$$- bf^2 \frac{dv}{dt}(\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}).$$

388. Erstes Exempel. Alle Querschnitte der Röhre sind gleich grofs, und die Dichtigkeit ist in jedem Punkte, dessen Entfernung von C kleiner als $= c$ ist, $q = 1 - \alpha + \alpha\frac{s^2}{c^2}$; wenn aber $s$ gröfser als $c$ wird, so bleibt $q$ unverändert $= 1$.

Ich unterscheide auch hier die im Probleme erwähnten Fälle.

I. Es sey blos der mittlere Theil der Röhre erwärmt, und an beiden Enden sey die Dichtigkeit $= 1$.

Da hier $\omega^2$ unveränderlich ist, so hat man

$$f^4 \int \frac{dq}{q^2 \omega^4} = \text{Const} - \frac{1}{q},$$

also $f^4 \mathfrak{M} = f^4 \mathfrak{M}' = \text{Const} - 1,$

$$f^2 \mathfrak{N} = a \text{ und } f^2 \mathfrak{N}' = a - l,$$

$$\text{ferner } \int q\,dz = (1 - \alpha)\, s + \tfrac{1}{3} \frac{\alpha s^3}{c^2},$$

welches für $s = \pm c$ gibt

$$\mathfrak{L} = c - \tfrac{2}{3} \alpha c \text{ und } \mathfrak{L}' = - c + \tfrac{2}{3} \alpha c.$$

Es wird also nun, da alle übrigen Glieder sich aufheben,

$$\frac{l\,dv}{dt} = \tfrac{8}{3} \alpha g c \text{ und } v = \tfrac{8}{3} \frac{\alpha g c t}{l}.$$

Die Geschwindigkeit wächst also desto mehr, je gröfser die Wärme in $C$ und der Raum $c$ ist; in welchem die Erwärmung Statt findet, und je kürzer die Röhre ist.

II. Es sey $a > c$, aber $l - a < c$, so wird in den Formeln des vorigen §. II.

$$b = 1, \quad \mathfrak{L}'' = \mathfrak{L} + a - c = a - \tfrac{2}{3} \alpha c,$$

$$f^4 \mathfrak{M}'' = \text{Const} - 1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

wenn $\text{Const} - \frac{1}{q}$ in $C$ verschwinden soll. $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ behalten ihre Werthe, aber es wird

$$b' = 1 - \alpha + \alpha \left[\frac{l - a}{c}\right]^2, \quad \mathfrak{L}''' = (a - l) \left\{1 - \alpha + \tfrac{1}{3} \alpha \left[\frac{l - a}{c}\right]^2\right\},$$

$$f^4 \mathfrak{M}''' = \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha + \alpha \left[\frac{l - a}{c^2}\right]^2},$$

$$\text{oder} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[\frac{l - a}{c}\right]^2 \left[\frac{1}{1 - \alpha + \alpha \left[\frac{l - a}{c}\right]^2}\right].$$

Es wird also nun, wenn ich $l - a = \lambda c$ setze, wo, unsrer Voraussetzung gemäfs, $\lambda$ ein Bruch ist,

$$2gl = 2g \left[\frac{l + \alpha(\lambda^3 - 3\lambda - 2)\, c}{3}\right] + \frac{v^2 (\alpha \lambda^2 - \alpha)}{1 - \alpha(1 - \lambda^2)} + \frac{l\,dv}{dt},$$

$$\text{daher } \frac{dv}{dt} = \tfrac{2}{3}\,\frac{g\alpha c}{l}(2+3\lambda-\lambda^3) + \frac{\alpha v^2(1-\lambda^2)}{l[1-\alpha(1-\lambda^2)]}$$

$$\text{und } t = \frac{l.\sqrt{(1-\alpha+\alpha\lambda^2)}}{\alpha\sqrt{[\frac{2}{3}gc(2+3\lambda-\lambda^3)(1-\lambda^2)]}}$$

$$\times \text{Arc. tang} \left\{ v\sqrt{\frac{3(1-\lambda)}{2gc(1-\alpha+\alpha\lambda^2)(2+\lambda-\lambda^2)}} \right\},$$

$$\text{folglich } v = \frac{\sqrt{[\frac{2}{3}gc(1-\alpha+\alpha\lambda^2)(2+\lambda-\lambda^2)]}}{\sqrt{(1-\lambda)}}$$

$$\times \text{ tang.} \left\{ \frac{\alpha t}{l}\sqrt{\frac{\frac{2}{3}gc(1-\lambda^2)(2+3\lambda-\lambda^3)}{1-\alpha+\alpha\lambda^2}} \right\},$$

und die Geschwindigkeit nimmt ohne Ende zu, und sollte, wenn alle Voraussetzungen ganz der Natur gemäfs wären, schon nach einer endlichen Zeit unendlich grofs werden.

Wäre $C$ der unterste Punkt der Röhre, also $\lambda = 0$, so würde

$$v = \sqrt{[\tfrac{4}{3}gc(1-\alpha)]} \cdot \text{tang.} \left[\frac{\alpha t}{l} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}\frac{gc}{(1-\alpha)}}\right],$$

und $v$ sollte unendlich werden, wenn

$$t = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{l}{\alpha}\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{4gc}} \text{ ist.}$$

Wäre also z. B. $l = g$, und $c = \frac{1}{4}g$, $\alpha = 0{,}1$, so würde dieser Werth von $t$

$$= 1{,}57 \cdot \frac{\sqrt{2{,}7}}{0{,}1} = 26 \text{ Sec.}$$

ungefähr, wenn $g$ den Fallraum in 1 Sec. ausdrückt.

Es ist nun zwar offenbar, dafs eine solche Beschleunigung der Bewegung unmöglich ist, und dafs auch die Rechnung anders ausfallen würde, wenn man auf die Bewegung des aufserhalb der Oefnung $Bb$ befindlichen Fluidi Rücksicht nähme, aber man sieht hieraus wenigstens, dafs die Bewegung mehr beschleunigt wird, wenn der erwärmte Raum am untern Ende der Röhre, als wenn er in der Mitte derselben ist.

III. Die Bewegung wird noch weniger beschleunigt, wenn $C$ am obern Ende der Röhre liegt. Es sey nämlich $a = \lambda c$ kleiner als $c$, so wird, wenn $l - a > c$ ist, $b = 1 - \alpha + \alpha\lambda^2$, $\mathfrak{L}'' = (1-\alpha)a + \frac{1}{3}\alpha a\lambda^2$,

$$f^4\mathfrak{M}'' = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha+\alpha\lambda^2},$$

$$b' = 1,\ \mathfrak{L}''' = (a-l) + \tfrac{2}{3}\alpha c,$$

$$f^4\mathfrak{M}''' = \frac{1}{1-\alpha} - 1;$$

$\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ behalten ihre Werthe. Man erhält daher

$$2gl = 2g\left[l - \frac{\alpha c}{3}(2 + 3\lambda - \lambda^3)\right] + \alpha v^2(1-\lambda^2)(1-\alpha+\alpha\lambda^2) + \frac{l\,dv}{dt}(1-\alpha+\alpha\lambda^2),$$

oder $$l\,.\,\frac{dv}{dt} = \tfrac{2}{3}\alpha g c\,\frac{(2+3\lambda-\lambda^3)}{1-\alpha+\alpha\lambda^2} - \alpha v^2(1-\lambda^2),$$

und man sieht, daſs das Integral dieser Formel durch Logarithmen ausgedrückt wird, und daſs

$$v = \sqrt{\frac{\tfrac{2}{3}gc(2+\lambda-\lambda^2)}{(1-\lambda)(1-\alpha+\alpha\lambda^2)}}$$

die Gränze ist, welcher die Geschwindigkeit sich immer mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

Wäre $Cc$ der oberste Querschnitt der Röhre, so würde $a = 0$ und $\lambda = 0$, und diese Gränze der Geschwindigkeit wäre $v = \sqrt{\dfrac{4gc}{3(1-\alpha)}}$.

In dem am Ende von II. angenommenen Beispiele würde also die Geschwindigkeit nie gröſser, als

$$v = g\,.\sqrt{\frac{1}{2{,}7}} = 0{,}6\,.\,g$$

ungefähr werden, also nie über 10 Fuſs in einer Secunde, wenn die gröſste Erwärmung am obern Ende Statt fände. Diese Gränze der Geschwindigkeit hängt von der Länge der Röhre nicht ab, aber die Geschwindigkeit wächst anfangs schneller, je kürzer die Röhre ist.

389. Man kann sich leicht überzeugen, daſs ähnliche Resultate gefunden werden, wenn man bei einer cylindrischen Röhre auch ein andres Gesetz der Dichtigkeiten annimmt; denn der Coefficient von $v^2$ verschwindet bei einer cylindrischen oder prismatischen Röhre allemal, wenn das verdünnte Fluidum blos einen gewissen Raum in der Mitte der Röhre einnimmt, und die Dichtigkeit oberwärts und unterwärts nach einerlei Gesetze abnimmt: dieser Coefficient erhält ferner einerlei Zeichen mit dem in $dv$ multiplicirten Gliede, wenn die Erwärmung bis ans obere Ende der Röhre reicht, dagegen erhalten die in $v^2$ und $dv$ multiplicirten Glieder verschiedene Zeichen, wenn der erwärmte Raum unten liegt — wenn nämlich alle Glieder der Gleichung an derselben Seite des Gleichheitszeichens stehen.

Setzt man allgemein die Dichtigkeit in dem erwärmten Raume $= 1 - \alpha + \alpha \frac{s^n}{c^n}$, so wird die Bewegung unter sonst gleichen Umständen desto schneller, je gröſser $n$ ist, wovon der Grund auch einleuchtend ist, da die Dichtigkeit bei gröſsern Werthen von $n$ langsamer wächst, also die ganze in dem erwärmten Theile der Röhre enthaltene Masse kleiner ist, als wenn man $n$ kleinere Werthe beilegt.

390. Zweites Exempel. Die Röhre sey zwar an derjenigen Stelle, wo die gröſsere Wärme Statt findet, cylindrisch, aber sie sey an einem Ende oder an beiden mit einem conischen Ansatz versehen, das Gesetz der Dichtigkeiten bleibe eben das, wie im vorigen Exempel.

Ich nehme an, daſs die Erwärmung, und folglich die ungleiche Dichtigkeit sich nur auf den cylindrischen Theil der Röhre erstrecke: es werden daher die Integrale $\int q\,dz$ und $\int \frac{dq}{q^2\,\omega^4}$ auf ähnliche Weise gefunden, wie vorhin, es müssen aber hier mehrere Fälle unterschieden werden.

Erster Fall. Der untere Theil der Röhre sey cylindrisch, und blos am obern Ende sey ein conischer Ansatz angebracht.

I. Die Länge der cylindrischen Röhre sey $= 2c$, und der am meisten erwärmte Punkt liege gerade in der Mitte derselben, daſs also an beiden Enden des cylindrischen Theiles die Dichtigkeit $= 1$ sey.

Bei dieser Voraussetzung wird, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$, und wir brauchen diese Gröſsen gar nicht zu bestimmen. Die Gröſsen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ erhalten eben die Werthe, wie im §. 388. 1., aber $\mathfrak{N}$, $f^2$ und $\gamma^2$ müssen noch bestimmter ausgedrückt werden. Der Halbmesser der cylindrischen Röhre sey $= r$, eben so groſs ist auch der Halbmesser der conischen Röhre an der Stelle, wo sie an diese anschlieſst, oder wo $s = c$ ist, wenn ich der bisherigen Bezeichnungsart gemäſs $s$ von dem am meisten erwärmten Punkte $C$ (Fig. 69 *b.*) an rechne. Am obern Ende sey der conischen Röhre Halbmesser $= r + \varrho$, und für diese Stelle $s = a$, daſs also die Länge des conischen Theils $= a - c$, und die Länge der ganzen Röhre $= l = a + c$ ist. Hiernach wird der Querschnitt $Aa = ff = \pi\,(r+\varrho)^2$

$$Bb = \gamma^2 = \pi r^2,$$

und jeder andre Querschnitt der conischen Röhre

$$Ss = \omega^2 = \left\{r + \varrho\left[\frac{s-c}{a-c}\right]\right\}^2 . \pi,$$

wenn dessen Entfernung vom untern Ende des conischen Theils $= s - c$ ist. In diesen Formeln wird $\varrho$ negativ, wenn die Röhre sich oberwärts verengert.

Nimmt man nun das Integral $\int \frac{ds}{\omega^2}$, so wird für die Enden des cylindrischen Theils $\int \frac{ds}{\omega^2} = \frac{\pm c}{\pi r^2}$, und daher in $Bb$, $f^2\,\mathfrak{N}' = \frac{-c.(r+\varrho)^2}{r^2}$. Für den conischen Theil aber wird

$$\int \frac{ds}{\omega^2} = \frac{(a-c)^2}{\pi} \int \frac{ds}{[ra + \varrho s - (r+\varrho)c]^2}$$

$$= -\frac{(a-c)^2}{\pi . \varrho . [ra + \varrho s - (r+\varrho)c]} + \text{Const.},$$

folglich, weil für $s = c$ dieses Integral $= \frac{c}{\pi r^2}$ werden soll, allgemein

$$\int \frac{ds}{\omega^2} = \frac{c}{\pi r^2} + \frac{(a-c)(s-c)}{\pi r\,[r(a-c)+\varrho(s-c)]},$$

für $s = a$ oder im Querschnitte $Aa$ wird also

$$\mathfrak{N} = \frac{c}{\pi r^2} + \frac{a-c}{\pi r\,(r+\varrho)} = \frac{c\varrho + ar}{\pi r^2\,(r+\varrho)}$$

$$\text{und } f^2\,\mathfrak{N} = \frac{(r+\varrho)(c\varrho + ar)}{r^2},$$

$$\text{endlich } f^2(\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}) = -\frac{2c\varrho\,(r+\varrho)}{r^2} - \frac{(a+c)(r+\varrho)}{r}.$$

Die Formeln §. 387. I. geben also nun

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{(r+\varrho)}{r}\left[a + c + \frac{2c\varrho}{r}\right] = \tfrac{8}{3}\alpha g c - \tfrac{1}{2}v^2\left[1 - \frac{(r+\varrho)^4}{r^4}\right].$$

Ich will $\varrho = \mu r$ setzen, dafs also der obern Oefnung Halbmesser $= r(1+\mu)$ ist, und $\mu$ das negative Zeichen erhält, wenn die Röhre sich nach oben zu verengert, dann wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\tfrac{8}{3}\alpha g c + \tfrac{1}{2}v^2\,[(1+\mu)^4 - 1]}{(1+\mu)(a + c + 2c\mu)},$$

und man sieht sogleich, dafs $t$ durch Kreisbogen ausgedrückt wird, wenn $\mu$ positiv ist, aber durch Logarithmen, wenn $\mu$ negativ ist. Die Bewegung wird also mehr beschleunigt, wenn die Röhre sich nach oben zu erweitert; verengt sie sich oberwärts, so ist

$$v = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\,\frac{\alpha g c}{1 - (1-\mu)^4}\right)}$$

die Gränze, welche die Geschwindigkeit nie überschreitet.

II. Die gröfste Wärme finde im untersten Querschnitte selbst Statt: es sey nun die Länge der cylindrischen Röhre $= c$, des conischen Theils $= a - c$, so werden § 387. II. $\mathfrak{L}'''$ und $\mathfrak{N}' = 0$, $\mathfrak{L}'' = a - \tfrac{2}{3}\alpha c$,

$$f^2\,\mathfrak{N} = \frac{(r+\varrho)(c\varrho + ar)}{r^2},$$

$$\mathfrak{M}''' - \mathfrak{M}'' = \frac{-\alpha}{\pi^2 r^4 (1-\alpha)},$$

ferner $b' = 1 - \alpha$ und $b = 1$,

daher, weil die ganze Länge der Röhre $= a$ ist,

$$2ga = 2ga - \tfrac{4}{3}\alpha gc + \tfrac{1}{2}v^2 \left[1 - \frac{(r+\varrho)^4}{(1-\alpha)r^4}\right] - \frac{\tfrac{1}{2}\alpha v^2}{1-\alpha}\left[\frac{r+\varrho}{r}\right]^4 + \frac{dv}{dt}\cdot\frac{(r+\varrho)(c\varrho + ar)}{r^2},$$

oder

$$\frac{dv}{dt}\cdot\frac{(r+\varrho)(c\varrho+ar)}{r^2} = \tfrac{4}{3}\alpha gc + \tfrac{1}{2}v^2\left\{\left[\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right]\left[\frac{r+\varrho}{r}\right]^4 - 1\right\},$$

oder, wenn ich $\varrho = \mu r$ setze,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\tfrac{4}{3}\alpha gc}{(1+m)(a+\mu c)} + \frac{\tfrac{1}{2}v^2\left\{\left[\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right](1+\mu)^4 - 1\right\}}{(1+\mu)(c\mu+a)}.$$

Diese Formel enthält drei verschiedene Fälle. Ist nämlich $\mu$ positiv, oder erweitert sich die conische Röhre oberwärts, so ist der Coefficient von $v^2$ positiv, und die Geschwindigkeit wird also durch die Tangente eines Bogens ausgedrückt, welcher der Zeit proportional ist, sie erhält also schon nach einer endlichen Zeit einen unendlichen Werth. Eben dies findet noch Statt, wenn $\mu = 0$, oder die ganze Röhre cylindrisch, und selbst noch, wenn $\mu$ negativ ist, wofern nur im letztern Falle

$$(1+\alpha)(1-\mu)^4 > 1-\alpha.$$

Wird aber $(1-\mu)^4 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, oder verhält sich $f^2 : \gamma^2$, oder Querschnitt $Aa : Bb = \sqrt{(1-\alpha)} : \sqrt{(1+\alpha)}$, so wird die Bewegung gleichförmig beschleunigt, und $v$ der Zeit $t$ proportional. Nimmt man endlich die obere Oefnung noch enger an, so gibt es wieder eine Gränze für die Geschwindigkeit, welche desto kleiner ist, je enger man die obere Oefnung annimmt, sie wird nämlich

$$v = \sqrt{\frac{\tfrac{8}{3}\alpha gc(1-\alpha)}{1-\alpha-(1+\alpha)(1-\mu)^4}}.$$

Man kann also im Allgemeinen sagen, daſs die Geschwindigkeit kleiner wird, wenn der oben angebrachte conische Ansatz sich obeswärts verengert.

Zweiter Fall. Das cylindrische Stück mache den obern Theil der Röhre aus, und es sey unten ein conischer Ansatz angebracht.

I. Die Länge der cylindrischen Röhre (Fig. 69 *c.*) sey $= a + c$ gröſser als $2c$, der erwärmte Raum nehme ihr unteres Ende so ein, daſs $Cf = c$ oder im ersten Querschnitte des conischen Theiles die Dichtigkeit schon $= 1$ ist.

Der cylindrischen Röhre Halbmesser sey $= r$, also $Aa = Ff = r^2\pi = f^2$, des untersten Querschnittes der conischen Röhre Halbmesser sey $= r + \varrho$, also

$$Bb = \gamma^2 = \pi(r + \varrho)^2,$$

und für den conischen Theil

$$\omega^2 = \pi\left[r + \varrho\,\frac{s - c}{h - c}\right]^2,$$

wenn dieses Querschnittes $Ss$ Entfernung von $Cc = s$, und die Länge des conischen Theils der Röhre $= h - c$ ist. Man erhält hier wieder $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = 0$; $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ erhalten die Werthe, wie in §. 388. I., ferner wird $f^2\,\mathfrak{N} = a$, und für den Querschnitt $Ff$ das Integral $\int \frac{ds}{\omega^2} = \frac{-c}{\pi r^2}$, für den conischen Theil aber

$$\int \frac{-ds}{\omega^2} = + \frac{(h - c)^2}{\pi\varrho\,[r\,(h - c) + (s - c)\,\varrho]} + \text{Const.},$$

$$\text{folglich } \mathfrak{N}' = -\frac{(h - c)}{\pi r\,(r + \varrho)} - \frac{c}{\pi r^2},$$

$$f^2\,\mathfrak{N}' = -\frac{(h - c)\,r}{r + \varrho} - c.$$

Mithin wird

$$\frac{dv}{dt}\left[c + a + \frac{(h - c)\,r}{r + \varrho}\right] = \tfrac{8}{3}\,\alpha g c - \tfrac{1}{2}\,v^2\left[1 - \frac{r^4}{(r + \varrho)^4}\right],$$

und wenn die Röhre sich unterwärts erweitert, so gibt es allemal eine endliche Gränze, welcher die Geschwindigkeit sich nähert. Man findet diese Gränze, wenn man $\frac{dv}{dt} = 0$ setzt, und sie ist $v = 4\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\alpha g c . (1+\mu)^4}{(1+\mu)^4 - 1}}$, wenn ich $\varrho = \mu r$ setze. Erweiterte die Röhre sich unterwärts so sehr, daſs man $\left(\frac{r}{r+\varrho}\right)^4$ als einen unbedeutenden Bruch ganz weglassen könnte, so würde die Gränze der Geschwindigkeit $v = 4\sqrt{\frac{1}{3}\alpha g c}$.

II. Die gröſste Wärme finde in dem höchsten Querschnitte der Röhre in $Aa$ Statt, und die Länge des cylindrischen Theils sey $= c$, daſs also die Erwärmung sich bis an $Ff$ erstreckt, aber in $Ff$ die Dichtigkeit doch schon $= 1$ ist.

Hier wird, wenn ich sonst die vorigen Bezeichnungen beibehalte, für die allgemeinen Ausdrücke des §. 387. II. $b = 1 - \alpha$, $b' = 1$, $f^2 = \pi r^2$, $\gamma^2 = \pi(r+\varrho)^2$, $l = h$, $\mathfrak{L}'' = 0$, $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{L}''' = -h + \frac{2}{3}\alpha c$,

$$f^4(\mathfrak{M}''' - \mathfrak{M}'') = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}, \; f^2\mathfrak{N}' = -\frac{(h-c)r}{r+\varrho} - c,$$

folglich

$$\frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{hr + c\varrho}{r+\varrho}\right) = \frac{4}{3}\frac{g\alpha c}{1-\alpha} - \frac{1}{2}v^2\left(1 + \alpha - \frac{(1-\alpha)r^4}{(r+\varrho)^4}\right),$$

und bei Röhren, die sich unten erweitern, gibt es eine endliche Gränze für die Geschwindigkeit, welche

$$v = (r+\varrho)^2 . \sqrt{\frac{\frac{8}{3}g\alpha c}{(1-\alpha)[(1+\alpha)(r+\varrho)^4 - r^4(1-\alpha)]}}$$

ist, und für ein sehr groſses $\varrho$ bei Röhren, die sich unten sehr erweitern, $= \sqrt{\frac{\frac{8}{3}g\alpha c}{1-\alpha^2}}$.

Wenn die Röhre nach unten zu enger wird, also $\varrho$ mit dem negativen Zeichen vorkommt, so kann der Coefficient von $v^2$ positiv werden, wenn

$$\frac{r^2}{(r-\varrho)^2} > \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \text{ oder } \frac{f^2}{\gamma^2} > \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$$

ist; in diesem Falle würde also die Bewegung unendlich beschleunigt werden.

Will man die Untersuchung blos als mathematische Betrachtung fortsetzen, so kann man noch hinzufügen:

III. Die gröſste Wärme finde in $Ff$ (Fig. 69 c.) Statt, aber sie erstrecke sich blos aufwärts, so daſs in der conischen Röhre die Dichtigkeit $= 1$ sey.

In diesem Falle wird $b = b' = 1$, und man kann die Formeln §. 387. I. gebrauchen. Man hat aber $\mathfrak{L} = c - \frac{2}{3}\alpha c$, $\mathfrak{L}' = -c$, weil die Dichtigkeit unterhalb allenthalben $= 1$ ist, $f^4(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$, $f^2\mathfrak{N} = a$, $f^2\mathfrak{N}' = \frac{-rh}{(r+\varrho)}$; diese Werthe in die allgemeine Gleichung gesetzt, geben:

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{(ar + rh + a\varrho)}{(r+\varrho)} = \frac{4}{3}\alpha gc - \frac{1}{2}v^2\left[1 - \frac{r^4}{(r+\varrho)^4} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\alpha gc - \frac{1}{2}v^2\left[\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} - \frac{r^4}{(r+\varrho)^4}\right].$$

Statt also, daſs bei einer cylindrischen Röhre, wenn kein unten erweiterter Ansatz da ist, die Geschwindigkeit sehr bald unendlich werden sollte, gibt es hier eine Gränze, welche sie nie erreichen kann. Indeſs zeigt die Formel, daſs dieses nur dann Statt findet, wenn

$$\frac{r^2}{(r+\varrho)^2} \text{ oder } \frac{f^2}{\gamma^2} < \sqrt{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}$$

ist, und daſs also eine geringe Erweiterung der Mündung Statt finden kann, ohne die unendliche Beschleunigung aufzuheben. Wird hingegen $\varrho$ sehr groſs gegen $r$, oder die conische Röhre unten sehr weit, so ist die Gränze der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}\alpha gc.(1-\alpha)}{1-2\alpha}}$.

391. Der zuletzt betrachtete Fall findet in der Natur wohl immer Statt, wenn auch die Röhre nicht mit einem

aus festen Wänden gebildeten conischen Ansatze versehen ist, denn allemal wird das aufsen zuströmende Fluidum auf ähnliche Weise einen trichterförmigen Strudel bilden, wie bei dem Ausflusse aus weiten Gefäfsen durch eine enge Oefnung. Man sieht also aus dem letzten Exempel einen Grund, warum die Bewegung nicht so sehr beschleunigt wird, als die Rechnungen bei einer cylindrischen Röhre angaben. Vergleichen wir das Beispiel §. 388. II. mit den Formeln III. des letzten §., so würde $v$ nie gröfser, als etwa $\frac{1}{3}g$, oder 5 Fufs in einer Secunde werden können, statt dafs es dort schon nach wenig Secunden unendlich grofs werden sollte.

392. Uebrigens zeigt das zweite Exempel im Allgemeinen, dafs eine Verengerung oberhalb und eine Erweiterung unterhalb des erwärmten Theiles der Röhre die Beschleunigung der Bewegung vermindert: eine Erweiterung des obern Theiles, oder eine Verengerung des untern aber die Geschwindigkeit unter sonst gleichen Umständen vergröfsert: indefs mufs man nie vergessen, dafs der aufserhalb der Röhre entstehende Strudel, welcher desto merklicher wird, je schneller die Bewegung ist, immer verursacht, dafs die Geschwindigkeit gewisse Gränzen nicht überschreiten wird.

Wie die Bewegung ausfallen würde, wenn auch der erwärmte Theil der Röhre nicht cylindrisch, sondern selbst conisch wäre, läfst sich hieraus einigermafsen voraussehen.

Die genauere Untersuchung dieses Falles hat weiter keine Schwierigkeit, als die einer etwas weitläuftigen Rechnung, welche vorzüglich durch das Integral der Formel $\frac{dq}{q^2\,\omega^4}$ verursacht wird. Dieses Differential enthält nämlich dann im Nenner sechs von $s$ abhängende Factoren, und mufs daher in sechs Brüche zerfället werden, aus denen man dann zwar leicht genug die Werthe von $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}$ findet, aber doch nicht ohne Schwierigkeit die Fälle bestimmen kann, wenn

die Summe aller Coefficienten von $v^2$ positiv oder negativ wird, wovon doch der Hauptumstand, ob nämlich die Geschwindigkeit unendlich werden kann, oder nicht, abhängt.

393. Wollte man ferner diese Untersuchung auf Röhren anwenden, deren gerade Axe nicht vertical, sondern gegen den Horizont unter einem bekannten Winkel $= \eta$ geneigt ist, so würden die Formeln eben so ausfallen, wie im §. 387., blos mit dem Unterschiede, daſs die aus $\int q\,dz$ entspringenden Glieder in Sin $\eta$ multiplicirt werden müſsten. Es ist daher leicht zu übersehen, daſs man z. B. für die cylindrische Röhre §. 388. I.

$$v = \tfrac{8}{3}\,\frac{\alpha g c t}{l}\,.\,\mathrm{Sin}\,\eta$$

finden würde, und in allen übrigen Fällen $v$ kleiner, als für verticale Röhren. Wenn $\eta = 0$ oder die Röhre horizontal ist, so ist ohnehin einleuchtend, daſs $v = 0$ werden muſs.

Obgleich nun bei dem Luftzuge in erwärmten Röhren, in Schornsteinen etc. auſser andern Umständen auch noch vorzüglich das müſste in Betrachtung gezogen werden, daſs bei der Luft die Dichtigkeit vom Drucke abhängt, so werden doch die hier angestellten Untersuchungen einigermaſsen auch auf diese Bewegungen der Luft anwendbar seyn, und zeigen wenigstens im Allgemeinen die Gesetze einer solchen Bewegung. Wollte man die Untersuchung so vervollkommnen, daſs man auf die Abhängigkeit der Gröſsen $q$ und $p$ von einander Rücksicht nähme, so würden dazu die Formeln dienen, welche wir in der folgenden Abtheilung näher betrachten werden. Aber die Auflösung dieser Formeln hat weit mehr Schwierigkeit, als in den bisher betrachteten Fällen.

## Dritte Abtheilung.

## Von der Bewegung der Luft in Röhren.

### Erster Abschnitt.

### *Von den kleinen Schwingungen der Luft in Röhren, welche überall gleich weit sind.*

394. Problem 78.

Wenn die Luft in einer horizontalen, überall gleich weiten Röhre, diese mag gerade oder gekrümmt seyn, auf irgend eine Weise in Bewegung gesetzt wird, die Gleichungen zu finden, welche die Bewegung bestimmen.

Auflösung. $AB$ (Fig. 70.) sey diese Röhre, welche, sie mag gerade oder krumm seyn, in der Figur als gerade dargestellt werden kann, weil die Bewegung durch die Krümmung keine Aenderung leidet, wofern diese nur das Gesetz der Stetigkeit befolgt. Die Gröfse aller Querschnitte der Röhre sey $= ff$.

Die Auflösung dieses Problems wird am besten nach der zweiten Methode aus dem anfänglichen Zustande der Luft hergeleitet, daher ich das 51te Problem hier zum Grunde lege. Wir betrachten daher ein Lufttheilchen, welches sich anfangs, als die Zeit $t = 0$ war, in $S$ befand, und nennen die Entfernung $AS = S$, die anfäng-

liche Dichtigkeit des Theilchens $= \varrho$. Da hier die Röhre als überall gleich weit vorausgesetzt ward, so ist das dortige $\Omega$ hier $= ff$. Eben dieses Theilchen sey am Ende der Zeit $t$ nach $s$ gekommen, und es sey $As = s$, die Dichtigkeit, welche es hier erlangt hat, $= q$, der Druck $= p$; der Querschnitt der Röhre ist auch hier $\omega = ff$; die Geschwindigkeit nach der Richtung $sB$ sey jetzt $= x = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. Wenn man diese Bezeichnungen in den dort gefundenen Gleichungen anwendet, so gibt die erste Gleichung

$$q\left(\frac{ds}{dS}\right) = \varrho;$$

und weil in einer horizontalen Röhre die Schwere auf die Bewegung keinen Einfluſs hat, so erhält die zweite Gleichung die Form

$$\frac{2g\,dp}{q} = -\,ds\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right),$$

welche, weil man $t$ als beständig betrachtet, auch so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = 0,$$

und man muſs sich bei der fernern Auflösung erinnern, daſs $p$, $q$, $s$ Functionen von $s$ und $t$, $\varrho$ aber blos eine Function von $S$ ist.

Da bei der Luft, wenn man auf die Wärme nicht Rücksicht nimmt, der Druck der Dichtigkeit proportional ist, so kann man $p = \frac{aq}{b}$ setzen, wenn bei dem Drucke $= a$ die Dichtigkeit $= b$ ist, und die letzte Gleichung wird daher auch

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = 0,$$

die erste $q\left(\frac{ds}{dS}\right) = \varrho$ kann man so beibehalten. Nimmt

man beide Gleichungen zusammen, indem man in jene statt $q$ seinen Werth $= \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$ setzt, und statt

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)} - \frac{Q\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2},$$

$$\text{also } \frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{QdS} - \frac{\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)},$$

so erhält man

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ga}{b}\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0,$$

und dieses ist die Hauptgleichung, welche die Bewegung bestimmt. Diese Gleichung mufs so aufgelöst werden, dafs für $t = 0$, $s = S$, und folglich $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ und $q = Q$ wird.

395. Auf der Auflösung dieser Gleichung beruht die ganze Theorie der Bewegung der Luft in Röhren. Wenn man nämlich angeben könnte, was für eine Function von $S$ und $t$ für $s$ gesetzt werden müsse, um das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung des zweiten Grades auszudrücken, so würde man alle Bewegungen, welche die Luft in der überall gleich weiten Röhre annehmen kann, zu bestimmen im Stande seyn.

Da diese Gleichung Differentiale des zweiten Grades enthält, so mufs ihr vollständiges Integral zwei unbestimmte Functionen enthalten, die in jedem einzelnen Falle aus dem anfänglichen Zustande bestimmt werden müssen. Diese zwei Functionen müssen nothwendig vorkommen, weil sowohl die anfängliche Lage als Bewegung jedes Theil-

chens gegeben sind, und die Gleichung auf alle Fälle passen mufs.

396. Um jene Gleichung aufzulösen, ist bisher noch kein Mittel bekannt, und man sieht daher, was für ein schweres Problem es ist, die Bewegungen der Luft zu bestimmen, da schon der einfachste Fall, wo die Wärme überall gleich ist, die Querschnitte der Röhre gleich grofs sind, und die Einwirkung der Schwere bei Seite gesetzt wird, auf eine so schwierige Gleichung führt. Man darf hiegegen nicht einwenden, dafs man doch die Wirkung der bewegten Luft in einzelnen Fällen richtig bestimmt habe, z. B. die Kraft, welche die in Windbüchsen verdichtete Luft auf die Kugel ausübt: denn hier nahm man keine Rücksicht auf die Bewegung der Luft selbst, sondern betrachtete diese in jedem Augenblicke als ruhend, daher darf man dieses keineswegs als ein Beispiel anführen, wo über die Bewegung der Luft etwas bestimmt sey: vielmehr mufs man gestehen, dafs wir in dieser Lehre fast noch gar nichts wissen.

397. Da wir zur Auflösung des Problems uns der zweiten vorhin gelehrten Methode bedient haben, so könnte man vermuthen, dafs vielleicht die Anwendung der ersten Methode auf bequemere Gleichungen führen werde: ich will daher auch nach dieser Methode die Auflösung suchen.

Man betrachte daher, wie im 50ten Problem, am Ende der Zeit $= t$ ein Lufttheilchen in $s$, und setze die Entfernung $As = s$; die Dichtigkeit, welche in diesem Augenblick in $s$ Statt findet, $= q$, den Druck $= p$, die Geschwindigkeit $= u$ nach der Richtung $sB$. Da nun die Weite der Röhre überall gleich $\omega = ff$, und auf keine beschleunigende Kräfte gesehen wird, so sind die beiden Hauptgleichungen

$$\left(\frac{d.qu}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

$$\text{und } \frac{2g\,dp}{q} = -z\,dz - ds\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

oder, weil $p = \frac{aq}{b}$ ist,

$$\frac{2ga\,dq}{bq} = -z\,dz - ds\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Diese Gleichung läſst sich, weil $t$ als beständig betrachtet wird, auf die Form

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{ds}\right) + z\left(\frac{dz}{ds}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right) = 0$$

bringen.

Die erste Gleichung gibt, wenn man sie entwickelt,

$$z\left(\frac{dq}{ds}\right) + q\left(\frac{dz}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0;$$

man setze $q = e^y$, so wird diese Gleichung

$$z\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{dz}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

und die zweite Gleichung gibt

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right) + z\left(\frac{dz}{ds}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

$$\text{oder } \left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{-bz}{2ga}\left(\frac{dz}{ds}\right) - \frac{b}{2ga}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Aus der ersten Gleichung aber folgt

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -z\left(\frac{dy}{ds}\right) - \left(\frac{dz}{ds}\right),$$

$$\text{oder } \left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{dz}{ds}\right) + \frac{bz^2}{2ga}\left(\frac{dz}{ds}\right) + \frac{bz}{2ga}\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

und wenn man hieraus den doppelten Werth von

$$\left(\frac{d^2y}{ds\,dt}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt\,ds}\right)$$

sucht, und beide gleich setzt, so folgt:

$$\left(z^2 - \frac{2ga}{b}\right)\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right) + 2z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{dz}{ds}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + 2z\left(\frac{d^2z}{dt\,ds}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

und aus dieser Gleichung müſste $s$ bestimmt werden. Aber diese Gleichung ist gar nicht leichter, als die vorhin gefundene, und jene hat noch den Vorzug, daſs sie sich sehr gut auf kleine Schwingungen oder Vibrationen der Lufttheilchen anwenden läſst, wie wir jetzt näher sehen werden.

398. Problem 79. Wenn bei den Voraussetzungen des vorigen Problems die Bewegung der Luft so beschaffen ist, daſs jedes Lufttheilchen sich nur äuſserst wenig von der Stelle entfernt, welche es anfangs einnahm, diese kleinen Bewegungen der Luft zu bestimmen.

Auflösung. Um die Auflösung des vorigen Problems hier anzuwenden, müssen wir annehmen, daſs der Raum $Ss$, um welchen das Theilchen sich von seiner anfänglichen Lage entfernt hat, sehr klein sey. Es sey also $s = S + z$, wo wir $z$ als sehr klein betrachten, so erhält die im vorigen Probleme gefundene Gleichung folgende Form:

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left\{1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right\} - \frac{2ga}{b}\left(\frac{d^2z}{dS^2}\right) + \left\{1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right\}^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0,$$

welche sich, wenn man $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ als sehr klein voraussetzt, (und daher alle Glieder wegläſst, welche Producte aus Differentialquotienten enthalten) so ausdrücken läſst:

$$\frac{2gadQ}{bQdS} - \frac{2ga}{b}\left(\frac{d^2z}{dS^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung würde sich integriren lassen, wenn das erste Glied nicht da wäre; denn alsdann fände man (vergl. §. 199.)

$$z = \Gamma : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \Delta : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right),$$

aber das erste Glied erschwert die Auflösung nicht, weil es blos Functionen von $S$ enthält, und es ist daher das vollständige Integral jener Gleichung

$$z = \int dS \log.\frac{Q}{B} + \Gamma : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \Delta : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right).$$

Hieraus findet man ferner, weil $\left[\frac{ds}{dS}\right] = 1 + \left[\frac{dz}{dS}\right]$,

$$\left[\frac{ds}{dS}\right] = 1 + \log. \frac{Q}{B} + \Gamma' : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] + \Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]$$

und

$$\left[\frac{ds}{dt}\right] = \sqrt{\frac{2ga}{b}} . \Gamma' : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}} . \Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right].$$

Daher nun leicht die Dichtigkeit $q = \frac{Q}{\left[\frac{ds}{dS}\right]}$, der Druck $p = \frac{aq}{b}$ und die Geschwindigkeit $z = \left[\frac{ds}{dt}\right]$ für das Ende der Zeit $t$ gefunden wird, und hiemit ist der ganze Zustand der Luft am Ende jeder Zeit $= t$ völlig bestimmt, wenn nur die Functionen $\Gamma$ und $\Delta$ bestimmt sind, welches durch den gegebnen anfänglichen Zustand auf folgende Weise geschieht.

Es sind für den anfänglichen Zustand für jedes Theilchen sowohl die Dichtigkeit $= Q$, als die Geschwindigkeit $= \Upsilon$ gegeben, und die gefundenen allgemeinen Ausdrücke für $q$ und $z$ müssen also, auf den anfänglichen Zustand angewandt, diesen Functionen gleich werden. Im Anfange der Zeit $t$ war $t = 0$, $s = S$, $z = 0$, also

$$0 = \int dS \log. \frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S,$$

und hiedurch geschieht zugleich der Bedingung, daſs jetzt $q = Q$ seyn muſs, Genüge; denn wenn allgemein $z = 0$ ist, so ist offenbar auch $\left[\frac{dz}{dS}\right]$ für diesen Augenblick $= 0$ (denn, wenn $z$ den Raum bezeichnet, den irgend ein Theilchen zurückgelegt hat, so ist $z + \left[\frac{dz}{dS}\right] dS$ der Raum, welchen das nächst angränzende durchlaufen hat; aber für $t = 0$ ist dieser für alle Theilchen $= 0$), folglich $\left[\frac{ds}{dS}\right] = 1$.

Die Gleichung für die Geschwindigkeit gibt im anfänglichen Zustande

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}} \cdot \Gamma' : S - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}} \Delta' : S,$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann nun die Form der Functionen $\Gamma$, $\Delta$ bestimmt werden, wodurch alsdann der Zustand der ganzen Luftmasse für jeden Zeitpunkt angegeben werden kann.

399. Weil der Voraussetzung zu Folge $z$ immer sehr klein seyn soll, so mufs auch im anfänglichen Zustande die Dichtigkeit $Q$ nur sehr wenig von der natürlichen Dichtigkeit $= B$, welche zum Gleichgewicht erfordert würde, abweichen; denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so könnte das von $Q$ abhängende Glied den Werth von $z$ zu sehr vergröfsern.

Diejenigen Glieder, welche unbestimmte Functionen enthalten, kann man leicht so ausdrücken, dafs sie $z$ nicht zu grofs angeben können, man braucht sie nämlich nur in einen sehr kleinen Bruch $= \alpha$ zu multipliciren, und kann

$$z = s - S = \int dS . \log. \frac{Q}{B} + \alpha \Gamma : \left(S + t \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\right)$$
$$+ \alpha \Delta : \left(S - t \sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

setzen. Durch diesen Coefficienten $\alpha$ erhalten die beiden Gleichungen für den anfänglichen Zustand folgende Form:

$$o = \int dS \log. \frac{Q}{B} + \alpha \Gamma : S + \alpha \Delta : S$$

$$\text{und } \Upsilon = \frac{\alpha \sqrt{2ga}}{\sqrt{b}} (\Gamma' : S - \Delta' : S),$$

woraus zugleich erhellt, dafs auch die anfänglichen Geschwindigkeiten nur sehr klein seyn dürfen.

Für jeden andern Zeitpunkt aber wird

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \log. \frac{Q}{B} + \alpha \Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \alpha \Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right),$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \varepsilon = \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\left\{\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) - \Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)\right\},$$

daher auch die Geschwindigkeit $\varepsilon$ in jedem folgenden Zeitpunkte sehr klein bleibt.

400. Es ist aber auch nicht gerade nothwendig, daſs die Gröſse $z$ selbst sehr klein sey, sondern nur, daſs das Differential $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ es ist, man könnte daher dem Werthe von $z$ noch ein Glied $= \beta t$ hinzufügen, und für $\beta$ jede beständige Gröſse setzen. Daſs dieses Glied in den vorigen Schlüssen nichts ändert, ist offenbar, denn die partiellen Differentiale $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ leiden dadurch keine Aenderung, und nur von diesen hängt die Differentialgleichung und die Vereinfachung derselben durch die Voraussetzung, daſs $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ sehr klein sey, ab. Die Geschwindigkeiten $\Upsilon$ und $\varepsilon$ werden hiedurch um die beständige Gröſse $\beta$ vermehrt, und alles verhält sich so, als ob die Röhre mit der darin enthaltenen Luft gleichförmig fortbewegt würde, oder der Luft zugleich eine gleichförmige Geschwindigkeit mitgetheilt wäre, mit welcher sie in der Röhre fortströmte, während jene kleine Schwingungen oder Vibrationen Statt fänden.

Da aber die hievon abhängenden Umstände der Bewegung für sich klar sind, so brauchen wir dabei nicht zu verweilen, sondern betrachten die kleinen Vibrationen als die einzige bei der Luftmasse in der Röhre Statt findende Bewegung.

401. Wenn man die Functionen $\Gamma$, $\Delta$ willkürlich annimmt, so wird daraus der anfängliche Zustand leicht bestimmt: schwerer aber ist es, aus dem gegebnen anfänglichen Zustande umgekehrt die Form jener Functionen zu bestimmen. — Nimmt man auch nur eine der beiden Fun-

ctionen willkürlich an, so wird daraus die andre vermittelst der Gleichung

$$o = \int dS . \log \frac{Q}{B} + \alpha \Gamma : S + \alpha \Delta : S$$

bestimmt; dieses läſst sich sehr deutlich zeigen, wenn man die Functionen als Ordinaten einer Curve darstellt. Es stelle $AB$ (Fig. 71.) die Länge der Röhre vor, auf welcher man die Abscissen $AT = S$ nimmt: über derselben zeichne man eine krumme Linie $DQE$, deren Ordinaten $SQ = \int d\,S \log. \frac{Q}{B}$, und eine andre willkürliche Curve $F\Gamma G$, deren Ordinate $S\Gamma = \alpha . \Gamma : S$ ist, die also diese unbestimmte Function darstellt. Man construire ferner unterhalb der Abscissenlinie eine neue Curve $H\Delta I$ nach dem Gesetze, daſs jede Ordinate $S\Delta = SQ + S\Gamma$, gleich der Summe der Ordinaten der beiden andern Curven sey, so ist $S\Delta = -\alpha . \Delta : S$, und so ist durch die beiden ersten Linien eine dritte bestimmt, welche die Function $\Delta : S$ darstellt. Wenn man so die Functionen durch krumme Linien darstellt, so kann man auch die anfängliche Geschwindigkeit $\Upsilon$ für jeden Punkt bestimmen, man hat nämlich

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha . \Gamma' : S - \alpha \Delta' : S,$$

welches sich auch, weil

$$\alpha \Gamma' : S = \frac{d . S\Gamma}{d . AS} \text{ und } \alpha \Delta' : S = -\frac{d . S\Delta}{d . AS}$$

ist, so ausdrücken läſst:

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{d . (S\Gamma + S\Delta)}{d . AS} = \frac{d . \Gamma\Delta}{d . AS},$$

und man brauchte daher nur die Tangenten der Curven $F\Gamma G$ und $H\Delta I$ zu ziehen, um das Verhältniſs dieser Differentiale, und dadurch $\Upsilon$ zu bestimmen. Wichtiger aber ist es, zu untersuchen, wie man aus der gegebnen Dichtigkeit und Geschwindigkeit die Natur der beiden Curven $F\Gamma G$ und $H\Delta I$ herleitet; dieser Frage ist das folgende Problem gewidmet.

402. Problem 80. Aus der für jeden Punkt $S$ bekannten Dichtigkeit und Geschwindigkeit der Luft im anfänglichen Zustande alle Umstände der Bewegung der Luft am Ende der Zeit $t$ zu bestimmen, vorausgesetzt, daſs die Aenderung der Dichtigkeit und die Geschwindigkeit im anfänglichen Zustande sehr klein war.

Auflösung. Die Forderung dieser Aufgabe kommt darauf hinaus, daſs man die Form der Functionen $\Gamma$, $\Delta$ (Fig. 72.) aus den beiden schon oft erwähnten Gleichungen

$$0 = \int dS . \log \frac{Q}{B} + \alpha \Gamma : S + \alpha \Delta : S$$

$$\text{und } \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha \Gamma' : S - \alpha \Delta' : S$$

bestimme. Die erste dieser Gleichungen gibt, wenn man sie differentiirt,

$$- \log . \frac{Q}{B} = \alpha \Gamma' : S + \alpha \Delta' : S,$$

und beide vereinigt, ergeben für die unbestimmten Functionen folgende Werthe:

$$\alpha \Gamma' : S = \tfrac{1}{2} \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} \log . \frac{Q}{B}$$

$$\text{und } \alpha \Delta' : S = - \tfrac{1}{2} \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} \log . \frac{Q}{B},$$

die man nun in einer Construction darstellen kann. Aus der für den Punkt $S$ gegebnen Dichtigkeit $Q$, welche wenig von der Dichtigkeit $B$, bei welcher das Gleichgewicht bestehen würde, verschieden ist, suche man $\log . \frac{Q}{B}$, wofür man hier mit hinlänglicher Genauigkeit $\frac{Q - B}{B}$ setzen kann, und zeichne nun über der Axe $AB$ die krumme Linie $CQD$ so, daſs jeder Abscisse $AS = S$, die Ordinate

$$SQ = \log . \frac{Q}{B} = \frac{Q - B}{B}$$

zugeordnet wird. Ferner, da auch die Geschwindigkeit

in $S$ gegeben ist, vermöge welcher dieses Theilchen in einer Secunde nach der Richtung $SB$ den Raum $= \Upsilon$ zurücklegen würde, so ziehe man eine zweite Curve $EYF$, deren Ordinaten $SY$, $= \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ in jedem Punkte $S$ sind. Man übersieht leicht, daſs diese Linien zu einer Darstellung der Functionen $\Gamma'$, $\Delta'$ führen. Man zeichne nämlich zu derselben Axe zwei neue Linien, $G\Gamma H$ (Fig. 73.) oberhalb der Axe, deren Ordinaten $S\Gamma = \frac{1}{2} SY - \frac{1}{2} SQ$ genommen werden; die Linie $I\Delta K$ hingegen unterhalb der Axe, und ihre Ordinaten $S\Delta = \frac{1}{2} SY + \frac{1}{2} SQ$; dann stellt jede Ordinate $S\Gamma'$ die Function $\alpha\Gamma' : S$ und jede Ordinate $S\Delta$ die Gröſse $- \alpha\Delta' : S$ vor. Da aber $\Gamma : S = \int dS . \Gamma' : S$, so wird diese Function durch Flächenräume ausgedrückt, und $\alpha . \Gamma : S = AGS\Gamma$ und $\alpha . \Delta : S = - AIS\Delta$, oder, wenn wir zu den Curven der 72. Figur zurückkehren:

$$\alpha . \Gamma' : S = \tfrac{1}{2}(SY - SQ) \text{ und } \alpha . \Delta' : S = - \tfrac{1}{2}(SY + SQ),$$

$$\alpha . \Gamma : S = \tfrac{1}{2}(AESY - ACSQ)$$

$$\text{und } \alpha . \Delta : S = - \tfrac{1}{2}(AESY + ACSQ).$$

Will man nun den Zustand der Luftmasse nach einem Zeitraum von $t$ Secunden bestimmen, so nehme man auf der Axe $AB$ (Fig. 72.) vom Punkte $S$ an nach beiden Seiten die Entfernung $ST = st = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, damit

$$AT = S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}} \text{ und } At = S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

sey, so wird

$$\alpha . \Gamma' : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] = \tfrac{1}{2}(TN - TM),$$

$$\alpha . \Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] = - \tfrac{1}{2}(tn + tm),$$

$$\alpha . \Gamma : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] = \tfrac{1}{2}(AETN - ACTM),$$

$$\alpha . \Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] = - \tfrac{1}{2}(AEtn + ACtm),$$

und hieraus läfst sich der Ort bestimmen, wohin das Theilchen, welches sich anfangs in $S$ befand, während der Zeit $t$ gekommen ist: denn es wird (in Fig. 70.)

$$Ss = ACSQ + \tfrac{1}{2}AETN - \tfrac{1}{2}ACTM - \tfrac{1}{2}AEtn - \tfrac{1}{2}ACtm,$$

oder, welches einerlei ist,

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm.$$

Aus den vorigen Gleichungen ist bekannt, dafs die Dichtigkeit, welche eben das Theilchen jetzt am Ende der Zeit $= t$ erlangt hat, $q = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{ds}{dS}\right)}$ ist; man findet aber, wenn man die vorigen Formeln auf Fig. 72. anwendet,

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + SQ + \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm,$$

und die folgenden Glieder sind hier gegen das erste, gegen 1, sehr klein, daher ist auch

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm),$$

und endlich erhält man für die Geschwindigkeit nach der Richtung $SB$ den Ausdruck

$$s = \tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

Auf diese Weise läfst sich also der Zustand und die Bewegung jedes Lufttheilchens in der Röhre für alle folgenden Zeitpunkte bestimmen, wenn die anfängliche Erschütterung bekannt ist, welche das Gleichgewicht aufhob.

403. Wenn anfänglich das Gleichgewicht gar nicht gestört war, sondern überall $Q = B$ und $\Upsilon = 0$, so werden die Linien $CQD$ und $EYF$ gerade, und fallen mit der Axe selbst zusammen; alle Ordinaten und Flächenräume werden daher $= 0$, und die Formeln geben richtig an, dafs jedes Theilchen seine anfängliche Stelle behält und das Gleichgewicht fortdauert.

Hätte anfangs blos die Dichtigkeit eine Aenderung gelitten, die Geschwindigkeit aber wäre überall $= 0$ ge-

wesen, so würden alle Ordinaten der Curve $EYF$, $= 0$, und daher für jeden folgenden Zeitpunkt der Raum

$$z = -\tfrac{1}{2} SQTM + \tfrac{1}{2} SQtm,$$

die Dichtigkeit $q = Q(1 - SQ + \tfrac{1}{2} TM + \tfrac{1}{2} tm)$,

die Geschwindigkeit $s = \tfrac{1}{2}(tm - TM)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Setzt man dagegen voraus, im anfänglichen Zustande sey die Dichtigkeit überall ungeändert geblieben, aber jedem Theilchen eine gewisse Geschwindigkeit $= T$ ertheilt, so verschwinden alle Ordinaten der Curve $CQD$, und man erhält für jeden Zeitpunkt $z = \tfrac{1}{2} TNtn$,

$$q = Q(1 - \tfrac{1}{2} TN + \tfrac{1}{2} tn),$$

$$s = \tfrac{1}{2}(TN + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

404. Die Ordinaten dieser Curven $CQD$, $EYF$ sind nicht durch linearische Gröſsen, sondern durch Zahlen ausgedrückt: bei ihrer Construction muſs man also eine gewisse Linie als Einheit annehmen, und daraus verhältniſsmäſsig die Gröſse jeder Ordinate bestimmen. Um dann die sehr kleinen Aenderungen der Dichtigkeit und der Geschwindigkeit in einer Figur darstellen zu können, muſs man die willkürliche Einheit zu diesem Zwecke groſs genug annehmen. — Man muſs sich hiebei an die eigentliche Bedeutung unsrer Buchstaben, welche nämlich linearische, und welche numerische Gröſsen bezeichnen, erinnern. Die Zeit $= t$ erstlich ist eine absolute Zahl, und sie wird in Secunden ausgedrückt, weil die gleich zu erwähnende Gröſse $g$ sich auf Secunden bezieht. Zweitens, auch die Buchstaben $B$, $b$, $Q$, $q$ sind Zahlen, welche nämlich das Verhältniſs der Dichtigkeiten der Luft zu einer als Einheit angenommenen Dichtigkeit ausdrücken. Diese zur Einheit angenommene Dichtigkeit ist, wie bekannt, zugleich die Dichtigkeit, welche bei der Abmessung des Druckes vorausgesetzt wird, daſs nämlich der Druck durch die Höhe einer Säule aus einer Materie, deren Dichtigkeit $= 1$ ist, ausgedrückt wird. Die übrigen vorkommenden

Gröfsen sind linearisch, denn es bedeutet erstlich $g$ den Raum, welchen ein frei fallender Körper in der ersten Secunde durchläuft, und ist daher ungefähr = 15,625 Fufs rheinl., zweitens $\Upsilon$ und $s$ bezeichnen den Raum, welcher vermöge der erlangten Geschwindigkeit, wenn sie unverändert bliebe, in einer Secunde durchlaufen werden würde; drittens, $a$ und $p$ bedeuten Höhen einer Säule, deren Gewicht so grofs ist, als der Druck auf eine ihrer Grundfläche gleiche Fläche, und die Dichtigkeit der Materie, woraus diese Säule besteht, ist die zur Einheit angenommene.

Da also die Ordinaten der krummen Linie, die wir Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit nennen können, Zahlen vorstellen, die Abscissen aber linearische Gröfsen sind, so drücken die Flächenräume hier Verhältnisse linearischer Gröfsen aus. Auch erhellt nun, dafs $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ eine linearische Gröfse, und also mit den Abscissen $S$ gleichartig ist, daher sie zu derselben addirt, oder davon subtrahirt werden kann. Ferner sieht man, dafs die gefundenen Werthe von $z$ und $s$ linearisch sind, der Werth von $\frac{q}{Q}$ aber numerisch, wie die Natur der Sache es erfordert. Endlich ist schon aus dem Vorigen bekannt, dafs die Scale $CQD$ nicht die Dichtigkeiten selbst darstelle, sondern die Gröfse log. $\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$, die Scale der Geschwindigkeiten aber gibt das Verhältnifs der verschiednen Werthe von $\Upsilon$ selbst an, da die Ordinate der Gröfse $\Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ gleich ist.

405. Diese Auflösung des Problems von Bewegungen der Luft in einer überall gleich weiten Röhre ist zwar sehr beschränkt, weil sie voraussetzt, dafs die Schwingungen der Lufttheilchen unendlich klein sind; aber dennoch führt sie zur Erklärung zweier physicalischen Gegenstände,

mit denen die Naturforscher sich lange ohne Erfolg beschäftigten. Sie gibt uns nämlich sehr befriedigende Aufschlüsse über die Natur und Fortpflanzung des Schalles, und über die Töne der Flöte: beide Gegenstände werde ich, unter der Voraussetzung, dafs die Bewegung in einer überall gleich weiten Röhre vorgehe, näher untersuchen, vorher aber mufs ich noch einiges über die Scalen der Dichtigkeiten und Geschwindigkeiten bemerken, nämlich über die Fortsetzung derselben über die Länge der Röhre hinaus.

406. Wenn die Röhre sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, so hat die Anwendung der vorigen Auflösung gar keine Schwierigkeit; denn, weil alsdann die Scalen für den anfänglichen Zustand sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken, so kann die Abscisse $AT = S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ oder $At = S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, nie so grofs werden, dafs nicht noch bestimmte Ordinaten beider Scalen damit zusammen gehörten, und folglich läfst sich der Zustand am Ende der Zeit $= t$ allemal nach unsern Formeln bestimmen. Wäre die Röhre hingegen an einem oder an beiden Enden begränzt, so würden die Scalen für den anfänglichen Zustand sich da endigen, und da im Fortgange der Zeit die Entfernungen $ST$, $st$ immerfort wachsen, so würden die Punkte $T$, $t$ endlich über die Enden der Röhre hinausfallen, wo keine Ordinaten $TN$, $TM$ etc. mehr angegeben sind, und der Zustand der Luftmasse liefse sich für diesen Zeitpunkt nicht mehr bestimmen. Unsre Auflösung der vorigen Probleme ist also nur dann vollkommen, wenn man im Stande ist, jene Scalen nach beiden Enden ins Unendliche fortzusetzen, selbst für den Fall, dafs die Röhre nur eine bestimmte endliche Länge hat. Eben diese Verlängerung der Scalen ist auch nothwendig, wenn die Röhre eine in sich zurückkehrende Form hat: denn obgleich ich hier die Richtungslinie der Röhre als gerade betrachtet habe, so ist es doch schon

hinlänglich gezeigt, dafs alle Sätze auch bei Röhren, die nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmt sind, Anwendung leiden, da die Bewegung durch solche Krümmungen nicht geändert wird.

407. Problem 81. Wenn die überall gleich weite Röhre sich in dem Punkte $B$ endiget, und hier offen ist, die Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit, welche für den anfänglichen Zustand der Luft in der Röhre gegeben sind, über $B$ hinaus fortzusetzen.

Auflösung. Weil die Röhre in $B$ offen ist, also die in derselben enthaltene Luft mit der äufsern in Verbindung steht, so kann am Ende der Röhre in $B$ der Druck der innern Luft von dem der äufsern Luft nicht verschieden seyn, folglich mufs auch die Dichtigkeit hier allemal mit der Dichtigkeit der äufsern Luft übereinkommen *). Diese Dichtigkeit sey $= B$, so hat man an dem Endpunkte der Röhre, sowohl für den Anfang der Bewegung $\rho = B$, als auch für jeden andern Zeitpunkt die Dichtigkeit $q = B$. Wie also auch sonst die Scale der Dichtigkeiten für den anfänglichen Zustand beschaffen seyn mag, so wird doch gewifs allemal, am Ende der Röhre in $B$, ihre Ordinate $BD = 0$. Es stelle also $AB$ (Fig. 74.) diese Röhre vor, welche sich über $A$ hinaus weiter erstrecken mag, in $B$ aber sich endiget, und hier offen ist, und es sey für den anfänglichen Zustand $CmB$ die Scale der Dichtigkeiten, welche in $B$ mit der Axe zusammenfällt; $EnF$ aber sey die

---

*) Ob diese Schlüsse gar keinen Zweifel übrig lassen, ob man nicht glauben könnte, dafs die unendlich kleinen und blos momentanen Verdichtungen und Verdünnungen auch bei der freien Communication mit der äufsern Luft Statt finden können, so wie sie bei der Fortpflanzung des Schalles im Freien Statt finden müfsten, kann ich nicht entscheiden. Die Uebereinstimmung der nachherigen Folgerungen mit der Erfahrung scheint indefs diese Schlüsse zu rechtfertigen, welche ich ganz so, wie Euler sie vorträgt, mittheile. B.

Scale der Geschwindigkeiten. Weil nun nach Verlauf jeder Zeit $= t$ die Dichtigkeit im Punkte $B$ unverändert $= B$ bleiben soll, und dieses Statt finden muſs, die Scale der Geschwindigkeiten mag, wie man will, beschaffen seyn, so muſs die Fortsetzung der Scalen so eingerichtet werden, daſs dieses Statt finde. Genau genommen sollte man nun zwar Rücksicht darauf nehmen, daſs nicht immer eben das Lufttheilchen in der Oefnung $BB$ bleibt, und daſs es also immer andre und andre Lufttheilchen sind, denen man die Dichtigkeit $= B$ beilegen sollte: aber da die Verrückung der Lufttheilchen unendlich klein ist, so ist es wohl erlaubt, anzunehmen, daſs die unveränderliche Dichtigkeit $= B$ demjenigen Lufttheilchen zukomme, welches anfangs die Oefnung $BB$ einnahm.

Wenn also $q$ die Dichtigkeit dieses bestimmten Lufttheilchens nach irgend einer Zeit $= t$ ist, so müssen unsre vorigen Ausdrücke für $q$ in jedem Augenblicke $q = Q = B$ geben. Man nehme daher für das Ende einer Zeit $= t$ auf der Abscissenlinie von $B$ an nach beiden Seiten die Entfernungen $BT = Bt = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, so muſs, damit $q = Q$ werde,

$$-\tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tm + \tfrac{1}{2}tn = 0$$

seyn (§. 402.), weil $SQ$ selbst $= 0$ ist; und dieses muſs Statt finden, welchen Werth für $t$, folglich für $BT = Bt$ man annimmt. Diese Gleichung

$$-TN + TM + tm + tn = 0$$

muſs ferner richtig bleiben, wie auch immer die Scale der Geschwindigkeiten beschaffen seyn, oder geändert werden mag; es müssen daher die beiden von der einen Scale, und die beiden von der andern Scale abhängigen Gröſsen jede für sich einander aufheben, das heiſst, es muſs $TM + tm = 0$, und zugleich $TN - tn = 0$ seyn. Die erste dieser Bedingungsgleichungen zeigt, daſs die Scale der Dichtigkeiten $CmB$ über $B$ hinaus so verlängert werden muſs, daſs die Curve $BMc$ der $BmC$ gleich und ähnlich sey, aber an der entgegengesetzten Seite der Axe liege. Die Scale der

Geschwindigkeiten hingegen muſs zwar ebenfalls so fortgesetzt werden, daſs der Theil $FNe$ dem Theile $FnE$ gleich und ähnlich ist, aber diese Fortsetzung der Scale kommt an eben der Seite der Axe zu liegen, wo die Scale selbst liegt. Nach diesem Gesetze werden die Scalen über $B$ hinaus fortgesetzt, wenn die Luft in der Röhre hier in freier Verbindung mit der äuſsern Luft steht.

408. Wenn die Röhre sich über $A$ hinaus ins Unendliche erstreckte, so hätte man also zur Fortsetzung gar nichts weiter nöthig, als eben diese Scalen an der andern Seite von $B$ auf die angeführte Weise zu wiederholen, und so sie auch nach dieser Seite ins Unendliche fortzuführen. Endigt sich aber die Röhre in $A$, und ist auch da offen, so erhält man über $A$ hinaus auf ganz ähnliche Weise ebenfalls eine Fortsetzung der Scale, und obgleich die Scalen $CB$, $EF$, über $B$ hinaus wiederholt, nur die Fortsetzung bis an $a$ geben, wenn $Ba = AB$ ist, so erhält man aus der Fortsetzung über $A$ hinaus wieder längere Fortsetzungen über $a$ hinaus, und kann so nach beiden Seiten ins Unendliche die Scalen fortführen.

409. Bei dieser Fortsetzung der Scalen sieht man also gar nicht auf ihre eigentliche Natur, und bestimmt, wenn die Scalen durch eine Gleichung gegeben sind, diese Fortsetzung nicht aus der Gleichung, sondern blos dadurch, daſs man dieselbe Linie jenseits $B$ wiederholt. Diese Regel muſs man befolgen, die Scalen mögen stetige, nach einem gewissen Gesetze gezeichnete Linien, oder ganz irregulär aus freier Hand gezogen seyn.

410. Dieser Umstand ist desto merkwürdiger, weil man sonst in der Analysis nur diejenigen Linien zu betrachten pflegt, deren Natur sich durch eine gewisse Gleichung ausdrücken läſst, und alle irreguläre Linien, die nicht nach einem bestimmten Gesetze gezogen sind, ausschlieſst. Denn die Analysis endlicher Gröſsen, und auch die bekanntesten Untersuchungen aus der Analysis des Unendlichen können nur auf

solche Curven angewandt werden, welche nach einem gewissen stetigen Gesetze beschrieben sind, indem man dort immer eine Gleichung, welche die Natur der krummen Linie ausdrückt, in die Rechnungen einführen muſs. Denjenigen Linien, welche nicht nach einem bestimmten Gesetze beschrieben werden, konnte man nicht eher einen Platz in der Analysis einräumen, bis derjenige höhere Theil der Analysis, welcher sich mit Functionen mehrerer veränderlichen Gröſsen beschäftigt, bearbeitet ward: denn hier lassen sich allerdings Linien, welche dem Gesetze der Stetigkeit nicht unterworfen sind, eben so gut in der Rechnung gebrauchen, als die durch eine Gleichung bestimmten Linien, und diese letztern haben hier gar keine Vorzüge vor jenen, da man auf die eigentliche Natur der Linie fast gar nicht sieht. Träfe es sich z. B. hier, daſs die Linie *CmB* ein Kreisbogen wäre, so sieht man bei der Fortsetzung gleichwohl gar nicht auf die Natur des Kreises, sondern man fügt an der andern Seite von *B* blos einen gleichen Bogen in umgekehrter Lage hinzu, gerade so, wie man bei einer andern ganz willkürlich gezognen Linie es machen würde, und kehrt sich nicht daran, ob die Scale, als algebraische Curve betrachtet, vielleicht eine ganz andre Fortsetzung verlange. Diese Bemerkungen verdienten hier wiederholt zu werden, wegen der Neuheit dieser Lehre, und weil Manche diese ganze Betrachtung den Principien der Analysis unangemessen zu finden geglaubt haben *).

---

*) Euler fand bekanntlich gegen diese Lehre, die er zuerst vortrug, und auch in diesem Werke schon früher gelegentlich erwähnt, starke Widersprüche. Alle Untersuchungen haben es nun zwar nachher bestätigt, daſs Euler in der Anwendung Recht hatte, aber strenge wissenschaftlich erwiesen war dieses von ihm wohl nicht. Lagrange's Aeuſserung über diesen Gegenstand in der Abhandlung über die Natur und Fortpflanzung des Schalles (Misc. Taurinens. Tom. I.) scheint mir es wohl zu verdienen, daſs man sie bei dieser Gelegenheit liest und mit Eulers Gedanken vergleicht. „Es ist gewiſs, sagt er, daſs die Principien

411. Problem 82. Wenn die Röhre, welche überall gleich weit ist, sich in $B$ (Fig. 75.) endigt, und da geschlossen ist, die für den anfänglichen Zustand construirten Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit über den Endpunkt $B$ hinaus fortzusetzen.

Auflösung. Weil die Röhre $AB$ in $B$ verschlossen ist, so kann das in diesem Endpunkte befindliche Lufttheilchen keine Bewegung haben, sondern die äufserste Luftschichte, die an dem Deckel $BB$ anliegt, mufs immer in Ruhe bleiben, daher die Geschwindigkeit der Luft in $B$ nicht blos anfangs, sondern für jeden Zeitpunkt $= 0$ seyn mufs. Der äufserste Punkt $F$ (Fig. 72.) der Scale der Geschwindigkeiten $EYF$ mufs also mit dem Punkte $B$ der Axe zusammenfallen, und diese Scale erhält eine Gestalt, wie

---

„der Differential- und Integralrechnung algebraische veränderliche „Functionen voraussetzen, und es scheint daher nicht zulässig, „dafs man den auf diese Principien gebauten Schlüssen mehr Aus„dehnung gebe, als die Natur jener Functionen selbst erlaubt. „Gewifs aber ist jeder überzeugt, dafs bei algebraischen Functio„nen alle ihre verschiedenen Werthe durch das Gesetz der Ste„tigkeit mit einander verbunden sind: es scheint daher keinem „Zweifel unterworfen, dafs alle aus der Differential- und Inte„gralrechnung abgeleitete Folgerungen illegitim sind, in den Fäl„len, wo man dieses Gesetz nicht voraussetzt. Da nun Eulers „Construction unmittelbar aus der Integration einer Differentialglei„chung abgeleitet ist, so ist diese Construction ihrer innern Natur „nach nur auf stetige Curven anwendbar — — Ich schliefse „hieraus, dafs alle Beweise zur Entscheidung dieser Frage" (ob nämlich irregulär gezogne Curven hier gebraucht werden dürfen?) „gänzlich unbefriedigend sind, wenn man sie aus der Voraus„setzung herleitet, dafs die Ordinaten der Curve Functionen von „$S$ und $t$ sind: nur dadurch wird man zu einem unumstöfslichen „Beweise für diese Behauptung gelangen, wenn man die Bewe„gung jedes Punktes für sich als unabhängig von der Bewegung „der übrigen betrachtet." — Diese Methode, die Rechnung ganz unabhängig von allen auf dem Gesetze der Stetigkeit beruhenden Voraussetzungen zu führen, wandte Lagrange bei seinen Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles an. B.

$EnB$ (Fig. 75.); die Scale der Dichtigkeiten mag $CmD$ seyn. Da nun für jede Zeit $= t$ die für die Geschwindigkeit gefundne Formel, wenn man sie auf den Punkt $B$ anwendet, immer $=$ o werden, und dies Statt finden muſs, die Scale der Dichtigkeiten mag, wie man will, beschaffen seyn, so muſs die Fortsetzung beider Scalen so eingerichtet werden, daſs dies Resultat daraus folge.

Man nehme also von $B$ aus auf der Axe nach beiden Seiten die gleichen Entfernungen $BT = Bt = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, so müſste, unsern vorhin gefundenen Formeln gemäſs, die Geschwindigkeit in $B$

$$z = \tfrac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

seyn, und da diese allemal $=$ o seyn muſs, so ist für die Scale der Geschwindigkeiten $TN + tn =$ o, und für die Scale der Dichtigkeiten $TM = tm$. Diese Gleichungen zeigen, daſs man die Scale der Geschwindigkeiten so fortsetzen müsse, daſs $TN = -tn$ werde für jede zwei, gleich weit von $B$ entfernte Ordinaten, oder daſs die Fortsetzung $BNe$ der Scale $BnE$ gleich und ähnlich werde, aber an der andern Seite der Axe zu liegen komme.

Die Scale der Dichtigkeiten hingegen wird so fortgesetzt, daſs die Fortsetzung $DMc$ der Scale selbst gleich und ähnlich ist, und an derselben Seite der Axe liegt.

Die Aehnlichkeit ist bei beiden so zu verstehen, daſs die von dem Punkte $B$ gleich weit entfernten Ordinaten gleich groſs werden, $TN = tn$, $TM = tm$, und bei der einen nach eben der Seite der Axe, bei der andern nach der entgegengesetzten genommen werden: — oder daſs die Bogen $Dm$, $DM$ sich decken würden, wenn man $D$ auf $D$, und $m$ auf $M$ legte, und eben so bei der Geschwindigkeitsscale.

412. Die Fortsetzung der Scalen ist also in Rücksicht der Lage gegen die Axe verschieden, je nachdem die Röhre

in $B$ offen oder geschlossen ist; aber die Gröſse der Ordinaten ist in beiden Fällen dieselbe, denn in jenem Falle kommt die Fortsetzung der Scale der Dichtigkeiten an die entgegengesetzte Seite der Axe zu liegen: in diesem Falle hingegen findet dies bei der Scale der Geschwindigkeiten Statt.

413. Da die Geschwindigkeit in $B$, wenn die Röhre hier geschlossen ist, immer $= 0$ bleibt, so muſs auch der Ausdruck für den Raum, durch welchen das Lufttheilchen fortrückt, verschwinden, wenn man ihn auf den Punkt $B$ anwendet, und es ist auch wirklich
$z = \frac{1}{2} TNtn - \frac{1}{2} BDTM + \frac{1}{2} BDtm = \frac{1}{2} TNtn = 0$,
weil $TNtn = Btn - BTN = 0$ ist, indem man den unterhalb der Axe liegenden Theil als negativ betrachten muſs.

414. Problem 83. Die überall gleich weite Röhre sey in sich zurückkehrend, und übrigens von willkürlicher Figur, die Scalen der Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten sind für den anfänglichen Zustand gegeben, man sucht die Fortsetzung derselben.

Auflösung. Man stelle sich die Röhre als gerade ausgedehnt war, und die gerade Linie $ASA'$ (Fig. 76.) sey die ganze Länge derselben, so daſs also bei der in sich zurückkehrenden Form $A$ und $A'$ einerlei Punkt ist, oder diese beiden Enden der Röhre an einander schlieſsen. Ueber dieser Linie $ASA'$ als Axe sey die Scale der Dichtigkeiten $CQC'$, und die Scale der Geschwindigkeiten $EYE'$ nach der schon bekannten Regel gezeichnet, nämlich so, daſs wenn in $S$ die Dichtigkeit $= Q$, und die Geschwindigkeit $= \Upsilon$ nach der Richtung $SA'$ war, die Ordinate

$$SQ = \log \frac{Q}{B} = \frac{Q - B}{B} \text{ und } SY = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$$

ist, so muſs offenbar im Punkte $A'$, $A'C' = AC$ und $A'E' = AE$ seyn, weil die Endpunkte $A'$ und $A$ zusammenfallen. Trägt man nun auf der Axe die gleichen Entfernungen $A'A'' = A''A'''$ u. s. w. der Länge der Röhre $AA'$ gleich,

auf, so muſs, weil eigentlich $A$, $A'$, $A''$, $A'''$ etc. nur denselben Punkt $A$ vorstellen, die Fortsetzung beider Scalen so beschaffen seyn, daſs die Ordinaten in allen diesen Punkten einerlei sind. Eben das gilt, wenn man Punkte $S$ $S'$, $S''$, $S'''$ so nimmt, daſs die Entfernungen $AS' = A'S$ $= A''S'$ etc. sind, denn dann stellen alle diese Punkte eigentlich nur den einzigen Punkt $S$ vor, und die Ordinaten müssen in allen diesen Punkten einerlei Gröſse haben. Die beiden Scalen $CQC'$, $EYE'$ müssen also über der nach beiden Seiten unendlich verlängerten Axe immer wiederholt gezeichnet werden. Da so beide Scalen nach beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt werden, so wird man nach jeder Zeit $= t$ mit Hülfe der vorigen Formeln bestimmen können, wohin das Lufttheilchen, welches sich anfangs in $S$ befand, gelangt sey, und welche Dichtigkeit und Geschwindigkeit es jetzt habe.

415. Auch hier wird also die Curve nicht nach ihrer eigentlichen Natur, wenn sie durch eine Gleichung bestimmt ist, fortgesetzt, sondern diese Fortsetzung ist eine bloſse Wiederholung, wobei man auf die Natur der Linie gar nicht sieht.

Diese Fortsetzung ist aber deswegen hier und in allen Fällen nothwendig, damit man nach Verlauf einer noch so groſsen Zeit $= t$ die Ordinaten angeben könne, welche den Abscissen $= S \pm t \sqrt{\frac{2ga}{b}}$ zugehören.

416. Die bisherigen Untersuchungen setzen eigentlich voraus, daſs sowohl der Raum, durch welchen jedes Theilchen fortrückt, als seine Geschwindigkeit und die Aenderung der Dichtigkeit unendlich klein sey: diese Betrachtung unendlich kleiner Vibrationen ist zwar zur Aufklärung der Lehren vom Schalle hinreichend: aber es wird doch der Mühe werth seyn, noch zu versuchen, wie weit die Gleichungen sich auflösen lassen, wenn man die Bewegung zwar als klein, aber doch nicht als unendlich klein

betrachtet. Diese Untersuchung hat um so mehr einiges Interesse, da die auf die vorigen Sätze gebaute Theorie von der Fortpflanzung des Schalles nicht ganz genau mit der Erfahrung übereinstimmt, wie wir in der Folge sehen werden. Ich setze hiebei, um die Gleichungen leichter zu übersehen, voraus, daſs keine Aenderung der Dichtigkeit im anfänglichen Zustande Statt finde, sondern $\varrho = B$, $\frac{d\varrho}{dS} = 0$ sey, daſs also das Gleichgewicht blos durch eine den Lufttheilchen ertheilte anfängliche Geschwindigkeit gestört werde.

417. **Problem 84.** Wenn die in der Röhre enthaltene Luft im Anfange der Zeit $t$ so in Bewegung gesetzt ist, daſs jedes Theilchen seine Dichtigkeit ungeändert behält, und man annimmt, daſs bei der ganzen Bewegung der Raum, durch welchen jedes Theilchen fortrückt, nur klein ist, ohne doch unendlich klein zu seyn, diese Bewegung durch Näherungsformeln zu bestimmen.

Auflösung. Da ich annehme, daſs $d\varrho = 0$ ist, so erhält die erste Gleichung des 398. §. jetzt folgende Gestalt:

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{d^2 z}{dS^2}\right) - \left\{1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)\right\}^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0,$$

welche wir vorhin dadurch vereinfachten, daſs wir $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ als unendlich klein betrachteten. Obgleich wir nun diese Voraussetzung jetzt verlassen, so ist $z$ doch immer nur noch klein, und es ist jetzt möglich, aus dem für unendlich kleine Schwingungen gefundenen Werthe von $z$ genäherte Werthe für $z$ zu finden, für den Fall, da die Schwingungen eine endliche Gröſse haben. Wir fanden vorhin

$$z = \alpha . \Gamma : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \alpha . \Delta : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right),$$

wenn das von $\varrho$ abhängende Glied, den Voraussetzungen dieses Problems gemäſs, $= 0$ gesetzt wird. Um jetzt vollkommnere Werthe zu finden, setze ich

$$S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}} = u \text{ und } S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}} = v,$$

und betrachte $u$, $v$ als Gröſsen, die von einander unabhängig sind, und $z$ als Function dieser Gröſsen. Es ist daher

$$dz = \left(\frac{dz}{du}\right)du + \left(\frac{dz}{dv}\right)dv = \left\{\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right)\right\}dS$$

$$+ \left\{\left(\frac{dz}{du}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\right\}dt\sqrt{\frac{2ga}{b}},$$

$$\left(\frac{dz}{dS}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) \text{ und } \left(\frac{dz}{dt}\right) = \left\{\left(\frac{dz}{du}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\right\}\sqrt{\frac{2ga}{b}},$$

$$d.\left(\frac{dz}{dS}\right) = \left\{\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dv\,du}\right)\right\}du + \left\{\left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)\right\}dv,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dS^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{du^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2z}{dv^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left\{\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dv\,du}\right)\right\}\left(\frac{du}{dt}\right)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

$$+ \left\{\left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right) - \left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)\right\}\left(\frac{dv}{dt}\right)\sqrt{\frac{2ga}{b}},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{2ga}{b}.\left\{\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2z}{dv\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)\right\},$$

die Differentialgleichung erhält daher jetzt folgende Gestalt, wenn ich den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2ga}{b}$ weglasse,

$$0 = 4\left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right) - \left\{2 + \left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right)\right\}$$

$$\left\{\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)\right\}.$$

Es werde nun $z$ durch eine Reihe ausgedrückt

$$z = \alpha Z + \alpha^2 Z' + \alpha^3 Z'' + \text{etc.}$$

wo die Glieder nach den Potenzen von $\alpha$ geordnet sind, und $Z$, $Z'$, $Z''$ näher zu bestimmende Functionen bedeuten, $\alpha$ aber einen kleinen Bruch. Dieser Werth von $z$ gibt, in die Differentialgleichung gesetzt, folgende Gleichung:

$$
o = \left\{
\begin{aligned}
& 4\alpha \left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) + 4\alpha^2 \left(\frac{d^2 Z'}{du\,dv}\right) + 4\alpha^3 \left(\frac{d^2 Z''}{du\,dv}\right) \\
& -2\alpha^2 \left\{\left(\frac{dZ}{du}\right) + \left(\frac{dZ}{dv}\right)\right\} \left\{\left(\frac{d^2 Z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2 Z}{dv^2}\right)\right\} \\
& -2\alpha^3 \left\{\left(\frac{dZ'}{du}\right) + \left(\frac{dZ'}{dv}\right)\right\} \left\{\left(\frac{d^2 Z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2 Z}{dv^2}\right)\right\} \\
& -2\alpha^3 \left\{\left(\frac{dZ}{du}\right) + \left(\frac{dZ}{dv}\right)\right\} \left\{\left(\frac{d^2 Z'}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 Z'}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2 Z'}{dv^2}\right)\right\} \\
& -\alpha^3 \left\{\left(\frac{dZ}{du}\right) + \left(\frac{dZ}{dv}\right)\right\}^2 \left\{\left(\frac{d^2 Z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2 Z}{dv^2}\right)\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

wenn die Glieder weggelassen werden, welche den Coefficienten $\alpha^4$ enthalten.

Da hier so viele unbestimmte Gröſsen $Z$, $Z'$, $Z''$ etc. vorkommen, als verschiedene Potenzen von $\alpha$ da sind, so ist es erlaubt, alle Glieder, welche mit einerlei Potenz von $\alpha$ multiplicirt sind, zusammen $=$ o zu setzen, und daraus diese verschiedenen Gröſsen zu bestimmen. Hier ist es hinreichend, nur die beiden ersten Glieder zu suchen, da man das dritte, in $\alpha^3$ multiplicirte, schon als zu klein weglassen darf: für $Z$ und $Z'$ aber hat man die Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) = o \text{ und}$$

$$2\left(\frac{d^2 Z'}{du\,dv}\right) = \left\{\left(\frac{dZ}{du}\right) + \left(\frac{dZ}{dv}\right)\right\} \left\{\left(\frac{d^2 Z}{du^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 Z}{du\,dv}\right) + \left(\frac{d^2 Z}{dv^2}\right)\right\}.$$

Die erste gibt $Z = \Gamma : u + \Delta : v$, die zweite

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{d^2 Z'}{du\,dv}\right) &= (\Gamma' : u + \Delta' : v) \,.\, (\Gamma'' : u + \Delta'' : v) \\
&= \Gamma' : u \,.\, \Gamma'' : u + \Delta' : v \,.\, \Gamma'' : u + \Gamma' : u \,.\, \Delta'' : v \\
&\quad + \Delta' : v \,.\, \Delta'' : v,
\end{aligned}
$$

woraus folgt, wenn man bei der ersten Integration blos $u$ als veränderlich betrachtet,

$$2\left(\frac{dZ'}{dv}\right) = \tfrac{1}{2}(\Gamma' : u)^2 + \Delta' : v \,.\, \Gamma' : u + \Gamma : u \,.\, \Delta'' : v + u \,.\, \Delta' : v \,.\, \Delta'' : v,$$

und ferner, wenn man bei der zweiten Integration $u$ als beständig ansieht,

$$Z = \tfrac{1}{4} v (\Gamma' : u)^2 + \tfrac{1}{4} u (\Delta' : v)^2 + \tfrac{1}{2} \Delta : v \, . \, \Gamma' : u + \tfrac{1}{2} \Gamma : u \, . \, \Delta' : v,$$

daher, wenn die mit $\alpha^3$ multiplicirten Glieder nicht in Betrachtung gezogen werden,

$$z = \alpha \Gamma : u + \alpha \Delta : v + \tfrac{1}{4} \alpha^2 v (\Gamma' : u)^2 + \tfrac{1}{4} \alpha^2 u (\Delta' : v)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \alpha^2 \Delta : v \, . \, \Gamma' : u + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \Gamma : u \, . \, \Delta' : v,$$

wo man nun statt $u$ und $v$ wieder ihre durch $S$ und $t$ ausgedrückten Werthe setzen muſs.

Diese Formel bestimmt nun die Bewegung, wenn $\alpha$ nicht so klein ist, daſs man die mit $\alpha^2$ multiplicirten Glieder weglassen darf; wenn dieses geschehen dürfte, so hätte man eben die Gleichung, welche wir vorbin für $z$ fanden.

418. Von der Richtigkeit dieses Werthes von $z$, daſs er nämlich bis auf Gröſsen, die mit $\alpha^3$ von einerlei Ordnung sind, genau sey, kann man sich leicht überzeugen, wenn man die partiellen Differentiale $\left(\frac{dz}{dS}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{dS^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$ sucht, und diese in die erste Differentialgleichung setzt; denn alsdann heben sich alle in $\alpha$, und alle in $\alpha^2$ multiplicirten Glieder völlig auf.

Man findet aus diesem Werthe von $z$ für jeden folgenden Zeitpunkt die Dichtigkeit und Geschwindigkeit, weil nämlich $q = \frac{B}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$ und $\varkappa = \left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, und hier

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \alpha \Gamma' : u + \alpha \Delta' : v + \tfrac{1}{4} \alpha^2 (\Gamma' : u)^2 + \tfrac{1}{4} \alpha^2 (\Delta' : v)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \alpha^2 v \Gamma' : u \, . \, \Gamma'' : u + \tfrac{1}{2} \alpha^2 u \Delta' : v \, . \, \Delta'' : v$$
$$+ \alpha^2 \Delta' : v \, . \, \Gamma' : u + \tfrac{1}{2} \alpha^2 (\Delta : v \Gamma'' : u + \Gamma : u \, . \, \Delta'' : v) \text{ und}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) . \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha \Gamma' : u - \alpha \Delta' : v - \tfrac{1}{4} \alpha^2 (\Gamma' : u)^2 + \tfrac{1}{4} \alpha^2 (\Delta' : v)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \alpha^2 v \Gamma' : u \Gamma'' ; u - \tfrac{1}{2} \alpha^2 u \Delta' : v \, . \, \Delta'' : v$$
$$+ \tfrac{1}{2} \alpha^2 \Gamma'' : u \Delta : v - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \Gamma : u \Delta'' : v.$$

419. Im anfänglichen Zustande muſs $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ und $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \Upsilon$ seyn: da nun alsdann zugleich $u = v = S$ ist, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$\Gamma : S + \tfrac{1}{4}\alpha(\Delta' : S)^2 + \tfrac{1}{2}\alpha S . \Gamma' : S . \Gamma'' : S + \tfrac{1}{2}\alpha \Gamma'' : S . \Delta : S + \alpha\Delta' : S . \Gamma' : S$$
$$= - \Delta' : S - \tfrac{1}{4}\alpha(\Gamma' : S)^2 - \tfrac{1}{2}\alpha S \Delta' : S \Delta'' : S - \tfrac{1}{2}\alpha \Gamma : S . \Delta'' : S,$$

und die zweite gibt, wenn man diesen Werth darin setzt,

$$\Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}} = 2\alpha\Gamma' : S + \tfrac{1}{2}\alpha^2(\Delta' : S)^2 + \alpha^2 S . \Gamma' : S . \Gamma'' : S$$
$$+ \alpha^2\Gamma'' : S . \Delta : S + \alpha^2\Delta' : S . \Gamma' : S.$$

Aus diesen beiden Gleichungen müſste bestimmt werden, wie die Functionen $\Gamma$ und $\Delta$ durch den anfänglichen Zustand ausgedrückt werden.

Obgleich dies im Allgemeinen Schwierigkeit haben möchte, so sieht man doch aus der ersten Gleichung, daſs $\Gamma' : S$ und $- \Delta' : S$ einander bis auf solche Gröſsen, die mit $\alpha$ von einerlei Ordnung sind, gleich seyn werden. — Bei der Anwendung, welche wir in der Folge von diesem Probleme machen, wird angenommen, daſs $\Upsilon$ nur für ganz kleine Werthe von $S$ reelle Werthe habe, für gröſsere $S$ aber verschwinde. Soll das geschehen, soll z. B. $\Upsilon$ immer $= 0$ seyn, wenn $S > h$ ist, so muſs nothwendig für $S > h$ auch $\Gamma' : S = 0$ seyn, denn weil $\Gamma' : S$ und $- \Delta' : S$ zu einerlei Ordnung der Gröſse gehören, so kann das erste Glied des Werthes von $\Upsilon$ durch keines der Folgenden aufgehoben werden, indem diese viel kleiner sind. Dann würde also $\Upsilon$ blos durch

$$\Upsilon . \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \tfrac{1}{2}\alpha^2 (\Delta' : S)^2$$

ausgedrückt, und dieses würde eine Gröſse seyn, die mit $\alpha^4$ zu einer Ordnung gehörte, weil $\Delta' : S$ nur um Gröſsen, die mit $\alpha$ von derselben Ordnung sind, von $\Gamma' : S = 0$ verschieden ist: man kann aber leicht übersehn, daſs wenn man die folgenden Glieder, welche $\alpha^3$ enthalten, mit be-

rechnet hätte, doch, wegen der schon angenommenen Bedingungen, kein Glied vorkommen würde, welches diesem an Gröſse gleich wäre, also muſs auch $\Delta' : S$ verschwinden, wenn $S > h$ ist, wenn nämlich die ganze anfängliche Erschütterung auf diesen Raum eingeschränkt ist.

Obgleich also hier die Natur der Functionen $\Gamma'$, $\Delta'$ sich nicht so leicht aus dem anfänglichen Zustande bestimmen läſst, so ist doch das gewiſs, daſs wenn (Fig. 84.) die anfängliche Schwingung sich nur durch den Raum $YX$ erstreckt, auch die Functionen $\Gamma' : S$, $\Delta' : S$ nur für diesen Raum bestimmte, von Null verschiedene Werthe erhalten. Zeichnet man also eine Curve $YZX$, deren Ordinaten $SZ = \Gamma' : S$ sind, für jede Abscisse $AS = S$, so wird diese Curve sich nicht über den Raum $YX$ hinaus erstrecken, in welchem anfangs eine Schwingung erregt war: hingegen scheint es, daſs die Function $\Gamma : S$ nicht verschwinde für Abscissen, die gröſser als $AX$ sind, denn da

$$\Gamma : S = \int dS\, \Gamma' : S =$$

der Fläche $YSZ$, wenn $S = AS$ ist, so wird für

$$S = AB > AX, \quad \Gamma' : S = YZX.$$

Man darf aber nicht vergessen, daſs diesem Integral eine Constans beigefügt werden muſs, und daſs also vollständig $\Gamma : S = YZX +$ Const. ist, daher $\Gamma : S$ allerdings $= 0$ seyn kann, wenn die Umstände dieses erfordern. — Für $\Delta : S$ gilt eben das.

Ich wende diese Betrachtung nicht auf den Fall an, wo auch die Dichtigkeit $\rho$ im anfänglichen Zustande eine Aenderung erlitten hat; die Gleichungen würden dadurch verwickelter werden, und da, wie sich in der Folge zeigen wird, diese Betrachtung endlicher Schwingungen in der Lehre vom Schalle doch von keinem Nutzen ist, so halte ich es für überflüssig, diese Untersuchung weiter fortzusetzen *).

---

*) Die hier gebrauchte Näherungsmethode ist von Laplace entlehnt. — Laplace Mechanik des Himmels. 2. Band. S. 190. der Uebersetzung. B.

## Zweiter Abschnitt.

### *Von der Fortpflanzung der Schwingungen in der Luft, in Röhren, die überall gleich weit sind: zur Erklärung der Entstehung und Fortpflanzung des Schalles.*

---

420. Problem 85. Wenn in einer nach beiden Enden ins Unendliche fortlaufenden Röhre das Gleichgewicht irgendwo an einer kleinen Stelle durch die Erregung einer Schwingung gestört wird, die Fortpflanzung dieser Schwingung für jeden Zeitpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Es sey $AB$ (Fig. 77.) die Richtungslinie der Röhre, welche wir uns immer als gerade vorstellen, und in dem kleinen Raume $GH = h$ sey der in der Röhre enthaltnen Luft eine solche Bewegung mitgetheilt, dafs die Linie $GM'mH$ die Scale der Dichtigkeiten, $GN'nH$ die Scale der Geschwindigkeiten darstelle; bei diesen Scalen zeigen bei der erstern die über der Axe liegenden Ordinaten $tm$ eine gröfsere, die unterhalb liegenden wie $TM'$ eine kleinere, als die natürliche zum Gleichgewichte erforderliche Dichtigkeit an; bei der Scale der Geschwindigkeiten hingegen bezeichnen oberhalb der Axe liegende Ordinaten eine Bewegung nach der Richtung $AB$, und die unterhalb liegenden würden die entgegengesetzte Richtung der Bewegung andeuten. Aufserhalb dieses Raumes $GH$ ist die Luft nach beiden Seiten hin in Ruhe, und die Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit fallen überall mit der Axe zusammen, oder ihre Ordinaten sind $= 0$, daher auch in der Figur die Scalen als in $G$ und $H$ mit der Axe zusammentreffend gezeichnet sind.

Wir wollen nun, nachdem wir den anfänglichen Zustand der Luft angegeben haben, irgend einen nach $B$ zu liegenden Punkt $S$ der Röhre betrachten. Weil man aber,

um die Bewegung der Luft in diesem Punkte für jede Zeit $= t$, die seit dem Anfange der Bewegung verflossen ist, zu bestimmen, nach beiden Seiten von $S$ auf der Axe die Entfernungen $= t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ abschneiden muſs, und nur dann eine Bewegung in $S$ Statt findet, wenn diesen Abscissen reelle Ordinaten der Scalen zugehören, so kann offenbar in $S$ keine Bewegung entstehen, so lange $t\sqrt{\frac{2ga}{b}} < HS$ ist: das Gleichgewicht dauert also in $S$ so lange fort, bis $t = HS.\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ist. Es sey nun eine etwas gröſsere Zeit verflossen, und man nehme den Raum $St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ (eben diese Entfernung auch nach der andern Seite von $S$ zu tragen, ist hier nicht nöthig, weil die Ordinaten der Scalen dort überall $= 0$ sind), so erhält man zur Bestimmung der Bewegung in $S$ folgendes: Der Raum $Ss$, durch welchen das Lufttheilchen am Ende dieser Zeit fortgerückt ist, wird $Ss = \frac{1}{2}Htn + \frac{1}{2}Htm$; die Dichtigkeit dieses Theilchens ist jetzt $q = B(1 + \frac{1}{2}tm + \frac{1}{2}tn)$, und die Geschwindigkeit nach der Richtung $SB$,

$$u = \frac{1}{2}(tm + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

Ist der verflossene Zeitraum aber gröſser als $t = SG\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, so werden die Ordinaten $tm$, $tn$ abermals $= 0$, also ist die Dichtigkeit alsdann wieder $= B$ und die Geschwindigkeit $= 0$, und das Lufttheilchen $S$ bleibt nun auch in jedem folgenden Augenblicke in Ruhe.

Eben so verhält es sich mit denjenigen Lufttheilchen, welche nach der andern Seite von $G$ nach $A$ zu liegen. Jeder Punkt $S'$ wird hier ruhen, so lange $t < S'G\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ist, aber anfangen, sich zu bewegen, wenn $t$ dieser Gröſse

gleich wird. Ist $t$ etwas gröſser und $S'T = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, so wird das vorhin in $S'$ befindliche Lufttheilchen nach $s'$ versetzt seyn, und es ist

$$S's' = \tfrac{1}{2}GT'M' + \tfrac{1}{2}GT'N',$$

weil die Ordinate $T'M'$ negativ ist; ferner ist die Dichtigkeit

$$q = B(1 - \tfrac{1}{2}T'N' - \tfrac{1}{2}T'M'),$$

und die Geschwindigkeit nach der Richtung $S'B$

$$s = \tfrac{1}{2}(T'N' + T'M')\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

Sobald aber die Zeit $t = S'H\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ verflossen ist, kommt die Luft in $S'$ wieder zur Ruhe, und überhaupt dauert die ganze Bewegung eines Lufttheilchens nur so lange, als der Zeitraum $GH\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ist, nämlich so viele Secunden oder Theile einer Secunde, als diese Zahl angibt.

Hieraus erhellt, wie eine in einem kleinen Raume erregte Schwingung sich im Fortgange der Zeit in der Röhre nach beiden Seiten fortpflanzt.

421. Nennt man die Entfernung $HS = s$, so pflanzt sich die anfangs in $GH$ erregte Schwingung durch den Raum $= s$ in einer Zeit von $\frac{s\sqrt{b}}{\sqrt{2ga}}$ Secunden fort: die Fortpflanzung des Schalles geschieht also gleichförmig, und der Schall durchläuft in einer Secunde den Raum $= \sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Bei der atmosphärischen Luft ist, wenn man eine mittlere Wärme voraussetzt, und die Dichtigkeit des Quecksilbers als Einheit annimmt, ungefähr $a = 2\frac{1}{3}$ pariser Fuſs $b = \frac{1}{14 \cdot 800} = \frac{1}{11200}$, wenn man die Luft etwa 800mal specifisch leichter als Wasser setzt, und $g = 15{,}09$ pariser Fuſs, woraus der Raum, welchen der Schall in einer Se-

cunde durchläuft, etwa 890 pariser Fufs gefunden wird, welches beträchtlich von der Erfahrung abweicht. Man findet zwar etwas verschiedene Resultate, wenn man die Dichtigkeit der Luft bei der Barometerhöhe von 28 Zollen geringer annimmt, aber sie läfst sich nicht so sehr herabsetzen, als nöthig wäre, um diesen Raum = 1040 Fufs pariser Maafs zu finden, wie die Erfahrung ihn angibt.

Wollte man den Raum bestimmen, welchen der Schall in andern Gasarten in einer Secunde durchlaufen würde, so müfste man statt $b$ die Dichtigkeit setzen, welche diese Gasarten haben, wenn ihre Elasticität einer gegebnen Quecksilbersäule $= a$ das Gleichgewicht hält; und die Formel zeigt, dafs in Luftarten, die bei geringer Dichtigkeit eben so viel Druck ausüben, als andre bei gröfserer Dichtigkeit, der Schall schneller fortgepflanzt wird. Daher mufs in erwärmter Luft der Schall sich schneller fortpflanzen, als in kalter Luft.

422. Die Auflösung des Problems gab für die Bewegung des Lufttheilchens $S$ die Geschwindigkeit

$$= \tfrac{1}{2}(tm + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

und die Dichtigkeit $q = B(1 + \tfrac{1}{2}tm + \tfrac{1}{2}tn)$, also die Geschwindigkeit dem Ueberschusse der Dichtigkeit $q$ über die beim Gleichgewichte Statt findende proportional

$$s = \frac{q - B}{B}\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

423. Es verdient hier bemerkt zu werden, dafs die Fortpflanzung der in dem Raume $GH$ erregten Schwingung nach der Gegend von $A$ zu nicht nothwendig eben so stark zu seyn braucht, als nach der Gegend $B$. Dieses hängt nämlich von der Beschaffenheit der Scalen ab; denn wenn bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts die Scale der Dichtigkeiten mit der Scale der Geschwindigkeiten übereinstimmte, so dafs $T'M' = - T'N'$ und $tm = tn$ wäre, so würde die Schwingung sich nach $A$ hin gar nicht

fortpflanzen, wohl aber nach der Gegend von $B$. Die Zeit aber, während welcher die Schwingung bis zu irgend einem Punkte $S$ gelangt, hängt gar nicht von der Gestalt der Scalen ab, und die Fortpflanzung der Schwingungen geschieht daher immer gleich schnell.

424. Wenn die Zeit $t = St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ verflossen ist, so wird die Bewegung des Lufttheilchens in $S$ durch die beiden Ordinaten $tm$, $tn$ der Scalen für die anfängliche Schwingung, so bestimmt, daſs $q = B(1 + \frac{1}{2}tm + \frac{1}{2}tn)$ und $z = \frac{1}{2}(tm + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ wird, und hieraus erhellet, daſs in diesem Augenblicke die anfängliche Schwingung in den Raum $YX = GH$ übertragen ist, wenn $HX = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$: denn die übrige an dieser Seite von $GH$ befindliche Luft ist in diesem Augenblicke völlig in Ruhe, und auch jenseits $GH$ gibt es eben so nur eine einzige Stelle, wo die Luft jetzt in Bewegung ist. Die Bewegung aber, welche jetzt in den Raum $YX$ Statt findet, läſst sich durch eine einzige Scale darstellen, wenn diese $YZX$ so gezeichnet wird, daſs ihre Ordinate $SZ$ der halben Summe jener Ordinaten $tm + tn$ gleich sey: denn diese drückt alsdann die Dichtigkeiten und Geschwindigkeiten auf eben die Weise aus, wie es die beiden verschiedenen Scalen für die anfängliche Schwingung thaten. Es ist nämlich jetzt in $S$ die Dichtigkeit $q = B(1 + SZ)$, also $SZ = \frac{q - B}{B} = \log. \frac{q}{B}$, und auch $SZ = z\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, und das Fortrücken dieses Theilchens wird also so bestimmt, daſs $z =$ der Fläche $XSZ$ sey.

Diese neue einfache Scale $YZX$, welche nach den beiden anfänglichen gebildet ist, zeigt die Beschaffenheit der gegen $B$ zu fortgepflanzten Schwingungen, und lehrt

uns noch verschiedenes von der Natur des Schalles näher kennen. Wir unterscheiden hier zuerst die Länge der in Schwingung gesetzten Räume *YX* = *GH*, nach deren Gröſse ohne Zweifel der Schall eine gewisse Beschaffenheit haben wird. Ferner die verschiedene Gestalt der Scale *YZX*, deren gröſsere oder geringere Breite *SZ*, und übrige Beschaffenheit, ob sie z. B. ganz an einer Seite der Axe liegt oder nicht, gewiſs dazu beiträgt, daſs der Schall unser Ohr auf verschiedene Weise rührt. Von der Breite *SZ* scheint die Stärke des Schalles abzuhängen, was aber die übrige Beschaffenheit der Scalen für Einfluſs habe, läſst sich nicht angeben, indeſs erhellt, daſs die fast unendlichen Verschiedenheiten bei verschiedenen Arten von Klang oder Geräusch hieraus erklärt werden müssen.

Ein sehr merkwürdiger Umstand findet hier zugleich seine Erklärung, nämlich, daſs die Schwingung *YZX*, die man ja auch als eine anfängliche betrachten könnte, keine neue Schwingungen rückwärts nach *A* zu bewirkt. Denn wir haben gesehen, daſs auch die anfängliche Schwingung *GH* sich nicht nach *A* zu fortpflanzen würde, wenn sie so beschaffen wäre, daſs ihre beiden Scalen ganz übereinstimmten, oder nur eine einzige ausmachten, wie dieses bei den fortgepflanzten Schwingungen der Fall ist. Auch das verdient bemerkt zu werden, daſs unendlich verschiedene anfängliche Schwingungen bei der Fortpflanzung einerlei Schwingungen hervorbringen können, daher darf man sich nicht wundern, wenn oft ganz verschiedene Ursachen einerlei oder einen ähnlichen Klang oder Schall hervorbringen.

425. Allerdings also gibt diese Theorie der Fortpflanzung der Schwingungen eine sehr schöne Erklärung von der Fortpflanzung des Schalles; denn, wie auch der Schall hervorgebracht werden mag, so wird immer eine gewisse in dem Raume *GH* enthaltene Luftmasse aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht, indem entweder ihre Dichtigkeit eine Aenderung leidet, oder ihr eine gewisse Ge-

schwindigkeit mitgetheilt wird. Auf welche Weise dieses geschieht, das ist für die Schnelligkeit der Fortpflanzung nach beiden Enden der Röhre einerlei; aber die Stärke und Beschaffenheit des Schalles hängt von der Beschaffenheit der anfänglichen Erschütterung ab, und kann selbst nach einer Seite hin anders ausfallen, als nach der andern. Aber völlig befriedigend ist diese Theorie dennoch nicht, weil sie die Geschwindigkeit des Schalles um sehr vieles kleiner angibt, als man dieselbe aus Beobachtungen gefunden hat. Diese Abweichung ist zu grofs, um sie aus dem vielleicht etwas zweifelhaften Werthe von $b$, welcher mit einem gegebnen Barometerstande zusammen gehört, herzuleiten; auch werden wir in der Folge sehen, dafs nicht die Voraussetzung einer überall gleich weiten Röhre an diesem etwas fehlerhaften Resultate Schuld ist, und es bleiben daher nur zwei Vermuthungen, welche eine nähere Betrachtung verdienen, über den Grund, weswegen die Beobachtung eine gröfsere Geschwindigkeit des Schalles angibt, als diese Theorie, übrig. Die erste ist, dafs vielleicht Schwingungen, die nicht unendlich klein sind, sich schneller fortpflanzen; die zweite, dafs man hier vielleicht das Mariottesche Gesetz nicht als genau richtig annehmen dürfe, und darin der Grund dieser schnellern Fortpflanzung des Schalles zu suchen sey. Ich werde die erste dieser Vermuthungen widerlegen, und alsdann zeigen, wie sehr vieles hingegen die zweite für sich hat.

Bei der Fortpflanzung der nicht unendlich kleinen Schwingungen setze ich auch hier wieder voraus, dafs die anfängliche Schwingung blos in einer den Lufttheilchen mitgetheilten Geschwindigkeit bestand, wobei die Dichtigkeit $\varrho = B$ überall so blieb, wie beim Gleichgewichte. Da bei unendlich kleinen Schwingungen die Schnelligkeit der Fortpflanzung nicht von $\varrho$ abhangt, so wird man wohl nicht zweifeln dürfen, dafs das Resultat unsrer Untersuchung (dafs nämlich die Schnelligkeit der Fortpflanzung solcher endlichen Schwingungen nicht merklich von der

Fortpflanzung unendlich kleiner Schwingungen verschieden sey) auch noch gelte, wenn $Q$ veränderlich ist.

426. Problem 86. Wenn in der Luft, welche in einer überall gleich weiten Röhre enthalten ist, eine Schwingung in dem Raume *GH* (Fig. 77.) erregt wird, wobei die Geschwindigkeit nicht unendlich klein, die Aenderung der Dichtigkeit hingegen $= 0$ ist, zu bestimmen, um wie viel schneller oder langsamer diese Schwingungen fortgepflanzt werden, als die unendlich kleinen Schwingungen.

Auflösung. Ich habe am Ende des vorigen Abschnitts gezeigt, daſs sich die Gröſse des Raumes $z$, durch welchen irgend ein Lufttheilchen am Ende der Zeit $= t$ fortgerückt ist, durch eine Reihe $z = \alpha Z + \alpha^2 Z' +$ etc. ausdrücken lasse, wenn die Vibrationen klein sind, aber doch nicht als unendlich klein können angesehen werden. Ich nehme auch hier an, daſs die Schwingungen klein genug sind, um das dritte in $\alpha^3$ multiplicirte Glied bei Seite setzen zu dürfen. Der dort gefundene Werth von $z$ läſst sich aber hier noch kürzer ausdrücken, weil wir ihn nur auf den Fall anwenden, wo die Luft blos in dem kleinen Raume *GH* anfangs in Bewegung gesetzt worden ist, und blos die Fortpflanzung dieser Schwingung gesucht wird. In diesem Falle erhalten (§. 419.) die Functionen $\Gamma' : S$, $\Delta' : S$ nur dann Werthe, die von Null verschieden sind, wenn die Abscisse $S$ sich innerhalb des Raumes *GH* endigt, durch welchen sich die anfängliche Schwingung erstreckte. Rechnet man also die positiven Abscissen $= S$ von $H$ an, so gehört keiner positiven Abscisse ein reeller Werth dieser Functionen, und für einen nach dieser Seite zu liegenden Punkt ist

$$\Gamma' : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right], \text{ und auch } \Gamma : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]$$

allemal $= 0$, man kann also in dem Werthe von $z$ diese Functionen ganz weglassen, wenn von Punkten $S$ die Rede

ist, für welche die Abscisse $HS = S$ einen positiven Werth hat. Für diese also ist

$$z = \alpha\Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] + \tfrac{1}{4}\alpha^2 \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] \left\{\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]\right\}^2$$

der Raum, um welchen das Theilchen $S$ am Ende der Zeit $t$ fortgerückt ist, und

$$u = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}} \left\{ -\alpha\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] + \tfrac{1}{4}\alpha^2 \left[\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]\right]^2 \right.$$
$$\left. -\tfrac{1}{2}\alpha^2 \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] . \Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] . \Delta'' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] \right\}$$

die Geschwindigkeit, welche dasselbe erlangt hat.

Vorhin, als wir nur das erste Glied dieser beiden Gleichungen betrachteten, fanden wir, daſs $z$ und $u$ erst dann reelle Werthe erhielten, wenn $t = S\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ist: und eben das würden wir auch hier finden, wenn es nicht etwa möglich ist, die drei Glieder, welche den Werth von $z$ darstellen, durch die Form

$$z = \alpha\Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}} - t\mu\right]$$

auszudrücken. Wäre dieses möglich, so würde der Schall in $S$ ankommen, wenn $t = \dfrac{S}{\mu + \sqrt{\frac{2ga}{b}}}$ ist.

Da $\mu$ hier nur klein seyn kann, so darf man

$$\Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}} - t\mu\right] = \Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] - t\mu\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]$$

setzen, und $z$ erhielte also hienach den Werth

$$z = \alpha\Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] - \alpha t\mu\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right];$$

es war aber auch

$$z = \alpha\Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] + \tfrac{1}{4}\alpha^2 \left[S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right] \left\{\Delta' : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]\right\}^2,$$

und daher muſs

$$\tfrac{1}{4}\alpha\left[S+t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]\Delta':\left[S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right]=-t\mu$$

seyn. Man kann hier, da $t$ gewiſs nur wenig von $t=S\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ verschieden ist, wenn der Schall in $S$ ankommt, im ersten Gliede, welches den kleinen Factor $\alpha$ hat, $S=t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ setzen, und erhält also bis auf Gröſsen, die ungefähr von einerlei Ordnung mit $\alpha^2$ seyn werden, genau

$$\mu=-\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{2ga}{b}}\,.\,\Delta':\left[S-t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right],$$

und die Zeit, in welcher der Schall nach $S$ kommt, würde

$$t=\frac{S}{\sqrt{\frac{2ga}{b}}+\mu}\text{ seyn.}$$

Der eben gefundene Werth von $\mu$ ist auch $=\tfrac{1}{2}x$ (bis auf Gröſsen, die mit $\alpha^2$ zu einerlei Ordnung gehören), wenn man unter $x$ die Geschwindigkeit versteht, welche das Lufttheilchen $S$ in dem Augenblicke erlangt, da die Zeit $=t$ verflossen ist, daher wird der Raum, durch welchen der Schall sich in einer Secunde fortpflanzt,

$$=\mu+\sqrt{\frac{2ga}{b}}=\tfrac{1}{2}x+\sqrt{\frac{2ga}{b}}.$$

Da nun aber das Theilchen $S$ erst in dem Augenblicke anfängt, sich zu bewegen, wenn $t=\frac{S}{\sqrt{\frac{2ga}{b}}+\mu}$ ist, und $x$ die Geschwindigkeit desselben Theilchens für eben diesen Zeitpunkt bedeutet, so ist $x$ nur unendlich klein, denn es wäre ungereimt, anzunehmen, daſs ein Theilchen des Fluidi blos durch die Wirkung der anliegenden Theilchen plötzlich eine endliche Geschwindigkeit erhielte; also wird die Geschwindigkeit, mit welcher der

Schall sich fortpflanzt, bei der Voraussetzung endlicher Schwingungen nur um unendlich wenig verschieden seyn von derjenigen, welche wir für unendlich kleine Schwingungen gefunden haben *).

427. Die aus der Beobachtung geschlossene gröfsere Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles läfst sich also nicht daraus erklären, dafs man den Vibrationen eine endliche Gröfse beilegt. Hingegen würde sich die Theorie völlig und sehr leicht mit der Erfahrung in Uebereinstimmung bringen lassen, wenn man annehmen dürfte, dafs die Dichtigkeit der Luft nicht in eben dem Verhältnisse wachse, wie der Druck.

Geht man nämlich zu den Gleichungen des 394. §. zurück, und nimmt dort an, dafs $p = a\left(\frac{q}{b}\right)^m$ sey, so wird

$$\left(\frac{dp}{dS}\right) = \frac{a \,.\, m}{b}\left(\frac{q}{b}\right)^{m-1}\left(\frac{dq}{dS}\right),$$

---

*) Lagrange findet in der zweiten Abhandlung sur la nature et la propagation du son in dem 2. Bande der Miscell. Taurinens. für endliche Schwingungen den Raum, durch welchen sie in 1 Sec. fortgepflanzt werden, $= \frac{1}{4}\varepsilon + \sqrt{\frac{2ga}{b}}$, so dafs also seine Formel $\frac{1}{4}\varepsilon$ gibt, wo ich $\frac{1}{2}\varepsilon$ finde. Diese Verschiedenheit der Resultate darf man hier wohl nicht unerwartet finden, da bei dem Weglassen kleiner Gröfsen, die doch nicht ganz verschwinden, kleine Verschiedenheiten leicht möglich sind: vielmehr scheint diese nahe Uebereinstimmung der Resultate (denn $\varepsilon$, die Geschwindigkeit der Bewegung eines Lufttheilchens bei den Vibrationen des Schalles, ist immer sehr klein), welche auf zwei ganz verschiedenen Wegen gefunden sind, mir die Richtigkeit der Behauptung, dafs die Geschwindigkeit des Schalles durch die Gröfse der Oscillationen keine merkliche Aenderung leide, noch vollkommner zu bestätigen. — — Am Schlusse dieses Problems bin ich Lagrange's Schlüssen gefolgt: das Vorhergehende konnte ich hier nicht nach der ihm eigenthümlichen Methode darstellen, weil das zu umständliche Erläuterung erfordert hätte. B.

und diesen Werth muſs man jetzt in die dortige Gleichung

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = 0$$

setzen. Wir haben gesehen, daſs die Schnelligkeit, mit welcher die Schwingungen sich fortpflanzen, nicht von $Q$ abhängt, und ich darf daher $Q = B$ annehmen, damit

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = - B \, . \, \frac{\left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2}$$

werde, daher, wenn $B = b$ ist, oder für $a$ diejenige Barometerhöhe genommen wird, welche der Dichtigkeit $= B$ entspricht,

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dS}\right) = - \frac{a \, . \, m \left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right)}{b \left(\frac{ds}{dS}\right)^m} = - \frac{1}{2g}\left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right),$$

und aus dieser Gleichung folgt, wenn man $s = S + z$ und $z$ sehr klein annimmt,

$$- 2g \, . \, \frac{a \, . \, m}{b}\left(\frac{d^2 z}{dS^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\text{also } z = \Gamma : \left[S + t\sqrt{\frac{2gam}{b}}\right] + \Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2gam}{b}}\right]$$

für unendlich kleine Schwingungen.

Der Schall würde daher, wenn der Druck sich wie die Potenz $m$ der Dichtigkeit verhielte, durch den Raum $= \sqrt{\frac{2gam}{b}}$ in einer Secunde fortpflanzen, und damit dieser Raum $= 1040$ paris. Fuſs würde, müſste man $m$ ungefähr $= \frac{4}{3}$ setzen.

428. Aber eine so groſse Abweichung von dem Mariottischen Gesetze würde, wenn sie allgemein Statt fände, auch bei andern Experimenten merklich werden, und es scheint daher beim ersten Anblicke auch diese Hypothese keinesweges zu genügen, wenn sich nicht etwa Gründe

angeben lassen, warum eine solche Abweichung von diesem Gesetze bei den kleinen Schwingungen, welche bei der Fortpflanzung des Schalles entstehen, Statt finden kann, ohne darum in andern Fällen, selbst wo die Aenderung der Dichtigkeit viel gröſser ist, merklich zu seyn.

429. Es ist eine bekannte Erfahrung, daſs bei der Compression der Luft Wärme frei wird, und hingegen bei ihrer Ausdehnung in einen gröſsern Raum fühlbare Kälte entsteht: aber bei unsern Experimenten mit der Luftpumpe ist diese Aenderung der Temperatur nur für einen Augenblick merklich, weil im ersten Falle die frei werdende Wärme sich sehr schnell zerstreut, und im letztern Falle von den den Recipienten umgebenden Körpern sehr schnell so viel Wärme wieder zuströmt, als nöthig ist, um die bei der Verdünnung der Luft verloren gegangene (latent gewordene) Wärme zu ersetzen. Da nun erhöhete Temperatur die Elasticität der Luft bei gleicher Dichtigkeit vermehrt, so ist offenbar, daſs die verdichtete Luft im ersten Augenblicke (wenn die Compression sehr schnell geschähe) einen gröſsern Druck ausüben würde, als nachher, wenn die Temperatur wieder erniedrigt ist. Aber da bei unsern Experimenten die frei gewordene Wärme sich viel zu schnell zerstreut, als daſs es möglich wäre, den Druck zu bestimmen, welcher wegen der erhöhten Temperatur im ersten Augenblicke Statt fand, so geben diese Experimente nur an, was für eine Elasticität die Luft besitzt, nachdem die niedrigere Temperatur wieder eingetreten ist, und nur für diesen Fall gilt das Mariottische Gesetz.

Bei den Vibrationen hingegen, oder den abwechselnden Compressionen und Dilatationen der Lufttheilchen, welche bei der Fortpflanzung des Schalles Statt finden, darf man diese im ersten Augenblicke vergröſserte Aenderung der Elasticität nicht übersehen, obgleich die Aenderung der Dichtigkeit nur äuſserst gering ist.

430. Um also die Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles vollständig anzustellen, muſs man den Druck $p = \frac{aqr}{bc}$ setzen (§. 22.), wenn $r$ die Wärme bezeichnet, welche in dem Augenblicke Statt findet, da der Druck $p$ bestimmt werden soll, $c$ hingegen diejenige bestimmte Temperatur bezeichnet, für welche die Dichtigkeit $= b$ dem Drucke $= a$ zugehört. Zugleich aber muſs man hier, wo die Aenderung der Temperatur blos durch die Aenderung der Dichtigkeit bewirkt wird, $r$ als Function von $q$ betrachten. Es ist nun zwar nicht genau bekannt, wie $r$ von $q$ abhängt, aber bei so kleinen Aenderungen der Dichtigkeit, als hier nur vorkommen, darf man wohl annehmen, daſs der Unterschied der Temperatur $r - c$ dem Unterschiede der Dichtigkeiten $q - b$ proportional, also $r - c = \gamma c \frac{(q-b)}{b}$ sey, wo $\gamma$ eine Zahl bedeutet, deren Gröſse wir in der Folge näher bestimmen werden. Statt $\frac{r}{c}$ setze ich daher

$$1 + \gamma \frac{(q-b)}{b}, \text{ folglich } p = \frac{aq}{b}\left[1 + \gamma \frac{(q-b)}{b}\right],$$

oder, um die Ausdrücke abzukürzen,

$$p = a(1+\sigma)(1+\gamma\sigma),$$

wenn $q - b = b\sigma$ ist: oder endlich, weil $\sigma$ so klein ist, daſs man das Quadrat weglassen kann,

$$p = a[1 + (1+\gamma)\sigma],$$

in allen denjenigen Fällen, deren Betrachtung hier vorkommt. Hieraus wird es nun nicht schwer seyn, zu bestimmen, welchen Einfluſs jene Aenderung der Temperatur auf die Geschwindigkeit des Schalles hat, wenn man die beim Schalle entstehenden Vibrationen als unendlich klein betrachtet.

431. Problem 87. Wenn bei der Fortpflanzung kleiner Schwingungen in der Luft wegen der abwechselnden Verdichtungen und Ausdehnungen der Lufttheilchen eine Aenderung der Temperatur für diese Lufttheilchen

Statt findet, zu bestimmen, wie schnell eine in $GH$ (Fig. 77.) erregte Schwingung sich bis zu einem bestimmten Punkte $S$ fortpflanzt.

Auflösung. Wir müssen auch hier wieder zu den Grundgleichungen des 394. §. zurückkehren, welche ich indefs, wegen der Voraussetzung, dafs $s = S + z$ und $z$ äufserst klein sey, sogleich in folgende verwandle:

$$\frac{2g}{q}\left[\frac{dp}{dS}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}\right] = 0$$

$$\text{und } q = \frac{Q}{1 + \left[\frac{dz}{dS}\right]} = Q\left[1 - \left[\frac{dz}{dS}\right]\right].$$

Da wir nun hier annehmen, dafs $q = b + b\sigma$ und $p = a[1 + (1+\gamma)\sigma]$, so wird

$$\left[\frac{dp}{dS}\right] = a(1+\gamma)\left[\frac{d\sigma}{dS}\right],$$

$$\text{oder, weil } b(1+\sigma) = Q\left[1 - \left[\frac{dz}{dS}\right]\right],$$

$$\text{auch } \left[\frac{d\sigma}{dS}\right] = \frac{dQ}{b\,dS}\cdot\left[1 - \left[\frac{dz}{dS}\right]\right] - \frac{Q}{b}\left[\frac{d^2z}{dS^2}\right],$$

und daher, weil der Factor $\left[\frac{dz}{dS}\right]$ weggelassen werden darf,

$$\left[\frac{dp}{dS}\right] = a(1+\gamma)\cdot\frac{dQ}{b\,dS} - \frac{a(1+\gamma)Q}{b}\left[\frac{d^2z}{dS^2}\right]$$

$$\text{und } \frac{1}{q}\left[\frac{dp}{dS}\right] = \frac{a(1+\gamma)}{b}\cdot\frac{dQ}{Q\,dS} - \frac{a(1+\gamma)}{b}\left[\frac{d^2z}{dS^2}\right],$$

woraus endlich die Hauptgleichung folgt:

$$\frac{2ga(1+\gamma)}{b}\cdot\frac{dQ}{Q\,dS} = \frac{2ga(1+\gamma)}{b}\left[\frac{d^2z}{dS^2}\right] - \left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$

$$\text{und } z = \int dS \log.\frac{Q}{b} + \Gamma : \left[S + t\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}\right]$$

$$+ \Delta : \left[S - t\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}\right].$$

Aus den Schlüssen des 420. §. erhellet nun, daſs die in dem kleinen Raume $GH$ anfangs erregte Schwingung sich bis nach $S$ fortgepflanzt hat, wenn $t = HS\sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}}$ ist, oder daſs am Ende dieser Zeit der Schall in $S$ ankommt.

432. Der Raum also, durch welchen der Schall in einer Secunde fortgepflanzt wird, ist $=\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}$, folglich gröſser, als nach der gewöhnlichen Hypothese, wofern $\gamma$ eine positive Zahl ist. Die Bedeutung dieses $\gamma$ müssen wir jetzt etwas näher betrachten. Wir setzten $\frac{r'-c}{c} = \gamma \cdot \frac{q-b}{b}$, und nahmen $\gamma$ als beständig an: fände dieses Gesetz allgemein Statt, auch wenn $q-b$ erheblich groſs wird, so würde für eine Compression bis zur doppelten Dichtigkeit $\gamma = \frac{r'-c}{c}$ werden, wenn $r'$ die Wärme bedeutet, welche bei der Compression bis zur doppelt so groſsen Dichtigkeit Statt findet: es ist also $\gamma$ durch $r'$ bestimmt, wenn $c$ eine gegebene Gröſse ist. Man kann $c$ wirklich als eine gegebne Gröſse betrachten, denn wenn man $r = c + \varrho$ setzt, und $\varrho$ in Reaumürschen Graden ausdrückt, so hat man aus Versuchen $p = a + \frac{\varrho a}{215}$ gefunden, für den Druck gleich dichter Luft, und man kann daher $c = 215$ Gr. Reaum. setzen, und $r = 215 + \varrho$ in eben solchen Graden ausdrücken *). Hingegen hat es Schwie-

*) Genau genommen, soll man nach Deluc zur Normaltemperatur $= c$, wenn man dafür 215 setzen will, den 16ten Grad des achtzigtheiligen Quecksilberthermometers annehmen, und für $\varrho$ die Anzahl von Grade setzen, um welche die Temperatur von dieser Normaltemperatur verschieden ist. — Diese Genauigkeit ist hier nicht nöthig, sondern man kann für $\varrho$ die Anzahl von Graden

rigkeit, $r'$ zu bestimmen, weil die bei der Verdichtung der Luft frei werdende Wärme zu schnell entweicht, um eine genaue Beobachtung über die bei der Verdichtung im ersten Augenblicke Statt findende Temperatur anzustellen.

433. Es ließe sich aber umgekehrt untersuchen, wie groß $\gamma$ seyn muß, damit die Geschwindigkeit des Schalles der Erfahrung gemäß gefunden werde, und aus diesem Werthe von $\gamma$ ließe sich dann auch $r'$ bestimmen. Da der Schall in einer Secunde den Raum = 1040 paris. Fuß durchläuft, und eben dieser Raum $= \sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}$ ist, so wird $1+\gamma = \frac{b}{2ga}(1040)^2$,

$$\text{oder } 1+\gamma = \frac{1040^2}{30{,}19 \times 2{,}33 \times 800 \times 14} = 1{,}37.$$

Man würde also $\gamma = 0{,}37$ finden, und daher

$$r' - c = 215 . 0{,}37 = 79 \text{ Gr.}$$

das heißt, wenn alle andern Voraussetzungen richtig sind, so würde hieraus folgen, daß bei einer plötzlichen Zusammenpressung bis zur doppelten Dichtigkeit die Temperatur um 79 Gr. der achtzigtheiligen Scale erhöhet werden müßte.

434. Die letzte Folgerung ist indeß nur unter der Voraussetzung richtig, daß selbst bei erheblichen Werthen von $q$ noch immer $\frac{r-c}{c}$ zu $\frac{q-b}{b}$ ein beständiges Verhältniß, wie $\gamma : 1$ habe. Für die Theorie des Schalles aber ist dieses nicht nothwendig, weil da die Gleichung

$$\frac{r-c}{c} = \gamma . \frac{q-b}{b}$$

nur für ganz kleine Werthe von $q - b$ und $r - c$ zu gelten

---

setzen, um welche bei veränderter Dichtigkeit die Temperatur von der natürlichen, gerade jetzt Statt findenden Wärme der Luft verschieden ist. B.

braucht. Wäre also allgemein das Verhältniſs der Gröſsen $\frac{r-c}{c}$ zu $\frac{q-b}{b}$ durch die Curve $AZ$ (Fig. 77 $b$.) ausgedrückt, deren Abscissen $Ax = \frac{q-b}{b}$ und Ordinaten $xy = \frac{r-c}{c}$ sind, und man zöge am Anfangspunkte der Abscissen in $A$, wo $q - b = 0$ und $r - c = 0$ ist, die Tangente $Av$, so kommt es bei der Theorie des Schalles blos auf die Richtung dieser Tangente an, oder auf das Verhältniſs, welches die unendlich kleinen Coordinaten für die zunächst an $A$ liegenden Punkte der Curve zu einander haben, und es ist $y = \frac{vx}{Ax}$, so daſs die Natur dieser Curve ganz unbestimmt bleibt. Wäre also auch für $q = 2b$ oder $Ax = 1$ die Ordinate $xy$ nicht genau $= 0{,}37$, so würde dieses keine Einwendung seyn gegen die Richtigkeit der Hypothese, daſs die mit Aenderungen der Dichtigkeit verbundene Aenderung der Temperatur der Grund der schnellern Fortpflanzung des Schalles sey, welche genügend zu erklären die Physiker sich lange vergeblich bemüht haben *).

435. Da die Gleichungen (§. 431.) für die Fortpflanzung des Schalles, wenn man auf diese Aenderung der Temperatur Rücksicht nimmt, denen ganz ähnlich werden, welche wir vorhin fanden, so lassen sich auch $z$, $q$, $s$ auf ähnliche Weise, wie dort (§. 420.), durch die Scalen der anfänglichen Dichtigkeit und Geschwindigkeit ausdrücken. Indeſs muſs man, weil hier

---

*) Diese Hypothese hat zuerst Biot genauer untersucht, nachdem Laplace die Idee dazu angegeben hatte. — Ueber die Aenderung der Temperatur bei Verdichtung oder Verdünnung der Luft im Recipienten hat Dalton Versuche angestellt. Gilberts Annalen der Phyſik. XIV. Band. S. 110. B.

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = s = \frac{\sqrt{2ga(1+\gamma)}}{\sqrt{b}} \left\{ \Gamma' : \left[ S + t\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}} \right] - \Delta' : \left[ S - t\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}} \right] \right\}$$

ist, und daher im anfänglichen Zustande

$$\Upsilon \, . \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}} = \Gamma' : S - \Delta' : S,$$

die Scale der Geschwindigkeiten so zeichnen, daſs ihre Ordinaten $tn$ (oder $TN$ Fig. 72.) $= \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}}$ sind, und dann die Entfernung

$$St = t\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}} = t\sqrt{\frac{2ga \, . \, 1{,}37}{b}}$$

ungefähr nehmen. Wenn man das thut, so wird im Punkte $S$ für den Zeitpunkt, da $t = St \, . \sqrt{\frac{b}{2ga.(1+\gamma)}}$ ist,

$$Ss = \tfrac{1}{2}(Htn + Htm),$$

$$q = b\,(1 + \tfrac{1}{2}tm + \tfrac{1}{2}tn)$$

$$\text{und } s = \tfrac{1}{2}(tm + tn)\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}.$$

Alle Folgerungen im 422. §. und den folgenden gelten also auch hier, und da die einzige Abweichung von der Erfahrung, welche dort Statt fand, hier gehoben ist, so fehlt der ganzen Theorie von der Fortpflanzung des Schalles jetzt zur vollkommensten Uebereinstimmung mit der Erfahrung gar nichts mehr.

436. Bisher habe ich nur die Fortpflanzung einer einzigen Schwingung betrachtet, und nicht auf diejenigen Eigenschaften des Schalles Rücksicht genommen, welche aus der Folge mehrerer Schwingungen oder Schläge (pulsus) entstehen. Diese reguläre Folge mehrerer Schläge ist es, was die verschiedenen Töne, nämlich die Höhe oder Tiefe der Töne bestimmt, und es können hierbei wieder unendliche Verschiedenheiten Statt finden. Weil es aber hier nicht mein Zweck ist, die ganze Lehre von den Tönen

vorzutragen, so bemerke ich nur, daſs, wenn anfangs mehrere Schwingungen in der Luft erregt sind, wie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (Fig. 78.), jede sich eben so fortpflanzt, als ob die übrigen nicht vorhanden wären, und daher zugleich hervorgebrachte Schwingungen sich nicht vermischen. Diese sonst schwer zu erklärende Eigenschaft des Schalles folgt auch aus unsrer Theorie. Denn da die beiden über der Abscissenlinie gezeichneten Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit allenthalben, auſser in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, mit der Axe zusammenfallen, so wird, wenn wir irgend einen Punkt $S$ betrachten, am Ende der Zeit $t = S\gamma \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}}$ blos die Schwingung $\gamma$ sich bis in $S$ fortgepflanzt haben, und wenn sich in $S$ ein Ohr befindet, so wird es in diesem Augenblicke den in $\gamma$ erregten Schall mit allen seinen besondern Eigenschaften vernehmen: der in $\beta$ erregte Klang hingegen wird in eben diesem Punkte erst gehört werden, wenn $t = S\beta \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}}$ ist, und man wird diesen Klang (oder wenn es auch ein blos unbestimmtes in $\beta$ erregtes Geräusch wäre) in $S$ hören, ohne daſs die von $\gamma$ und $\alpha$ ausgehenden Töne sich damit vermischen, obgleich die von $\gamma$ nach $A$ fortgepflanzte Schwingung dieser Schwingung begegnet ist, und sie also gestört haben könnte.

Auch wenn der Punkt $S'$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegt, werden die verschiedenen Schwingungen jede besonders von einem Ohre, das sich in $S'$ befände, empfunden werden, wofern nur nicht die Entfernungen $\alpha S'$, $\beta S'$ gleich groſs sind. Ist aber dieses der Fall, so hört man am Ende der Zeit $t = S'\alpha \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}} = S'\beta \sqrt{\frac{b}{2ga(1+\gamma)}}$ einen aus beiden zusammengesetzten Schall: die in $\gamma$ erregte Schwingung aber, welche später, als jene beiden in $S'$ ankommt, wird man hier eben so hören, und die besondern Eigenschaften dieses Klanges eben so empfinden, als ob in $\alpha$, $\beta$ gar keine Schwingungen erregt wären.

Da wir hier die Schwingungen als in einer überall gleich weiten Röhre fortgepflanzt betrachten, so ist es diesem Umstande zuzuschreiben, dafs die Theorie die Stärke des Schalles als in jeder Entfernung gleich bleibend angibt. Denn so weit man auch den Punkt $S$ von der ursprünglichen Schwingung entfernt annimmt, so bleibt die Scale für die fortgepflanzte Shwingung immer dieselbe, und nicht blos die ganze Stärke des Schalles, sondern auch seine Beschaffenheit bleibt ungeändert. Dieses findet in freier Luft, wo der Schall sich nach allen Seiten ausbreitet, nicht Statt, wie wir in der Folge sehen werden.

437. Um die Formeln, deren Gebrauch bei dieser Untersuchung so oft vorkommt, abzukürzen, will ich künftighin den Raum, welchen der Schall in einer Secunde durchläuft, $= c$ setzen, dafs also $\sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}} = c$ ist,

$$\text{daher } z = \int dS \log. \frac{Q}{B} + \Gamma:(S+ct) + \Delta:(S-ct),$$

$$\dot{z} = c\Gamma':(S+ct) - c\Delta':(S-ct) \text{ u. s. w.}$$

438. Problem 88. Wenn die Röhre in $B$ (Fig. 79.) offen ist, am andern Ende aber über $A$ hinaus sich ins Unendliche erstreckt, die Fortpflanzung einer in $GH$ erregten Schwingung in dieser Röhre zu bestimmen.

Auflösung. Für die in $GH$ erregte Schwingung sey $GmH$ die Scale der Dichtigkeiten, $GnH$ die Scale der Geschwindigkeiten, so fallen diese Scalen für die ganze übrige Röhre mit der Axe zusammen, weil blos in $GH$ anfangs das Gleichgewicht gestört war. Weil aber die Röhre sich in $BB$ endigt, und da offen ist, so müssen die Scalen so, wie in Fig. 74., fortgesetzt werden; daher wird die Scale der Dichtigkeiten $BHmGA$ an der entgegengesetzten Seite der Axe in $BhMga$, die Scale der Geschwindigkeiten aber an derselben Seite der Axe so wiederholt, dafs zu gleichen Abscissen, die man von $B$ an nach beiden Seiten nimmt, gleiche Ordinaten gehören. Die Schwingung pflanzt sich

also nun eben so fort, als ob aufserhalb der Röhre eben so weit von der Oefnung $BB$, als $GH$ davon entfernt ist, zugleich eine ähnliche Schwingung $gh$ erregt würde, die sich von $GH$ nur dadurch unterscheidet, dafs die Scale der Dichtigkeiten an der entgegengesetzten Seite der Axe liegt, für welche aber die Scalen so beschaffen sind, dafs gleichen von $B$ an gerechneten Abscissen $BT = Bt$ gleiche Ordinaten $TN = tn$, $TM = tm$ zugehören. Wir wollen jetzt untersuchen, wenn und auf welche Weise die Schwingung zu jedem Punkte der Röhre gelangt.

In der Oefnung $BB$ wird die Luft ruhen, bis vom Anfange der Bewegung die Zeit $t = \frac{BH}{c}$ verflossen ist, dann aber sich so zu bewegen anfangen, dafs für $t = \frac{Bt}{c}$ die Dichtigkeit $q = B(1 - \frac{1}{2}TN - \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm) = B$, und die Geschwindigkeit

$$s = \tfrac{1}{2}c(TN + TM + tm + tn) = c(tm + tn)$$

ist. Die Dichtigkeit leidet nämlich (wie auch vorausgesetzt worden) in $BB$ keine Aenderung, die Geschwindigkeit nach der Richtung $Ba$ aber ist desto gröfser, je gröfser die Summe der Ordinaten $tn$ und $tm$ ist, und es bedeutet hier $tn$ eine Geschwindigkeit nach eben dieser Richtung, $tm$ aber, wenn es positiv ist, eine Dichtigkeit, welche die natürliche Dichtigkeit übertrift. Diese Bewegung der Luft in der Oefnung $BB$ wird während der Zeit $= \frac{GH}{c}$ fortdauern, und wenn $t = \frac{BG}{c}$ ist, gelangt die Luft hier wieder zur Ruhe.

Innerhalb der Röhre aber in $S$ werden zwei Schwingungen nach einander entstehen, die erste nämlich, wenn die ursprüngliche Schallwelle $GH$ sich bis dahin fortgepflanzt hat, die zweite, wenn die aus jener entspringende

Schwingung $gh$ dahin gelangt. Vermöge der erstern wird, wenn $t = \frac{St}{c}$ ist, $q = B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$,

$$x = \tfrac{1}{2}c(tm + tn),$$

aber wegen der zweiten Schallwelle wird für $t = \frac{ST}{c}$

$$q = B(1 - \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM) = B(1 - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm),$$
$$x = \tfrac{1}{2}c(tn + tm).$$

Bei der Wiederholung des Schalles wird also die Dichtigkeit um eben so viel kleiner als die natürliche Dichtigkeit, als sie bei der Ankunft des ersten Schalles größser war: die Geschwindigkeit aber ist in beiden Fällen einerlei.

In $GH$ selbst wird, nachdem die erste Schwingung aufgehört hat, am Ende der Zeit $t = \frac{Hh}{c} = \frac{2BH}{c}$ eine neue Schwingung anfangen, oder ein Wiederhall gehört werden. Endlich wird in jedem Punkte $A$, welcher nach der andern Seite von $GH$ liegt, eine zweimalige Schwingung Statt finden; für die erste wird, wenn $t = \frac{At}{c}$,

$$q = B(1 - \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm),$$
$$x = \tfrac{1}{2}c(tn - tm);$$

für die zweite aber, wenn $t = \frac{AT}{c}$,

$$q = B(1 - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm),$$
$$x = \tfrac{1}{2}c(tn + tm),$$

und zwischen diesen beiden Schwingungen wird die Zeit $= \frac{2BH}{c}$ verfliessen.

438 *a*). Man wird also hier in der Oefnung $BB$ nur einen einzigen Schall hören: aber wenn man von $B$ gegen $H$ zu fortgeht, hört man den Schall verdoppelt, so dass man den letzten als Resonanz des erstern betrachten kann, und die zwischen beiden verfliessende Zeit wird desto grösser, je näher man nach $H$ kommt. In $GH$ selbst und

jedem weiter nach $A$ zu liegenden Punkte folgen die beiden Schwingungen nach einem Zeitraume, der $= \frac{2BH}{c}$ ist, auf einander, und wenn diese Zeit nicht zu klein ist, so wird man die letzte als Echo des ersten Schalles hören.

438 *b*). Wenn anfangs mehrere Schallwellen in der Röhre erregt wurden, so läſst sich, wie im vorigen Probleme, zeigen, daſs jede, ohne von den übrigen gestört zu werden, sich in der Röhre fortpflanzt, und daſs jeder Klang, ohne sich mit dem andern zu vermischen, gehört wird.

438 *c*). Die Auflösung dieses Problems hat uns ganz unerwartet zur Erklärung zwei merkwürdiger Phänomene, der Resonanz und des Echo, geleitet. Wir sehen aber hier, daſs es nicht nothwendig ist, die Entstehung eines solchen Wiederhalles durch Zurückwerfung zu erklären. Denn wenn in einer in $B$ (Fig. 80.) offenen Röhre, die sich nach $A$ zu ins Unendliche erstreckt, in $L$ ein Schall erregt wird, so hört man diesen blos in der Oefnung $BB$ einfach, in jedem andern Punkte der Röhre aber verdoppelt, und der Zeitraum, welcher zwischen dem doppelten Schalle verflieſst, ist desto gröſser, je weiter man sich von $B$ gegen $L$ zu entfernt: jenseits $L$ gegen $A$ hin aber bleibt die zwischen dem Schalle und Wiederhalle verflieſsende Zeit gleich groſs: in der Nähe von $B$ wird man daher diese Wiederholung des Schalles als Resonanz hören, in gröſsern Entfernungen von $B$ aber als Echo, wenn die Entfernung $tT$ (Fig. 79.) so groſs ist, daſs eine hinreichende Zeit zwischen dem Schall und Wiederhall verflieſst, um beide als deutlich unterschieden zu empfinden. Wäre $BL$ (Fig. 80.) 1040 Fuſs, so würde man in $L$ oder $A$ das Echo zwei Secunden später hören, als den in $L$ erregten Schall selbst. — Gleichwohl findet hier keine Zurückwerfung Statt, wenn man nicht etwa sagen will, daſs der Schall in $B$ an der äuſsern Luft zurückgeworfen werde, was man doch bei diesem Ausdrucke sich gewöhnlich nicht denkt.

Das hier Erklärte läſst sich auch einigermaſsen auf Hallen und enge Plätze, besonders wenn sie oben bedacht sind, anwenden, und wahrscheinlich würden sich manche an solchen Orten bemerkte Echo hieraus erklären lassen.

438 *d*). Auch über die Sprachröhre läſst sich einiges aus dem Bisherigen schlieſsen. Wenn nämlich in *L* (Fig. 80.) ein Schall erregt wird, so wird er sich fast ungeschwächt bis *BB* fortpflanzen, von hier an aber in der freien Luft sich nach allen Seiten verbreiten. Weil aber hier die Oefnung *BB* nur eben so groſs ist, als die anfängliche Schwingung, so wird man den Schall nicht verstärkt, aber mit einiger Resonanz verbunden hören, und zur Verstärkung des Schalles würde es vermuthlich besser seyn, die Röhre gegen die Oefnung *BB* zu erweitern, damit eine gröſsere Luftmasse in Bewegung gesetzt, und in der äuſsern Luft stärkere Schwingungen erregt würden.

438 *e*). Problem 89. Wenn die Röhre überall gleich weit, und in *BB* (Fig. 81.) verschlossen ist, nach der andern Seite über *AA* hinaus aber sich ins Unendliche erstreckt, zu bestimmen, wie die in dem kleinen Raume *GH* erregte Schwingung sich in der Röhre fortpflanzt.

Auflösung. Wir zeichnen wieder die Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit für den anfänglichen Zustand so, daſs wenn im Punkte *t* die anfängliche Dichtigkeit $= \varrho$, die Geschwindigkeit nach der Richtung *tB*, $= \Upsilon$ war, und die natürliche Dichtigkeit der Luft $= B$, der Raum, durch welchen der Schall sich in einer Secunde fortpflanzt, $= c$ ist, die Ordinaten für die Scale der Dichtigkeiten $tm = \frac{\varrho - B}{B}$, und für die Scale der Geschwindigkeiten $= \frac{\Upsilon}{c}$ genommen werden, und so wird *GmH* die Scale der Dichtigkeiten, *GnH* die Scale der Geschwindigkeiten, und beide fallen in jedem andern Punkte der Röhre mit der Axe zusammen. Um sie aber über das Ende der

Röhre $BB$ hinaus fortzusetzen, nehme man für jede Abscisse $BT = Bt$, die Ordinate für die Scale der Dichtigkeiten $TM = tm$ an eben der Seite der Axe, für die Scale der Geschwindigkeiten aber $TN = tn$ an der entgegengesetzten Seite der Axe, und bilde so die Scalen $hMg$, $hNg$ der aus jener abgeleiteten Schwingung.

Aus den vorigen Schlüssen folgt nun von selbst, dafs die Luft in $BB$ ruhen wird, bis beide Schwingungen sich bis dahin fortpflanzen, welches erfolgt, wenn $t = \frac{BH}{c}$ wird. Ist die verflossene Zeit etwas länger $t = \frac{Bt}{c}$, so wird in $B$ eine Schwingung entstanden seyn, bei welcher die Dichtigkeit

$q = B(1 + \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm) = B(1 + tn + tm)$,

die Geschwindigkeit aber $= 0$ ist. An irgend einer andern Stelle $S$ der Röhre, welche zwischen $B$ und $H$ liegt, wird der in $GH$ erregte Schall früher ankommen, und es wird, wenn $t = \frac{St}{c}$, $q = B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ und $x = \frac{1}{2}c(tn + tm)$ seyn; die Luft wird wieder zur Ruhe gelangen, wenn $t = \frac{SG}{c}$ ist, aber aufs neue in Schwingung gerathen, wenn $t = \frac{Sh}{c}$ wird, und bei diesem Wiederhalle wird für

$$t = \frac{ST}{c} = \frac{Bt + BS}{c}$$

$$q = B(1 + \tfrac{1}{2}tm + \tfrac{1}{2}tn),$$

wie bei der ersten Schwingung, aber

$$x = -\tfrac{1}{2}c(tn + tm),$$

also die Richtung der Bewegung der vorigen entgegengesetzt seyn.

In $GH$, wo die anfängliche Schwingung erregt ward, und weiter gegen $A$ zu wird zwischen dem Schalle und

Wiederhalle ein Zeitraum $= \frac{2BH}{c}$ verfliefsen, und für die ursprüngliche Schallwelle wird am Ende der Zeit $t = \frac{At}{c}$, in $A$ die Dichtigkeit $q = B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$, die Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$, für die secundäre Schwingung aber wird in $A$, wenn die Zeit $t = \frac{AT}{c}$ ist,

$$q = B(1 + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm) \text{ und } s = -\tfrac{1}{2}c\,(tm + tn).$$

Und hiemit ist die Fortpflanzung des in $GH$ erregten Schalles für die ganze Röhre bestimmt.

438 *f*). Man hört also auch hier einen Wiederhall, welcher, wenn das Ohr sich nahe bei $B$ befindet, dem ursprünglichen Schalle sehr schnell folgt, und als Resonanz, nicht als deutlich unterschiedenes Echo gehört wird. Ist aber $GH$ weit genug von $B$ entfernt, und befindet sich auch das Ohr weit genug von $B$ gegen $A$ zu, so verfliefst zwischen der Ankunft des ersten Schalles und des Wiederhalles eine beträchtliche Zeit, und man hört diesen als Echo.

Die Entstehung dieses Wiederhalles mufs man sich daraus erklären, dafs die fortgepflanzte Schwingung in dem Augenblicke, da sie in $BB$ ankommt, eine solche Beschaffenheit erlangt, vermöge welcher sie nach der entgegengesetzten Richtung fortgepflanzt werden kann. Wir fanden nämlich vorhin (§. 424.), dafs im Allgemeinen diejenigen Schwingungen sich nicht nach beiden Seiten fortpflanzen, für welche $s = c \cdot \left(\frac{q - B}{B}\right)$ ist, und dafs die fortgepflanzten Schwingungen diese Eigenschaft haben, so lange sie innerhalb der Röhre fortrücken: sie verlieren aber diese Eigenschaft, sowohl wenn die Schwingung am offenen Ende der Röhre in die freie Luft tritt, als wenn sie auf einen festen Gegenstand trift; im ersten Falle theilt die bis dahin blos vorwärts fortrückende Schallwelle sich

in zwei, deren eine in die freie Luft hinaus, die andre in die Röhre zurück geht; im zweiten Falle wird die Schallwelle von dem festen Gegenstande gleichsam zurückgeworfen, und ihre vorwärts rückende Bewegung wird ganz aufgehoben *).

438 g). Die Beschaffenheit des Schalles, welchen man als Wiederhall hört, ist von dem ursprünglichen Schalle verschieden, und es kann sogar Fälle geben, wo entweder die ursprüngliche Schwingung $GH$, oder die aus dieser entspringende $gh$ sich nur nach e i n e r Seite fortpflanzte, jenes würde der Fall seyn, wenn die Scalen $GmH$ und $GnH$ für den anfänglichen Zustand zusammenfielen, denn alsdann würde, wenn beide oberhalb der Axe lägen, der ursprüngliche Schall nach $A$ hin gar nicht fortgepflanzt, wohl aber könnte man dort den Wiederhall hören; wären hingegen

---

*) Hr. Chladni erklärt in seiner Akustik §. 212. die Entstehung des Echo nicht ganz richtig. Er sagt, bei einer nach einem oder beidenEnden begränzten Röhre werde die Verdichtung und Geschwindigkeit der Lufttheilchen nicht in demselben Augenblicke $= 0$, und d e s w e g e n müsse die Bewegung mehrere Male vor- und rückwärts gehen. — — Diese Erklärung scheint schon deswegen nicht ganz zu genügen, wail dann kein Grund erhellte, warum das Echo erst nach so beträchtlicher Zeit erfolge. Ueberdies zeigen die Gleichungen, daſs die Luft in irgend einem Punkte $S$ (Fig. 79.), nachdem die Schwingung $GH$ vorbeigegangen ist, nämlich wenn die Zeit $t = \frac{SG}{c}$ verflossen ist, s i c h v ö l l i g i n e b e n d e m Z u s t a n d e b e f i n d e, in welchem sie sich befinden würde, wenn die Röhre über $B$ hinaus unendlich fortginge; wenn aber dieses der Fall wäre, so würde keine Wiederholung des Schalles Statt finden, sondern die Luft bliebe in Ruhe; es kann also auch, wenn die Röhre sich in $B$ endigt, die zweite Schwingung nicht aus dem Zustande, in welchen die Luft in $S$ bei der ersten Schwingung versetzt wird, erklärt werden, sondern man muſs sich eine zweite, von $B$ zurückkehrende Schallwelle denken. — Ich erwähne dieses hier deswegen, weil einzelne Irrthümer in sonst vortreflichen Werken sich leicht weiter verbreiten, und oft von andern ungeprüft angenommen werden. B.

die Scalen *GmH*, *GnH* zwar einander gleich und ähnlich, lägen aber auf entgegengesetzten Seiten der Axe, so würden für die aus jener entspringenden zweiten Schwingung *gh* die Scalen zusammenfallen, und daher diese Schwingung nicht nach *A* zu fortgepflanzt werden, mithin in keinem Punkte der Röhre ein Wiederhall zu hören seyn. Dieses geben auch die Formeln an, welche zugleich zeigen, dafs es keinen Fall geben kann, wo weder der ursprüngliche Schall, noch seine Wiederholung in *A* gehört würde, denn wenn die Scalen *GmH* und *GnH* zusammenfallen, so können ihre Fortsetzungen *gMh*, *gNh* nicht zusammenfallen, weil *gMh* an der entgegengesetzten Seite der Axe liegt, *gNh* aber an eben der Seite der Axe, wo sich die gleichen Scalen *GmH*, *GnH* befanden.

438 *h*). Die Gleichungen für den fortgepflanzten Schall zeigen auch, dafs die Beschaffenheit des nach *A* fortgepflanzten Schalles anders sey, als desjenigen, welchen man in *S* oder *B* hört, weil das einemal *q* und *s* durch die Summe, das andremal durch die Differenz der Ordinaten *tm*, *tn* ausgedrückt werden, und dieses scheint beim ersten Anblicke der Erfahrung zu widersprechen, da man eine solche Verschiedenheit nicht bemerkt. Man mufs aber hiebei überlegen, dafs wohl bei jedem Schalle, den wir hören (wenigstens bei jedem Klange, wo wir einen bestimmten Ton hören), mehrere schnell auf einander folgende Schwingungen Statt finden, und dafs bei dieser oscillirenden Bewegung immer wechselsweise jene auf entgegengesetzte Weise gezeichneten Scalen die Natur der Schwingung ausdrücken; gesetzt also auch, dafs die eine Schwingung sich nach *B* zu stärker fortpflanzt, so wird für die zweite eben das nach der entgegengesetzten Richtung Statt finden, und dieser Unterschied wird unserm Ohre nicht merklich seyn, da wir ja auch die einzelnen Schläge oder Schallwellen nicht empfinden. Wären die Schläge so beschaffen, dafs immer nur einer um den andern sich nach einer Gegend hin fortpflanzte, so würde der Ton,

welchen man hörte, um eine Octave tiefer seyn, als er nach der Anzahl der Schwingungen des klingenden Körpers seyn sollte: es läſst sich aber gar nicht entscheiden, ob überhaupt solche Schwingungen wirklich vorkommen, wo dieses Statt fände.

438 i). Problem 90. Wenn die überall gleich weite Röhre *AABB* (Fig. 82.) an beiden Enden offen ist, zu bestimmen, wie sich eine in *t* erregte Schwingung in der Röhre fortpflanzt.

Auflösung. Obgleich die Schwingung immer, wie wir bisher angenommen haben, einige Ausdehnung nach der Länge der Röhre haben muſs, so ist es doch hier hinlänglich, sie so zu betrachten, als ob blos der einzige Punkt *t* in schwingende Bewegung gesetzt wäre, denn aus dem Vorigen erhellet deutlich genug der Einfluſs, welchen die Länge der Schallwelle haben kann. Es sey also in dem einzigen Punkte *t* eine Schwingung hervorgebracht, bei welcher die Dichtigkeit $= Q$, die Geschwindigkeit $= \Upsilon$ war: die natürliche Dichtigkeit sey $= B$. Man nehme nun $tm = \log. \frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ und $tn = \frac{\Upsilon}{c}$, für alle andern Punkte der Röhre aber die Ordinaten der Scalen $= 0$. Die Axe $AB$ sey nach beiden Seiten unendlich verlängert, so wird, wenn man die Entfernungen $BA'$, $A'B''$ etc. und $AB'$, $B'A''$ etc. der Länge der Röhre gleich nimmt, die Fortsetzung der Scalen auf folgende Weise bewerkstelliget werden. Man nehme die Abscisse $BT = Bt$, und, weil die Röhre in $B$ offen ist, $TN = tn$ oberhalb, $TM = tm$ unterhalb der Axe; eben so wird für $AT' = At$, weil auch in $A$ die Röhre offen ist, $T'N' = tn$ oberhalb, $T'M' = tm$ unterhalb gezeichnet. Betrachtet man nun $TM'N'$ als Theil der Scalen, welche über $B$ hinaus fortgesetzt werden sollen, so muſs man $Bt' = BT'$ nehmen, $t'n' = T'N' = tn$ oberhalb der Axe zeichnen, und auch $t'm' = T'M' = tm$ oberhalb der Axe, weil sie die entgegengesetzte Lage in Vergleichung mit $T'M'$ erhalten muſs. — Wenn man so

die Scalen nach beiden Enden ins Unendliche fortführt, so kommen die Ordinaten $TN$, $tn$ alle oberhalb der Axe zu liegen, $TM$, $tm$ aber wechselsweise über und unter derselben, und immer werden die Entfernungen auf der Axe $A''t'' = AT' = At$ und $BT = B''t' = Bt$ seyn.

Diese Fortsetzung der Scalen zeigt, daſs in jedem Punkte $S$ der Röhre nach und nach mehrere, ja unzählig viele Schwingungen entstehen. Zuerst nämlich wird die ursprüngliche Schwingung $tmn$ bis in $S$ fortgepflanzt, wenn die Zeit $t = \frac{St}{c}$ verflossen ist; am Ende der Zeit $t = \frac{ST}{c}$ kommt die zweite Schwingung $TMN$ daselbst an, und abermals entsteht wegen $T'M'N'$ eine neue Schwingung, wenn

$$t = \frac{ST'}{c} = \frac{At + AS}{c}$$

ist, und so entstehen unzählige Schwingungen, deren Beschaffenheit die folgende Tabelle vollständiger zeigt:

| Verflossene Zeit seit dem Anfange. | Dichtigkeit, und Geschwindigkeit nach der Richtung $AB$, welche alsdann in $S$ Statt finden. | |
|---|---|---|
| $\frac{St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{2Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{2At + St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{2At + 2Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{2At + 2Bt + St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{2At + 4Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{4At + 2Bt + St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{4At + 4Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| etc. | etc. | etc. |

438 k). Die Schwingungen also, welche in $S$ entstehen, sind in Rücksicht ihrer Natur vierfach, und wechseln regulär und nach einerlei Folge mit einander ab, so daſs die fünfte der ersten, die sechste der zweiten gleich ist u. s. w. Die Zeit, welche zwischen diesen gleichen Schwingungen verflieſst, oder welche verflieſst, während überhaupt vier Schwingungen geschehen, ist immer gleich groſs $= \frac{2AB}{c}$; die Zeiträume zwischen den einzelnen Schwingungen aber sind nur dann gleich, wenn $Bt = At$, und zugleich $St = \frac{1}{2}Bt$ ist.

439. Da die Zeit, in welcher vier Schwingungen Statt finden, $= \frac{2AB}{c}$ ist, so erfolgen in einer Secunde $\frac{2c}{AB}$ Schwingungen, oder die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde ist so groſs, so vielmal die halbe Länge der Röhre in $c$ enthalten ist, in dem Raume, welchen der Schall in einer Secunde durchläuft. Wenn diese Schwingungen stark genug sind, so werden sie einen Ton hervorbringen, welchen man also hier als aus einer einzigen ursprünglichen Schwingung entspringend betrachten muſs.

440. Würde die anfängliche Schwingung in der Oeffnung $BB$ selbst hervorgebracht, und es befände sich auch das Ohr eben daselbst, so würde $St = Bt = 0$ seyn, und $At = AB$, und jetzt würden immer zwei Schwingungen zusammentreffen, und die Vibrationen in Zeiträumen $= \frac{2AB}{c}$ auf einander folgen.

441. Wäre $AB$ sehr lang, so würde man diese Wiederholungen desselben Schalles von einander unterscheiden, z. B. bei einer Länge von 500 Fuſs, wenn die anfängliche Schwingung in $B$ erregt wird, und auch das Ohr sich da befindet, würden die Wiederholungen immer nach einer Secunde auf einander folgen.

So läſst sich also die Entstehung eines mehrmals wiederholten Echo erklären, ohne daſs man eine Zurückwerfung des Schalles anzunehmen braucht. — Daſs die Rechnung alle Wiederholungen gleich stark angibt, darf uns nicht befremden, da dieses den angenommenen Bedingungen, die in wirklichen Fällen nicht genau Statt finden, ganz gemäſs ist. Auch die Resonanz muſs man wohl vorzüglich hieraus erklären, obgleich auch die Beschaffenheit der Wände der Röhre, sofern die Luft ihnen selbst eine schwingende Bewegung mittheilen kann, hiezu mit beiträgt.

Wäre die Röhre an beiden Enden verschlossen, so würden ganz ähnliche Wiederholungen erfolgen, denn die Fortsetzung der Scalen fällt alsdann ganz ähnlich aus, blos mit dem Unterschiede, daſs die Scalen der Dichtigkeit immer an dieselbe, die Scalen der Geschwindigkeit abwechselnd an verschiedene Seiten der Axe fallen. Die Betrachtung dieses Falles bietet also weiter nichts merkwürdiges dar, indeſs sieht man, daſs die Echo in geschlossenen Hallen hiedurch können erklärt werden. Auch die Töne der Pauke möchten vielleicht zum Theil hier ihre Erklärung finden, denn obgleich die Membranen und die Wände der Pauke den Ton mit bestimmen, so scheint doch auch die eingeschlossene Luft wohl mit zur Bestimmung der wiederholten Schwingungen beizutragen.

442. Problem 91. Es sey die überall gleich weite Röhre *AABB* (Fig. 83.) an einem Ende in *AA* offen, am andern in *BB* verschlossen: man soll die Fortpflanzung einer in derselben in *t* erregten Schwingung bestimmen.

Auflösung. Es sey in *t*, wo die Luft in Schwingung gesetzt ist, im anfänglichen Zustande die Dichtigkeit $= Q$, die Geschwindigkeit $= \Upsilon$ nach der Richtung *AB*; die natürliche Dichtigkeit sey $= B$, und man nehme $tm = \log. \frac{Q}{B}$, $tn = \frac{\Upsilon}{c}$; diese Punkte *m*, *n* sind die ein-

zigen, wo die Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit nicht mit der Axe zusammenfallen. Nimmt man nun auf der Verlängerung der Axe $BT = Bt$, so fällt, weil die Röhre in $BB$ verschlossen ist, $TM = tm$ oberhalb, aber $TN = tn$ unterhalb der Axe. Für den Punkt $T'$ hingegen erhält man, wenn $AT' = At$ ist, die Ordinaten $T'N' = tn$ oberhalb, $T'M' = tm$ unterhalb der Axe, weil in $AA$ die Röhre offen ist. Es sey nun ferner $At'' = AT$, so wird in $t''$ die Ordinate $t''m'' = - TM = - tm$ und $t''n'' = + TN = - tn$, also kommen beide unterwärts zu liegen; hingegen, wenn man weiter über $B$ hinausgeht und $Bt' = BT'$ nimmt, so wird $t'm' = - T'M' = - tm$ und $t'n' = - T'N' = - tn$ und so ferner.

Wir wollen jetzt sehen, was für Schwingungen im Punkte $S$ entstehen: offenbar kommen in $S$ wieder unzählige Schwingungen vor, deren Beschaffenheit die folgende Tabelle zeigt.

| Verflossene Zeit seit dem Anfange. | Dichtigkeit, und Geschwindigkeit nach der Richtung $AB$, welche alsdann in dem Punkte $S$ Statt finden. | |
|---|---|---|
| $\frac{St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tm + tn)$ |
| $\frac{2Bt - St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tm + \frac{1}{2}tn)$ | $- \frac{1}{2}c\,(tm + tn)$ |
| $\frac{2At + St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{2At + 2Bt - St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $- \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{2At + 2Bt + St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $- \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{2At + 4Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| $\frac{4At + 2Bt + St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $- \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{4At + 4Bt - St}{c}$ | $B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn - tm)$ |
| $\frac{4At + 4Bt + St}{c}$ | $B(1 + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ | $+ \frac{1}{2}c\,(tn + tm)$ |
| etc. | etc. | etc. |

In diesem Falle gibt es also eine gröfsere Verschiedenheit in den Schwingungen, welche in einem bestimmten Punkte $S$ Statt finden, und erst nach acht Schwingungen kommt wieder eine von derselben Beschaffenheit. Die Zeiträume, welche zwischen den Schwingungen verfliefsen, befolgen eben das Gesetz, wie im vorigen Probleme.

443. Wenn $St = 0$ und $At = 0$, also der Schall in der Oefnung $A$ erregt wird, und auch das Ohr sich da befindet, so wird die Ordnung und Beschaffenheit der Schwingungen, welche man in $A$ hört, folgende seyn:

| am Ende der Zeit | ist Dichtigkeit | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| $\frac{2AB}{c}$ | $B$ | $-c.tn$ |
| $\frac{4AB}{c}$ | $B$ | $+c.tn$ |
| $\frac{6AB}{c}$ | $B$ | $-c.tn$ |

Die Dichtigkeit leidet hier gar keine Aenderung, und die Geschwindigkeit wird daher blos durch die anfangs ertheilte Geschwindigkeit ausgedrückt.

444. Würde hingegen in $BB$ ein Schall erregt, und das Ohr befände sich eben da, so hätte man $St = 0$, $At = AB$, $Bt = 0$, so würde hier die Geschwindigkeit immer $= 0$ bleiben, die Dichtigkeit aber abwechselnd $= B(1 - tm)$ und $= B(1 + tm)$ werden, und der Zeitraum, welcher zwischen den Schwingungen verfliefst, $= \frac{2AB}{c}$ seyn. In diesen beiden Fällen vereinigen sich vier Schwingungen, daher auch diese vereinigten Schwingungen anders beschaffen sind, als die einfachen.

445. Die bisher vorgetragenen Lehren von der Fortpflanzung der Schwingungen können den Naturforschern Veranlassung zu genauern Untersuchungen über die Natur des Schalles und des Gehörs geben.

Ein besonders wichtiger Umstand hiebei ist, daſs für die fortgepflanzten Schwingungen, wenn sie nach der Richtung *AB* (Fig. 84.) fortgehen, die Dichtigkeiten und Geschwindigkeiten sich durch eine einzige Scale, wie *XZY*, darstellen lassen, wenn auch für die anfängliche Schwingung die Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit sehr verschieden waren. Dieses gilt indeſs nur von den einfachen, nicht von den vermischten Schwingungen, welche aus mehrern einfachen, so wie wir in den beiden letzten Problemen gesehen haben, entspringen, wenn mehrere einfache Schwingungen aus verschiedenen Gegenden in demselben Punkte zusammentreffen.

Die Beschaffenheit dieser Scale *XZY* gibt die Eigenschaften des Schalles, sofern man nämlich ihn nicht als Ton nach der Folge der Schwingungen, sondern als einzelne Schwingung betrachtet, an, und man müſste vermuthlich hieraus ableiten können, wie die Gehörorgane dadurch gerührt werden.

446. In der Figur habe ich die ganze Scale *XZY* oberhalb der Axe gezeichnet: dieses ist richtig, wenn in dem ganzen Raume *YX* die Dichtigkeit gröſser, als die beim Gleichgewichte Statt findende ist, und alle Lufttheilchen sich nach *B* zu bewegen. In diesem Falle wird am Ende der Schwingung das Theilchen *Y* so nach *y* fortgerückt seyn, daſs der Raum *Yy* der Fläche *XZY* gleich (oder proportional, vergl. §. 404.) ist: so weit ist also die ganze Luftmasse am Ende der Schwingung fortgerückt. Soll ein solches Fortrücken der Theilchen nicht erfolgen, sondern jedes Theilchen zu der Stelle zurückkehren, wo es sich anfangs befand, so muſs die Scale *XZY* (Fig. 85.), welche Dichtigkeit und Geschwindigkeit für die fortgepflanzte Schwingung ausdrückt, theils über, theils unter der Axe liegen, und der negative Theil der Fläche *YZO* muſs dem positiven *XZO* gleich seyn. Liegt hier der vorangehende Theil oberhalb der Axe, so gelangen zuerst Lufttheilchen an das Ohr, deren Dichtigkeit die natür-

liche übertrift, und die nach *B* zu fortrücken; alsdann aber gelangen Lufttheilchen von geringerer Dichtigkeit an das Ohr, und die Bewegung derselben geht nach der entgegengesetzten Richtung.

Gewifs bringt es hier wesentliche Verschiedenheiten des Klanges hervor, wenn der vorangehende Theil der Curve oberhalb oder unterhalb der Axe liegt, oder wenn die Curve die Axe mehrmals schneidet u. s. w.

Diese Betrachtungen beschränken sich nicht blos auf die Bewegung in gleich weiten Röhren, sondern wir werden in der Folge sehen, dafs man sie auch auf Röhren von ungleicher Weite anwenden kann.

---

## Dritter Abschnitt.

### *Von den Oscillationen der Luft in gleich weiten Röhren; zur Erklärung der Flötentöne.*

---

447. Problem 92. Wenn *AABB* (Fig. 86.) eine an beiden Enden ofne Röhre ist, in welcher auf irgend eine Weise das Gleichgewicht der Luft gestört worden, die oscillirende Bewegung zu bestimmen, welche die Luft in der Röhre nachher annehmen wird.

Auflösung. Es sey im anfänglichen Zustande für irgend einen Punkt *S* der Röhre die Dichtigkeit $= \varrho$, die Geschwindigkeit $= \Upsilon$, und die Scalen der Dichtigkeit $A\varrho B$, und der Geschwindigkeit $EYF$ nach der schon oft erwähnten Regel gezeichnet, dafs die Ordinaten der ersten $S\varrho = \log \frac{\varrho}{B}$, die der letzten $SY = \frac{\Upsilon}{c}$ sind, wenn *B* die

beim Gleichgewichte Statt findende Dichtigkeit ist, und $c$ der Raum, welchen der Schall in einer Secunde in der Luft (nämlich in Luft von eben der Elasticität, wie die in der Röhre enthaltene ist) durchläuft. — Weil die Röhre in $A$ und in $B$ offen ist, so muſs nothwendig (§. 407.) die Scale der Dichtigkeiten in beiden Endpunkten mit der Axe zusammenfallen, wie $AQB$, und man findet die Fortsetzung der Scalen nach den oben gelehrten Regeln. Man verlängere nämlich die Axe, und nehme die Entfernungen $BA' = A'B' = AB'' = B''A'$ etc. der Länge der Röhre gleich, so wird man über diesen Theilen der Axe die Scale der Dichtigkeit abwechselnd oberhalb und unterhalb der Axe, die Scale der Geschwindigkeit hingegen immer an derselben Seite der Axe wiederholen müssen, nach der Ordnung, welche die Figur zeigt, indem man die Scalen $EF$ und $AQB$ wechselsweise einmal in umgekehrter, das zweitemal in derselben Lage zeichnet, welche sie für $AB$ hatten.

Um nun den Zustand der Luft, welche sich anfangs in $S$ befand, am Ende einer gewissen Zeit $= t$ zu bestimmen, nimmt man auf der Abscissenlinie nach beiden Seiten von $S$ die Entfernungen $ST = St = ct$, und zieht in $T$ und $t$ die Ordinaten der Scalen, so ist in diesem Augenblicke des Theilchens $S$ Dichtigkeit

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm),$$

und die Geschwindigkeit nach der Richtung $SB$

$$x = \tfrac{1}{2}c(TN - TM + tn + tm),$$

und der Raum, um welchen es gegen $B$ zu fortgerückt ist,

$$= \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm,$$

welcher Raum also, wenn die Scale der Geschwindigkeit ganz oberhalb der Axe liegt, immerfort wächst: dieses geschieht, wenn die Luft beständig durch die Röhre durchflieſst, und immer neue Luft an die Stelle der herausgetretenen kommt, deren Zustand aus den Formeln für $q$ und $x$ bestimmt wird.

Wenn die Zeit $t = \frac{2AB}{c}$ verflossen ist, also $t \cdot c = 2AB$ wird, so fallen die Punkte $T$, $t$ mit $s$, $s'$ zusammen, welche dem Punkte $S$ analog sind, und es wird nun $q = Q$,

$$x = c \cdot SY = \Upsilon,$$

in diesem Augenblicke kommt also das Theilchen $S$ und die ganze in der Röhre enthaltene Luftmasse wieder in eben den Zustand, in welchem sie sich anfänglich befand, und die Luft hat jetzt zwei Oscillationen vollendet. Die Zeit einer Oscillation ist also $= \frac{AB}{c}$, denn offenbar ist die Zeit für alle gleich grofs, weil immer, wenn man $t \cdot c = 2AB$, oder $= 4AB$, oder $= 6AB$ etc. nimmt, $q = Q$ und $x = \Upsilon$ wird: folglich geschehen in einer Secunde so viele Oscillationen, als die Zahl $\frac{c}{AB}$ angibt, und diese Anzahl der Schwingungen bestimmt den Ton, welchen diese Röhre gibt.

448. Wenn also die Länge einer solchen, an beiden Enden offenen Röhre $= l$ ist, so wird die in derselben enthaltene Luft, wenn einmal das Gleichgewicht gestört ist, eine oscillirende Bewegung annehmen, und in einer Secunde so viele Oscillationen machen, so vielmal die Länge $l$ der Röhre in dem Raume $c$, welchen der Schall in einer Secunde durchläuft, enthalten ist. Da nun $c$ sich auf Luft von eben der Art, wie die in der Röhre enthaltene beziehet, und (wie oben erwähnt ist) der Schall sich schneller fortpflanzt in Luft, deren specifische Elasticität gröfser ist (das heifst in Luft, welche bei gleicher Dichtigkeit einen gröfsern Druck ausübt), so wird auch die Anzahl der Oscillationen in einer Secunde in derselben Röhre desto gröfser, und der Ton, den die Röhre gibt, desto höher seyn, je gröfser die specifische Elasticität der darin enthaltenen Luft ist.

Für die atmosphärische Luft ist $c$ nicht viel von 1000 Fufs verschieden, in einer Röhre von 1 Fufs lang würden

daher hier 1000 Schwingungen in einer Secunde erfolgen; in einer 8 Fuſs langen Röhre aber 125 Schwingungen, welche Zahl dem in der Musik mit *C* bezeichneten Tone entspricht.

449. Wie also auch die anfängliche Störung des Gleichgewichts beschaffen seyn mag, so wird allemal eine solche oscillirende Bewegung entstehen. Indeſs ist es möglich, daſs die Anzahl der Schwingungen doppelt oder dreimal, oder überhaupt $n$ mal so groſs werde, als eben bestimmt ist, und $n$ kann hier jede ganze Zahl bedeuten. Diese Vermehrung der Oscillationen hängt von der Beschaffenheit der anfänglichen Schwingung ab: denn, wenn die Scalen $EYF$, $AQB$ eine solche Gestalt hätten, daſs sie den durch den doppelten Raum $AA'$, oder den durch den dreifachen Raum $AB'$ u. s. w. fortgesetzten Scalen ähnlich wären, so wird die oscillirende Bewegung sich eben so verhalten, als wenn die Röhre $AB$ nur die Hälfte oder ein Drittheil u. s. w. der Länge hätte; es werden daher zweimal, dreimal u. s. w. so viel Schwingungen entstehen, als die vorhin gefundene Zahl $\frac{c}{AB} = \frac{c}{l}$ ausdrückt, und mithin ist es möglich, vermittelst derselben Röhre Töne hervorzubringen, wobei die Anzahl der Schwingungen sich wie 1, 2, 3, 4 etc. verhält. Da aber diese höhern Töne eine besondre Beschaffenheit der anfänglichen Schwingung voraussetzen, so muſs man sie als untergeordnete betrachten, und nennt daher denjenigen den Grundton, bei welchem die Anzahl der Schwingungen $= \frac{c}{l}$ in einer Secunde ist; bei den untergeordneten ist sie $= \frac{2c}{l}$ oder $\frac{3c}{l}$, $\frac{4c}{l}$ etc.

450. Dieses Resultat stimmt vortreflich mit dem überein, was bei den Flöten wirklich Statt findet, und es

leidet daher keinen Zweifel, daſs die Töne der Flöte nach dieser Theorie erklärt werden müssen. — Beim Blasen der Flöte wird die Luft aus ihrem Gleichgewichte gebracht, und es muſs daher eine solche oscillirende Bewegung, und mithin ein Ton entstehen, so wie wir es hier bestimmt haben. Die Erfahrung stimmt auch hiemit überein, indem nicht blos der Grundton, welchen eine Flöte gibt, so gefunden wird, wie die Theorie ihn angibt, sondern man auch jene untergeordneten Töne (die obere Octave, die Octave der Quinte etc.) auf derselben Flöte bei gehörigem Anblasen erhalten kann *).

451. Bei dem Blasen der Flöte wird die in oscillirende Bewegung gesetzte Luft immer aus der Röhre fortgetrieben, und dadurch die Fortpflanzung des Schalles in der äuſsern Luft erleichtert: da dieses nicht mehr Statt findet, sobald man zu blasen aufhört, so lieſse es sich daraus wohl erklären, warum alsdann sogleich kein Klang mehr gehört wird. Indeſs scheint doch das der Theorie nicht angemessen, daſs man von den oscillirenden Bewegungen, welche in der Röhre der Theorie zu Folge noch lange fortdauern sollten, nichts bemerkt, und auch die vielfachen Wiederholungen nicht hört, wovon im vorigen Abschnitte die Rede war. Es läſst sich aber leicht einsehen, daſs auſser andern Hindernissen der Bewegung hiezu vorzüglich die Beschaffenheit der Röhre mit beitragen mag; denn wenn diese auch von der festesten Materie ist, so wird sie doch den Schwingungen der Röhre leicht etwas nachgeben, und dann

---

*) Vergleichungen der Theorie mit den Tönen, welche eine zu musikalischem Gebrauch bestimmte Flöte gab, stellte L a m b e r t an. Seine Observations sur les flûtes in den Mém. de l'acad. de Berlin scheinen mir (so weit ich hierüber urtheilen kann) ein sehr schätzbarer Beitrag zu Vervollkommnung dieser Lehre zu seyn.

Von nicht so groſsem Werthe sind seine Bemerkungen über die G e s c h w i n d i g k e i t des Schalles in den Mém. de l'acad. de Berlin 1768. B.

müssen die Oscillationen allerdings aufhören, obgleich die Theorie, welche hierauf nicht Rücksicht nimmt, eine unendliche Fortdauer der Oscillationen angibt. Man bemerkt auch, dafs die Abweichung von der Theorie geringer ist, wenn die Röhre aus einer härtern Materie besteht.

452. Problem 93. Wenn die Röhre an einem Ende *AA*, (Fig. 87.) offen, am andern in *BB* geschlossen ist, und die in derselben enthaltene Luft auf irgend eine Weise in Schwingung gesetzt wird, die oscillirende Bewegung zu bestimmen, welche die Luft in der Röhre nachher annimmt.

Auflösung. Man zeichne für den anfänglichen Zustand die Scale der Dichtigkeit *AQD*, und die Scale der Geschwindigkeit *EYB* nach den schon oft angeführten Regeln, so wird hier, weil die Röhre in *AA* offen ist, die Dichtigkeitsscale in *A* mit der Axe zusammenfallen; hingegen wird die Scale der Geschwindigkeiten die Axe in *B* treffen, wo die Röhre geschlossen ist. Die Fortsetzung der Scalen wird hier so eingerichtet, dafs *BD* ein Durchmesser der Scale der Dichtigkeiten, und *AE* ein Durchmesser der Scalen der Geschwindigkeiten werde: nimmt man also auf der Axe die Entfernungen $BA'$, $A'B'$ und $AB''$, $A''B''$ der Länge der Röhre *AB* gleich, so mufs die Scale der Dichtigkeiten in $A'$ die Axe so durchschneiden, dafs die Bogen $A'D$ und $A'D'$ gleich und ähnlich werden, aber an verschiedenen Seiten der Axe liegen: eben dies gilt von den Punkten $A$, $A''$, $A'''$, und alle Linien $B'D'$, $B''D''$ werden wieder Durchmesser, die Punkte $A$, $A'$, $A''$ aber sind Mittelpunkte dieser Bogen. Die Scale der Geschwindigkeiten wird so wiederholt, dafs $B$, $B'$, $B''$ Mittelpunkte, und $AE$, $A'E'$, $A''E''$ Durchmesser ähnlicher Aeste werden.

Es sey nun seit dem Augenblicke, da das Gleichgewicht in der Röhre gestört ward, die Zeit $= t$ verflossen, so mufs man, um den alsdann Statt findenden Zustand der Luft zu bestimmen, auf der Axe die Entfernungen

$St = ST = c \,.\, t$ nehmen, und der Zustand des Lufttheilchens, welches anfangs in $S$ war, wird nun so bestimmt, daſs dessen Dichtigkeit jetzt

$$q = Q\,(1 - SQ + \tfrac{1}{2}\,TN - \tfrac{1}{2}\,TM - \tfrac{1}{2}\,tn - \tfrac{1}{2}\,tm),$$

die Geschwindigkeit $x = \tfrac{1}{2}c\,(-TN + TM - tn - tm)$ nach der Richtung $AB$ sey, und dieses Theilchen um den Raum $Ss = \tfrac{1}{2}\,TNtn - \tfrac{1}{2}\,SQTM + \tfrac{1}{2}\,SQtm$ fortgerückt sey, wo man in dem letztern Ausdrucke die unterhalb der Axe liegenden Flächen als negativ betrachten muſs.

Wir wollen jetzt annehmen, die verflossene Zeit sey $t = \frac{2\,AB}{c}$, so ist offenbar die Lage der Punkte $T$, $t$ der Lage von $S$ analog, und es ist $TM = tm = SQ$ und $TN = tn = SY$, daher wird nach Verlauf dieser Zeit des Theilchens $S$ Dichtigkeit $q = Q\,(1 - 2\,SQ)$ und Geschwindigkeit $x = -c\,.\,SY = -\Upsilon$, wenn $\Upsilon$ die anfängliche Geschwindigkeit ist.

War also anfangs die Dichtigkeit $Q = B + O$ etwas gröſser, als die dem Gleichgewichte angemessene, so ist $SQ = \log.\frac{Q}{B} = \frac{Q - B}{B} = \frac{O}{B}$, daher jetzt $q = B - O$, eben so viel kleiner als $B$, als die anfängliche Dichtigkeit gröſser war, und auch $x$ ist der anfänglichen Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt. Der Zustand am Ende dieser Zeit ist also der gerade entgegengesetzte desjenigen, welcher anfangs Statt fand, und man sieht hieraus, daſs jetzt eine Oscillation vollendet ist (oder auch 3, oder 5, oder 7, oder $2n + 1$ Oscillationen), und daſs erst nach der doppelten Zeit der anfängliche Zustand wieder hergestellt wird. Die Zeit einer Oscillation ist also $= \frac{2\,AB}{c}$, oder es werden $\frac{c}{2\,AB}$ Oscillationen in einer Secunde vollendet, wodurch zugleich der Ton bestimmt ist, den diese Röhre gibt.

Der Raum $Ss$, um welchen das Theilchen $S$ fortgerückt ist, wird aus folgendem bestimmt: es ist jetzt

$$TNtn = \left\{ \begin{matrix} -AEYS - ABE + BSY \\ +AEYS + ABE - BSY \end{matrix} \right\} = o,$$

$$SQTM = SQDB + ADB - ASQ,$$

$$SQtm = ASQ - ADB - SQDB = - SQTM,$$

also $Ss = SQTM$.

453. Wenn also die Röhre an einem Ende geschlossen ist, so dauert jede Schwingung doppelt so lange, als bei offenen Röhren, oder die Anzahl der Schwingungen in gleicher Zeit ist nur halb so groſs. Der Ton, welchen die an einem Ende geschlossene Röhre gibt, ist daher um eine Octave tiefer, als wenn dieselbe Röhre offen wäre: — wenn man nämlich den Grundton für beide Röhren, oder den tiefsten, den sie geben können, versteht.

Die Anzahl der Schwingungen steht hier wieder im umgekehrten Verhältnisse der Länge, und man kann daher den Ton bestimmen, welchen irgend eine Röhre geben wird, wenn der Ton für eine gewisse Länge bekannt ist. — Eine Röhre von 4 Fuſs würde ungefähr den Ton $C$ geben.

455. Da die Auflösung des Problems blos angab, daſs am Ende der Zeit $= \frac{2AB}{c}$ der Zustand der Luft gerade der entgegengesetzte des anfänglichen Zustandes war, so lieſse sich schon hieraus schliesſen, daſs in dieser Zeit auch 3 oder 5, oder jede ungerade Anzahl von Oscillationen vollendet seyn könnten, aber keine gerade Anzahl von Oscillationen. Dieses läſst sich auch aus Betrachtung der Scalen beweisen. Es ist nämlich unmöglich, die Scalen der anfänglichen Schwingung so einzurichten, daſs doppelt so viele Oscillationen in derselben Zeit geschähen, wie dieses bei den an beiden Enden offenen Röhren der Fall war. Denn wenn wir hier, mit Beibehaltung derselben Scalen, die Röhre als doppelt so lang betrachten, $= AA$,

und sie in $A'$ geschlossen annehmen, so paſst die Gestalt der Geschwindigkeitsscale nicht mehr, denn diese müſste in $A'$ die Axe treffen: und eben dieser Mangel an Uebereinstimmung würde eintreffen, wenn man die Röhre viermal, sechsmal u. s. w. so lang annähme. Diese Röhre kann also keine Töne angeben, die sich zum Grundtone wie 2, 4, 6 oder $2n$ verhalten (das heiſst, nicht die Octaven des Grundtons, noch auch die doppelte Octave der Quinte etc.). Nimmt man hingegen die Röhre dreimal länger $= AB'$ an, und betrachtet sie als in $A$ offen, in $B'$ geschlossen, so entspricht die Gestalt der Scalen diesen Voraussetzungen sehr gut, und es erhellt hieraus, daſs die anfängliche Schwingung so beschaffen seyn könne, daſs die Oscillationszeit mit der für eine dreimal so kurze Röhre passenden übereinstimme. — Denn in der Röhre $AB'$ ist, wenn die Scalen so bleiben, wie sie gezeichnet sind, eine Oscillation vollendet, wenn $t = \frac{2AB}{c}$ oder $t = \frac{2}{3}\frac{AB'}{c}$ ist, da doch für den Grundton dieser Röhre die Zeit der Oscillation $= \frac{2AB'}{c}$ ist. — Eben das gilt, wenn in der Röhre 5, 7 oder $2n+1$ Wiederholungen derselben Scale vorkommen. Eine solche Röhre gibt also auſser dem Grundtone $= \frac{c}{2AB}$ auch noch die Töne $= \frac{3c}{2AB}, \frac{5c}{2AB}$ etc., das ist, die Octave der Quinte, die doppelte Octave der Terze etc.

456. Auch diese Folgerungen werden von der Erfahrung aufs vollkommenste bestätigt: denn man findet den Grundton der an einem Ende geschlossenen Pfeifen um eine Octave tiefer, als bei gleich langen offenen Pfeifen, und es ist auch bekannt, daſs wenn sie auf eine gewisse Weise geblasen werden, wohl die Töne hervorgebracht werden können, welche sich zum Grundtone wie 3, 5, 7 etc. verhalten, aber nie die Octaven dieser Töne.

Bei diesen Röhren fliefst die Luft ein, und wird wieder herausgetrieben, wobei sich dann die oscillirende Bewegung der äufsern Luft leichter mittheilt, und sich fortpflanzt: durch diesen Umstand unterscheiden sich die Schwingungen von den bei ofnen Röhren Statt findenden, und es veranlafst dieses ohne Zweifel eine Verschiedenheit des Klanges.

Auch von der Materie, woraus die Flöten verfertigt sind, hängt ihr Klang ab, und man bemerkt diese Verschiedenheit sehr deutlich. Aber dieses ändert den Ton, nämlich die Höhe oder Tiefe des Tones nicht, sondern dieser hängt blos von der Länge ab, wofern nur die Weite der Röhre überall gleich ist.

457. Problem 94. Wenn die Röhre zwar abermals überall gleich weit, aber an beiden Enden in $AA$, $BB$ (Fig. 88.) geschlossen ist, und das Gleichgewicht der Luft gestört wird, die entstehende oscillirende Bewegung der Luft zu bestimmen.

Auflösung. Man zeichne nach der bekannten Regel die Scalen der Dichtigkeit $CQD$, und der Geschwindigkeit $AYB$, und erinnere sich, dafs die letztere hier nothwendig sowohl in $A$, als in $B$ die Axe treffen mufs, und setze diese Scalen über beide Enden der Röhre hinaus so fort, wie die Figur zeigt. — Um nun den Zustand der Luft, welche sich anfangs in $S$ befand, am Ende der Zeit $= t$ zu bestimmen, nehme man $ST = St = c.t$, so wird jetzt desselben Theilchens Dichtigkeit

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm),$$

die Geschwindigkeit $u = \tfrac{1}{2}c(TN - TM + tn + tm)$,
und das Theilchen ist um den Raum

$$S\sigma = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm$$

nach $B$ zu fortgerückt.

Es sey nun die Zeit $t = \dfrac{2AB}{c}$ verflossen, so fallen die Punkte $T$, $t$ in $s$, $s'$, deren Lage der Lage des Punktes $S$

ähnlich ist, und es wird nun für das Theilchen $S$,

$$q = \varrho(1 - S\varrho - \tfrac{1}{2}SY + \tfrac{1}{2}S\varrho + \tfrac{1}{2}SY + \tfrac{1}{2}S\varrho) = \varrho,$$

$$s = \tfrac{1}{2}c(SY - S\varrho + SY + S\varrho) = c \,.\, SY = \Upsilon,$$

und der Raum $S\sigma = 0$; die Luft befindet sich also in jedem Punkte wieder in eben dem Zustande, welcher bei der ersten Störung des Gleichgewichts Statt fand: hingegen würde man für $t = \frac{AB}{c}$ den entgegengesetzten Zustand gefunden haben. Die Luft hat also zwei Oscillationen vollendet, wenn $t = \frac{2AB}{c}$ ist, und es geschehen folglich in einer Secunde so viel Oscillationen, als die Zahl $\frac{c}{AB}$ anzeigt, wodurch der hervorgebrachte Ton bestimmt wird.

458. Wäre die Röhre doppelt so lang $= AA'$, so könnte die anfängliche Schwingung so beschaffen seyn, dafs sie durch die Scalen $CDC$ und $AYByA'$ ausgedrückt würde: in diesem Falle bliebe die Zeit einer Oscillation $= \frac{AB}{c}$, obgleich für den Grundton dieser doppelt so langen Röhre die Oscillationszeit $= \frac{2AB}{c} = \frac{AA'}{c}$ ist. Eben dies kann Statt finden, wenn man die Röhre drei oder viermal so lang nimmt. — Also können auch diese Röhren aufser dem Grundtone bei gewisser Beschaffenheit der anfänglichen Schwingung diejenigen Töne geben, wobei die Schwingungen doppelt, dreimal, viermal etc. so schnell vollendet werden; und alles stimmt hier mit dem überein, was wir von Röhren, welche an beiden Enden offen sind, gefunden haben.

459. Es läfst sich hier keine Vergleichung mit der Erfahrung anstellen, weil es uns an Mitteln fehlt, in ganz verschlossenen Röhren Schwingungen hervorzubringen, oder wenigstens, wenn dieses auch möglich wäre, solche Schwingungen sich der äufsern Luft nicht mittheilen, und

folglich aufser der Röhre kein Schall gehört werden könnte. Denn darauf, dafs vielleicht die Wände der Röhre mit zittern, nehmen wir hier keine Rücksicht, weil, wenn das der Fall wäre, die Oscillationen nicht mehr so ausfallen würden, wie die Rechnung angibt. Denn wenn die Wände der Röhre der Luft da, wo sie zusammengedrückt ist, nachgeben, so wird das anliegende Lufttheilchen weniger erschüttert, und die Bewegung wird daher in einer solchen Röhre (sie mag übrigens offen oder geschlossen seyn), bald aufhören, statt dafs die Theorie eine unendliche Fortdauer der Oscillationen angibt. Diese aus der Natur der Materie, woraus die Röhre verfertigt ist, entspringende Verminderung der Bewegung ändert aber die Zeit einer Oscillation nicht, und die Höhe oder Tiefe des Tones wird daher, bei ofnen Röhren, der Theorie gemäfs gefunden.

460. Obgleich aber, wie diese Theorie zeigt, der Ton, welchen eine Röhre von bekannter Länge angibt, völlig bestimmt ist, so kann doch der durch sie hervorgebrachte Schall oder Klang sehr mannigfaltig seyn, wenn die Schläge, welche anfangs die Luft in Schwingung setzen, eine verschiedene Beschaffenheit haben. Ueberlegt man die unendliche Verschiedenheit, die hier Statt finden kann, wenn bei den anfänglichen Schlägen oder Erschütterungen entweder blos die Dichtigkeit geändert, oder blos eine Bewegung ertheilt wird, oder beides mit einander verbunden ist, so scheint es fast auffallend, dafs der Klang der Flöte immer derselbe ist — nämlich immer sich auf bestimmte Weise von dem Klange eines andern Instruments unterscheidet. Man mufs dieses wohl daraus erklären, dafs bei dem Blasen, wodurch man die Flötentöne hervorbringt, keine so unendliche Mannigfaltigkeit in den Scalen der Dichtigkeit und Geschwindigkeit kann bewirkt werden, sondern diese Scalen allemal eine gewisse ähnliche Beschaffenheit haben, wodurch das Unterscheidende des Klanges der Flöte bestimmt wird. Es wäre daher möglich, dafs der Klang bei einer ganz verschlossenen

Röhre ganz anders beschaffen wäre, als bei einer ofnen, obgleich beide einerlei Ton angeben müssen, wenn sie gleich lang sind.

---

## Vierter Abschnitt.

### *Von den kleinen Schwingungen der Luft in Röhren, deren Weite nicht überall gleich ist.*

---

461. Problem 95. Wenn die Luft sich in einer Röhre, deren Querschnitte ungleich sind, auf irgend eine Weise bewegt, diese Bewegung auf analytische Formeln zu bringen, welche für jeden Zeitpunkt die Beschaffenheit derselben angeben.

Auflösung. Wir betrachten den anfänglichen Zustand der Luft als bekannt, und setzen für irgend einen Punkt $S$ (Fig. 70.) der Röhre, dessen Entfernung von einem bestimmten Anfangspunkte $A$ allgemein $AS = S$ ist, die anfängliche Dichtigkeit $= Q$, die Geschwindigkeit nach der Richtung $AB$, $= \Upsilon$, und den Querschnitt der Röhre an dieser Stelle $= \Omega$, so sind die Gröfsen $Q$, $\Upsilon$, $\Omega$ gegebene Functionen von $S$, und auch die Höhe $= Z$ dieses Punktes über einer gegebenen horizontalen Ebene ist durch $S$ bekannt: — diese Höhe kommt in Betrachtung, wenn wir auf den Einflufs der Schwere auf die Bewegung Rücksicht nehmen.

Nach Verlauf der Zeit $= t$ sey jenes Lufttheilchen nach $s$ gekommen, und es sey $As = s$, und hier der Querschnitt der Röhre $= \omega$, die Höhe dieses Punktes über der bestimmten horizontalen Ebene $= z$, so sind $z$ und $\omega$ bekannte Functionen von $s$, $s$ selbst aber eine Function von $S$ und $t$. In diesem Augenblicke sey in $s$, oder für das

Lufttheilchen, welches anfangs in $S$ war, die Dichtigkeit $= q$, die Geschwindigkeit $= \varkappa$ nach der Richtung $SB$, der Druck $= p$, welcher aus der Dichtigkeit so bestimmt wird, daſs $p = \frac{aq}{b}$ sey; so sind auch $q$, $\varkappa$ hier Functionen von $S$ und $t$. Wendet man nun die allgemeinen Lehren (§. 255.) hier an, so findet man folgende Gleichungen für die Bewegung.

$$q\omega \left(\frac{ds}{dS}\right) = Q\Omega \text{ und}$$

$$\frac{2gdp}{q} = \frac{2gadq}{bq} = -2gdz - ds\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right),$$

wo in der letzten die Zeit $t$ als beständig betrachtet wird, daher sie auch auf folgende Weise kann ausgedrückt werden:

$$\frac{2ga}{qb}\left(\frac{dq}{dS}\right) + 2g\left(\frac{dz}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0.$$

Die erste Gleichung gibt auch

$$\log. q\omega\left(\frac{ds}{dS}\right) = \log. Q\Omega,$$

$$\text{oder } \log. q = \log. Q + \log. \Omega - \log. \omega - \log. \left(\frac{ds}{dS}\right),$$

daher, wenn man blos $S$ als veränderlich ansieht,

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{QdS} + \frac{d\Omega}{\Omega dS} - \frac{1}{\omega}\left(\frac{d\omega}{dS}\right) - \frac{\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)};$$

substituirt man diesen Werth in die Gleichung für $q$, so erhält man

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dQ}{QdS} + \frac{d\Omega}{\Omega dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ga}{b\omega}\left(\frac{d\omega}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)$$
$$-\frac{2ga}{b}\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right) + 2g\left(\frac{dz}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0;$$

eine Gleichung, welche auſser $s$ keine unbekannte Function enthält, da man $z$ und $\omega$ durch $s$ ausdrücken kann, und alle

übrigen Gröſsen gegebne Functionen von $S$ sind. Wenn aus dieser Gleichung bestimmt ist, was für eine Function $s$ sey, so findet man leicht die übrigen zur Bestimmung der Bewegung nöthigen Gröſsen, da

$$u = \left(\frac{ds}{dt}\right), \quad q = \frac{\varrho\Omega}{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)} \text{ und } p = \frac{aq}{b} \text{ ist.}$$

462. Aus dieser allgemeinen Gleichung, welche alle Bewegungen der Luft, die in einer Röhre Statt finden können, umfaſst, müſste nun die Gröſse $s$ bestimmt werden; aber die Gleichung ist viel zu verwickelt, als daſs sich nach unsern jetzigen analytischen Kenntnissen dieses im Allgemeinen ausführen lieſse. Wir müssen uns daher auch hier begnügen, blos die sehr kleinen Bewegungen zu betrachten, welche bei der Entstehung und Fortpflanzung des Schalles vorkommen, und alle andern Fälle vorbei lassen. Ich will daher die allgemeine Gleichung auf diesen bestimmten Fall, wo nur unendlich kleine Schwingungen vorkommen, anwenden.

463. Problem 96. Wenn die in der ungleich weiten Röhre erregte Bewegung so beschaffen ist, daſs die Lufttheilchen ihre Lage gegen einander nur sehr wenig ändern, eine Gleichung anzugeben, welche die Fortsetzung dieser Bewegung bestimmt.

Auflösung. Alle Bezeichnungen bleiben wie im vorigen Probleme, man setze aber $\frac{2ga}{b} = c^2$, daſs also $c$ der Raum ist, welchen der Schall in einer Secunde durchläuft *), so ist die Gleichung folgende:

---

*) Wofür man nun $c = \sqrt{\frac{2ga}{b}}$ oder $c = \sqrt{\frac{2ga(1+\gamma)}{b}}$ setzen kann, je nachdem man der einen oder andern Hypothese den Vorzug gibt. Vergl. §. 431. 432.

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)+\frac{d\omega}{\omega ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2-\frac{d\Omega}{\Omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)$$
$$-\frac{dQ}{QdS}\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{b}{a}\cdot\frac{dz}{ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2.$$

Da wir nun hier annehmen, daſs die relative Bewegung der Lufttheilchen gegen einander sehr klein sey, so wird, wenn $s=S+v$ gesetzt wird, wenigstens $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ sehr klein gegen die Einheit seyn, gesetzt auch, daſs $v$ der Raum, um welchen das Theilchen $S$ fortgerückt ist, eine beträchtliche Gröſse erlangen könnte. Es wird jetzt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right),\ \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right),\ \left(\frac{ds}{dS}\right)=1+\left(\frac{dv}{dS}\right),$$
$$\text{und } \left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)=\left(\frac{d^2v}{dS^2}\right),$$

und wegen der vorausgesetzten Kleinheit von $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ kann man überall $\left(\frac{ds}{dS}\right)=1$ setzen, blos in den Gliedern

$$\frac{d\omega}{\omega ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2-\frac{d\Omega}{\Omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)$$

darf dieses nicht geschehen, weil, wenn $s$ so sehr wenig von $S$ verschieden ist, beinahe $\frac{d\omega}{\omega ds}=\frac{d\Omega}{\Omega dS}$ wird, und daher $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ gegen den Unterschied dieser beiden Glieder ein erhebliches Verhältniſs haben kann. Die Gleichung für $s$ läſst sich daher jetzt in folgende verändern, für den Fall, daſs jedes Theilchen äuſserst wenig fortrückt, oder $v$ unendlich klein ist:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2v}{dS^2}\right)+\frac{d\omega}{\omega ds}-\frac{d\Omega}{\Omega dS}+\frac{d\Omega}{\Omega dS}\left(\frac{dv}{dS}\right)-\frac{bdz}{ads}-\frac{dQ}{QdS},$$

wo man auch, wenn $s$ sehr wenig von $S$ verschieden ist, $\frac{dZ}{dS}$ statt $\frac{dz}{ds}$ setzen kann, und $\frac{dZ}{dS}$ als eine Function von $S$

zu betrachten hat *). Da ferner $\frac{d\Omega}{\Omega dS}$ in $\frac{d\omega}{\omega ds}$ übergeht, wenn man $S + v$ statt $S$ setzt, so ist auch

$$\frac{d\omega}{\omega ds} = \frac{d\Omega}{\Omega dS} + \frac{v}{dS} d . \frac{d\Omega}{\Omega dS}.$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{d\Omega}{\Omega dS} = U$, welches eine Function der einzigen Gröſse $S$ ist, so wird $\Omega = A . e^{\int U dS}$, und unsre Gleichung geht in folgende über:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + \frac{v dU}{dS} - \frac{b dZ}{a dS} - \frac{dQ}{Q dS},$$

woraus $v$ bestimmt werden muſs, und dann ferner

$$q = \frac{Q\Omega}{\omega\left\{1 + \left(\frac{dv}{dS}\right)\right\}} = \frac{Q}{(1 + Uv)\left\{1 + \left(\frac{dv}{dS}\right)\right\}}$$

$$= Q\left\{1 - Uv - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right\},$$

---

*) Die Verwechselung, daſs man $\frac{dz}{ds} = \frac{dZ}{dS}$ setzt, ist zwar in diesem Falle richtig, aber man darf nicht allgemein den Coefficienten $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ in diesem Gliede $= 1$ setzen; denn wäre z. B. die Röhre vertical, so wäre $\frac{dz}{ds} = 1$, und man müſste folglich, weil wir blos Glieder, welche zwei sehr kleine Factoren enthalten, weglassen, $\frac{dz}{ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{dz}{ds}\left(1 + 2\left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ setzen. — Auf die folgenden Untersuchungen hat diese Aenderung weiter keinen Einfluſs, weil blos die Bewegung in horizontalen Röhren untersucht wird, und die Gleichungen, welche hier gefunden werden, bleiben auch richtig, wenn $\frac{dz}{ds}$ sehr klein, oder die Röhre einen sehr kleinen Winkel mit dem Horizonte macht. B.

weil $\omega = \Omega + \frac{v\,d\Omega}{dS} = A \,.\, e^{\int U dS}(1 + Uv)$ ist,

die Geschwindigkeit $u$ aber ist $= \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

464. Die ganze Untersuchung solcher Bewegungen, wo jedes Lufttheilchen seine Lage nur sehr wenig ändert, beruht also auf der Integration jener für $v$ gefundenen Gleichung, bei welcher man vorläufig bemerken kann, daſs die Glieder $-\frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}$ die Integration nicht erschweren, da sie blos von $S$ abhängen.

Die Bedingungen, unter welchen sich nach den bisher bekannten Methoden das vollständige Integral dieser Gleichung finden läſst, hängen von der Beschaffenheit der Function $U$ ab, welche durch $S$ gegeben ist: denn nur für gewisse Formen dieser Function läſst sich die Integration ausführen.

465. Die Integralrechnung lehrt, daſs einer Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + vT,$$

wenn $U$ und $T$ bekannte Functionen von $S$ sind, in allen den Fällen, wo man sie überhaupt nach den bekannten Methoden zu integriren im Stande ist, durch folgenden Werth von $v$ Genüge geschehe:

$$v = L \,.\, f:(S \pm ct) + M \,.\, f':(S \pm ct) + N \,.\, f'':(S \pm ct) + O \,.\, f''':(S \pm ct) + + \text{etc.}$$

wo die Anzahl der Glieder von der Beschaffenheit der Functionen $U$, $T$ abhängt, und nach der schon oft gebrauchten Bezeichnungsart $f':S = \frac{d.f:S}{dS}$, $f'':S = \frac{d.f':S}{dS}$ u. s. w. ist.

Man muſs hier also diejenigen Fälle unterscheiden, wo der Werth von $v$ sich durch das erste Glied dieser Reihe, wo er sich durch die zwei ersten, durch die drei ersten Glieder u. s. w. vollständig ausdrücken läſst. Da dieses

blos von der Function $U$ im vorigen Probleme abhängt, und diese $= \frac{d\Omega}{\Omega\, dS}$ war, so läſst sich bestimmen, wie $\Omega$ von $S$ abhängen, oder die Gestalt der Röhre beschaffen seyn muſs, damit $v$ durch eine bestimmte Anzahl von Gliedern könne ausgedrückt werden.

466. Problem 97. Wenn die Luft sich in einer Röhre so bewegt, wie im vorigen Probleme angenommen ward, zu bestimmen, wie die Querschnitte der Röhre von $S$ abhängen müssen, damit $v$ durch ein einziges Glied der Integralformel könne ausgedrückt werden.

Auflösung. Wir setzten vorhin den unbestimmten Querschnitt der Röhre $\Omega = A \,.\, e^{\int U dS}$, und dies führte uns auf folgende Differentialgleichung des zweiten Grades:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + v\left(\frac{dU}{dS}\right) - \frac{b\, dZ}{a\, dS} - \frac{dQ}{Q\, dS}.$$

Es soll jetzt $U$ so angenommen werden, daſs

$$v = L \,.\, f : (S + ct) + O$$

werde, und $L$, $O$ Functionen von $S$ sind. Aus diesem Werthe findet man:

$$\left(\frac{d^2 v}{dS^2}\right) = L . f'' : (S+ct) + \frac{2dL}{dS} f' : (S+ct) + \frac{d^2 L}{dS^2} f : (S+ct) + \frac{d^2 O}{dS^2},$$

$$U\left(\frac{dv}{dS}\right) = \quad + LUf' : (S+ct) + U\frac{dL}{dS} f : (S+ct) + U\frac{dO}{dS},$$

$$v\frac{dU}{dS} = \quad \frac{L\, dU}{dS} f : (S+ct) + \frac{O\, dU}{dS},$$

$$-\frac{b\, dZ}{a\, dS} = \quad -\frac{b\, dZ}{a\, dS},$$

$$-\frac{dQ}{Q\, dS} = \quad -\frac{dQ}{Q\, dS};$$

und diese Glieder zusammen müssen

$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) = L \,.\, f'' : (S + ct) \text{ seyn.}$$

Da nun die Function $f$ unbestimmt bleiben soll, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \frac{2\,dL}{dS} + LU = 0,$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^2 L}{dS^2} + U\frac{dL}{dS} + \frac{L\,dU}{dS} = 0,$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^2 O}{dS^2} + \frac{U\,dO + O\,dU}{dS} - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{d\varrho}{\varrho\,dS} = 0;$$

die zweite dieser Gleichungen gibt integrirt

$$\frac{dL}{dS} + UL = \text{Const.}$$

und wenn man diese mit der ersten vergleicht, so wird

$$-\frac{dL}{dS} = \text{Const. und } L = \alpha S + \beta.$$

$$\text{daher } U = -\frac{2\alpha}{\alpha S + \beta} = \frac{d\Omega}{\Omega\,dS},$$

$$\text{folglich } \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{-2\alpha\,dS}{\alpha S + \beta},\quad \Omega = \frac{f^2}{(\alpha S + \beta)^2},$$

und wenn die Querschnitte durch diese Gleichung ausgedrückt werden, so läſst sich $v$ durch ein einziges Glied jener Reihe ausdrücken.

Das Integral der dritten Gleichung wird

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{bZ}{a} - \log.\,\varrho = \text{Const.}$$

$$\text{oder, weil } U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta},$$

$$dO - \frac{2\alpha O\,dS}{\alpha S + \beta} - \frac{b}{a} Z\,dS - dS \log.\,\varrho = C.\,dS,$$

welche, mit $(\alpha S + \beta)^2$ dividirt und integrirt, gibt

$$\frac{O}{(\alpha S + \beta)^2} = \int \frac{dS\left\{\frac{b}{a} Z + \log.\,\varrho + C\right\}}{(\alpha S + \beta)^2}.$$

Allemal also, wenn die Gestalt der Röhre so beschaffen ist, dafs $\Omega = \frac{f^2}{(\alpha S+\beta)^2}$, so ist das vollständige Integral der Gleichung, welche die Bewegung bestimmt,

$$v = (\alpha S+\beta)^2 \int \frac{dS\left[\frac{b}{a} Z + \text{Const.} + \log. \varrho\right]}{(\alpha S+\beta)^2}$$
$$+ (\alpha S+\beta)\Gamma:(S+ct) + (\alpha S+\beta)\Delta:(S-ct),$$

denn statt der Function $f:(S+ct)$ mufs man zwei Glieder setzen, weil $c$ positiv und negativ darf genommen werden.

467. Diese Auflösung umfafst auch die überall gleich weiten Röhren, und wird auf diese angewandt, wenn man $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ setzt; sie ist aber von viel weiterm Umfange, weil sie für alle Röhren pafst, deren Querschnitte durch $\Omega = \frac{f^2}{(\alpha S+\beta)^2}$ ausgedrückt werden.

468. Wenn hier $v$ nach der gefundenen Formel bestimmt ist, so erhält man auch, da $U = \frac{-2\alpha}{\alpha S+\beta}$ ist, die Dichtigkeit des Lufttheilchens, welches um den Raum $= v$ fortgerückt ist, $q = \varrho\left[1 + \frac{2\alpha v}{\alpha S+\beta} - \frac{dv}{dS}\right]$, und die Geschwindigkeit $s = \left[\frac{dv}{dt}\right]$, oder wenn man die gehörigen Werthe setzt:

$$\frac{q}{\varrho} = 1 - C - \frac{b}{a} Z - \log \varrho + \alpha\Gamma:(S+ct) + \alpha\Delta:(S-ct)$$
$$-(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct) - (\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$$

und $s = c(\alpha S+\beta).\Gamma':(S+ct) - c(\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$.

469. Nimmt man an, dafs die Röhee rund ist, oder alle ihre auf die Axe senkrechten Querschnitte kreisförmig, so ist die hier bestimmte Gestalt hyperbolisch conoidisch, sie entsteht nämlich aus der Umdrehung der gleichseitigen Hyperbel *KCM* (Fig. 89.) um ihre Asymtote *IB*. Für

diese Hyperbel ist bekanntlich $SM.IS = a^2$; die Weite der Röhre in $S$ wird also $= \pi . SM^2 = \frac{\pi a^4}{IS^2}$. Nennt man also die Entfernung $IA = \frac{\beta}{\alpha}$ und $AS = S$, so wird $IS = \frac{\alpha S + \beta}{\alpha}$ und $\Omega = \frac{\pi \alpha^2 a^4}{(\alpha S + \beta)^2}$, folglich $f^2 = \pi \alpha^2 a^4$. In einer solchen hyperbolisch conoidischen Röhre werden die sehr kleinen Schwingungen der Luft also durch die gefundene, ziemlich einfache Gleichung bestimmt. Das Gewicht der Luft, worauf wir vorhin bei den cylindrischen Röhren nicht sahen, erschwert die Untersuchung nicht, und bringt auch in den Resultaten keine Aenderung hervor, wenn die Röhre nur einen sehr kleinen Winkel mit dem Horizonte macht.

470. Problem 98. Wenn die übrigen Voraussetzungen für die Bewegung der Luft dieselben bleiben, zu bestimmen, wie die Gestalt der Röhre beschaffen seyn muss, damit der vollständige Integralwerth von $v$ durch zwei Glieder ausgedrückt werde.

Auflösung. Es muſs also bestimmt werden, wie die Function $U$ beschaffen seyn müsse, damit $v$ durch folgende Form könne ausgedrückt werden:

$$v = O + M . f' : (S + ct) + L . f : (S + ct),$$

wenn $L$, $M$, $O$ blos von der veränderlichen Gröſse $S$ abhängen. Substituirt man diesen Werth von $v$ in die Differentialgleichung (§. 463.), so wird:

$$
o = \begin{cases}
\frac{d^2 O}{dS^2} + Mf''' : (S+ct) + \frac{2\,dM}{dS} f'' : (S+ct) + \frac{d^2 M}{dS^2} f' : (S+ct) \\
\qquad + Lf'' : (S+ct) + \frac{2\,dL}{dS} f' : (S+ct) + \frac{d^2 L}{dS^2} f : (S+ct), \\
+ \frac{UdO}{dS} + UMf'' : (S+ct) + \frac{UdM}{dS} f' : (S+ct) \\
\qquad + ULf' : (S+ct) + \frac{UdL}{dS} f : (S+ct), \\
+ \frac{OdU}{dS} \qquad + \frac{MdU}{dS} f' : (S+ct) + \frac{LdU}{dS} f : (S+ct), \\
- \frac{b\,dZ}{a\,dS} \\
- \frac{dQ}{QdS} - Mf''' : (S+ct) - Lf'' : (S+ct).
\end{cases}
$$

Da hier die Functionen $f$, $f'$, $f''$ . . . unbestimmt bleiben sollen, so erhält man vier verschiedene Gleichungen,

$$\text{I.} \quad \frac{2\,dM}{dS} + UM = o,$$

$$\text{II.} \quad \frac{d^2 M}{dS^2} + \frac{2\,dL}{dS} + \frac{UdM + MdU}{dS} + UL = o,$$

$$\text{III.} \quad \frac{d^2 L}{dS^2} + \frac{UdL + LdU}{dS} = o,$$

$$\text{IV.} \quad \frac{d^2 O}{dS} + UdO + OdU - \frac{b}{a}\,dZ - \frac{dQ}{Q} = o;$$

die dritte dieser Gleichungen gibt $\frac{dL}{dS} + UL = A$, und wenn man den hiedurch bestimmten Werth von $U$ in die erste Gleichung setzt, so ist $MdL - 2\,LdM = AMdS$, folglich $L = AM^2 \int \frac{dS}{M^2}$ und $U = -\frac{2\,dM}{MdS}$.

Substituirt man diese Werthe in der zweiten Gleichung, so erhält man $-\frac{d^2 M}{dS^2} + 2A + \frac{2AMdM}{dS} \int \frac{dS}{M^2} = o$.

Es sey $\int \frac{dS}{M^2} = R$, also $dS = M^2 dR$, so ist auch

$$\frac{d^2 M}{dS} = d.\frac{dM}{dS} = d.\frac{dM}{M^2 dR};$$

die letzte Gleichung läfst sich daher, wenn man mit $dS$ multiplicirt, so ausdrücken:

$$-d.\frac{dM}{M^2 dR} + 2AM^2 dR + 2AMR dM = 0,$$

welche integrabel wird, wenn man sie mit $R$ multiplicirt, und dann gibt

$$\frac{R dM}{M^2 dR} + \frac{1}{M} = AM^2 R^2 + B,$$

weil, wenn man theilweise integrirt,

$$\int R d.\frac{dM}{M^2 dR} = \frac{R dM}{M^2 dR} - \int \frac{dM}{M^2} = \frac{R dM}{M^2 dR} + \frac{1}{M}$$

ist. Die letzte Gleichung gibt

$$\frac{R dM + M dR}{M^2 dR} = AM^2 R^2 + B,$$

daher, wenn man $MR = x$ setzt,

$$Ax^2 + B = \frac{R^2 dx}{x^2 dR},$$

$$\text{oder } \frac{dR}{R^2} = \frac{dx}{x^2(Ax^2+B)} = \frac{dx}{Bx^2} - \frac{A dx}{B(Ax^2+B)},$$

$$\text{daher } \frac{B}{R} = \frac{1}{x} + \int \frac{A dx}{Ax^2+B}.$$

Es wird also $R$ durch $x$ bestimmt, und hiedurch sind dann die Gröfsen $M$, $L$, $U$ ebenfalls bestimmt. Da aber $M = \frac{x}{R}$ war, und $dS = M^2 dR = \frac{x^2 dR}{R^2}$, so ist $dS = \frac{dx}{Ax^2+B}$,

$$\text{ferner } U dS = \frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{2dM}{M}$$

$$\text{und } \Omega = \frac{C}{M^2} = \frac{CR^2}{x^2}.$$

Wir wollen aus dieser Gleichung diejenigen Fälle entwickeln, wo $\Omega$ durch $S$ algebraisch bestimmt wird, welches geschieht, wenn $B = 0$ ist; denn alsdann ist $\frac{dR}{R^2} = \frac{dx}{Ax^4}$ und $\frac{1}{R} = \frac{1 + Dx^3}{3Ax^3}$, $R = \frac{3Ax^3}{1 + Dx^3}$, daher $M = \frac{1 + Dx^3}{3Ax^2}$. Da nun $dS = \frac{dx}{Ax^2}$, so ist

$$\frac{1}{x} = -AS - E, \text{ oder } x = -\frac{1}{AS + E},$$

$$M = \frac{(AS + E)^3 - D}{3A(AS + E)}, \quad R = -\frac{3A}{(AS + E)^3 - D},$$

$$\text{und endlich } \Omega = \frac{9A^2C(AS + E)^2}{[(AS + E)^3 - D]^2},$$

$$L = \frac{D - (AS + E)^3}{3(AS + E)^2}.$$

Die vierte Gleichung gibt jetzt auch die Function $O$ an, da alles übrige bekannt ist: es wird nämlich

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{b}{a}Z - \log. \frac{Q}{F} = 0,$$

$$\text{oder } dO + \frac{O\,d\Omega}{\Omega} - \frac{b}{a}Z\,dS - dS \log. \frac{Q}{F} = 0,$$

$$O = \frac{1}{\Omega} \int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a}Z + \log. \frac{Q}{F}\right).$$

Wir wollen die beständigen Gröfsen etwas anders ausdrücken, damit für die Abscisse $= S$ der Querschnitt

$$\Omega = \frac{f^2 . (\alpha S + \beta)^2}{[(\alpha S + \beta)^3 - \gamma]^2}$$

werde; dieses ändert den Ausdruck für $O$ nicht, aber es wird

$$M = \frac{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma}{3\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ und } L = \frac{\gamma - (\alpha S + \beta)^3}{3(\alpha S + \beta)^2},$$

und endlich

$$v = O + M . \Gamma' : (S + ct) + L\Gamma : (S + ct)$$
$$+ M\Delta' : (S - ct) + L\Delta : (S - ct),$$

woraus $q$ und $x$ bestimmt werden.

471. Die Werthe von $L$ und $M$ können allemal noch durch einen willkürlichen beständigen Factor multiplicirt werden, den man als mit in der unbestimmten Function enthalten betrachten kann: man muſs dieses deswegen bemerken, weil zuweilen ein solcher Factor nöthig seyn könnte, um die Werthe von $v$ so klein zu erhalten, wie wir vorausgesetzt haben.

Wäre zum Beispiel $\gamma = \infty$ und $f^2 = n^2\gamma^2$, so würde $\Omega = n^2(\alpha S + \beta)^2$, und die Röhre hätte eine conische oder pyramidalische Gestalt: damit alsdann $M$ und $L$ nicht unendlich werden, muſs man die gefundenen Werthe mit $\gamma$ dividiren, also $M = -\frac{1}{\alpha(\alpha S + \beta)}$ und $L = \frac{1}{(\alpha S + \beta)^2}$ setzen, und es werden sich alsdann die Oscillationen in solchen Röhren bestimmen lassen.

472. Wird $\gamma = 0$, so ist $\Omega = \frac{f^2}{(\alpha S + \beta)^4}$, folglich hat die Röhre eine solche Gestalt, daſs die Querschnitte sich umgekehrt wie die Biquadrate der Abscissen verhalten. In diesem Falle ist $M = \frac{1}{3\alpha}(\alpha S + \beta)^2$ und $L = -\frac{1}{3}(\alpha S + \beta)$. Allgemein aber kann die im Probleme gefundne Gleichung für $\Omega$ (Fig. 90.) auf Röhren angewandt werden, welche durch die Umdrehung einer durch die Gleeichung $y = \frac{a^3 x}{x^3 + b^3}$ ausgedrückten hyperbolischen Linie entstehen, wenn $y = SM$ die Ordinate ist, welche der Abscisse $x = AS$ zugehört. Diese Linie schneïdet die Axe in $A$, und hat zwei auf einander senkrechte Asymtoten $GH$, $KL$.

473. Das Problem läſst sich aber noch auf mehrere Fälle anwenden, wo die Gestalt der Röhre durch transcendente Gleichungen bestimmt wird. Wir beschränkten nämlich die Auflösung durch die Voraussetzung, daſs die eine beständige Gröſse $B = 0$ sey; es sey jetzt $B = Am^2$ und $A = \frac{\alpha}{m}$, so gibt die Gleichung

$$dS = \frac{dx}{Ax^2 + B} = \frac{m}{\alpha}\,\frac{dx}{(m^2+x^2)},$$

$$x = m \text{ tang } (\alpha S + \beta),$$

woraus ferner folgt

$$\frac{\alpha m^2}{R} = \alpha S + \gamma + \text{Cotang } (\alpha S + \beta),$$

$$R = \frac{\alpha m^2}{\alpha S + \gamma + \text{Cotang}(\alpha S + \beta)},$$

$$M = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\,.\,\text{tang}(\alpha S + \beta)}{\alpha m},$$

$$L = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\text{ tang }(\alpha S + \beta)}{m\,.\,\text{Cotang}(\alpha S + \beta)},$$

$$\Omega = \frac{C}{[1 + (\alpha S + \gamma)\text{ tang}(\alpha S + \beta)]^2},$$

$$O = \frac{1}{\Omega}\int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a} Z + \log \frac{Q}{F}\right).$$

474. Die vier Gleichungen, die wir im Probleme fanden, hätten sich noch leichter auflösen lassen. Die erste gab nämlich $U = -\frac{2dM}{MdS}$; setzt man hier $L = My$, so ist $MU = -\frac{2dM}{dS}$ und $LU = -\frac{2ydM}{dS}$; diese Werthe in die zweite Gleichung gesetzt, geben

$$\frac{d^2M}{dS} + 2d\,.\,My - 2d\,.\,\frac{dM}{dS} - 2ydM = 0,$$

$$\text{oder } -\frac{d^2M}{dS} + 2Mdy = 0,$$

$$\frac{d^2M}{M} = 2dy\,.\,dS,$$

Die dritte Gleichung aber kann man jetzt so ausdrücken:

$$\frac{d^2\,.\,My}{dS} - 2d\,.\,\frac{ydM}{dS} = 0,$$

$$\text{oder } Md^2y - yd^2M = 0,$$

$$\frac{d^2M}{M} = \frac{d^2y}{y},$$

welche, mit der vorigen verglichen, gibt

$$d^2 y = 2 y dy . dS,$$
$$dy = (y^2 + m^2) dS.$$

Will man aus dieser Gleichung die algebraischen Werthe herleiten, welche $y$ erhalten kann, so setze man $m = 0$, dann wird $\frac{1}{y} = - S - \frac{\beta}{\alpha}$, $y = \frac{-\alpha}{\alpha S + \beta}$.

Die Gleichung $M d^2 y - y d^2 M = 0$ gibt

$$M dy - y dM = A dS,$$

daher $-\frac{M}{y} = \frac{A}{\alpha^2} \int dS (\alpha S + \beta)^2 = \frac{A}{3\alpha^3} [(\alpha S + \beta)^3 - \gamma]$,

und $M = \frac{A[(\alpha S + \beta)^3 - \gamma]}{3\alpha^2 (\alpha S + \beta)}$, $L = - \frac{A[(\alpha S + \beta)^3 - \gamma]}{3\alpha (\alpha S + \beta)^2}$,

endlich $\Omega = \frac{C(\alpha S + \beta)^2}{[(\alpha S + \beta)^3 - \gamma]^2}$, wie vorhin.

475. Es gibt aber aufser den Fällen, wo die Formeln algebraisch werden, und, wo sie vom Kreise abhängen, noch einen dritten, wo sie Exponentialgröfsen enthalten. Man kann nämlich in der Formel des letzten §., wo $dy = (y^2 + m^2) dS$ ward, $m^2$ negativ annehmen, oder $dy = (y^2 - m^2) dS$ setzen, so wird

$$2(mS + n) = \log. \frac{y - m}{y + m},$$

$$\text{oder } y = m . \left(\frac{1 + e^{2(mS + n)}}{1 - e^{2(mS + n)}}\right);$$

alsdann wird

$$-\frac{M}{y} = \frac{A}{m^2} \int dS \left(\frac{1 - e^{2(mS + n)}}{1 + e^{2(mS + n)}}\right)^2,$$

$$= \frac{A}{m^3} \left(\frac{e^{2(mS + n)} . (mS + k - 1) + mS + k + 1}{1 + e^{2(mS + n)}}\right),$$

$$M = - \frac{A}{m^2} \left(\frac{(mS + k - 1) e^{2(mS + n)} + mS + k + 1}{1 - e^{2(mS + n)}}\right),$$

$$L = - \frac{A}{m} (1 + e^{2(mS + n)}) \left(\frac{mS + k + 1 + (mS + k - 1) e^{2(mS + n)}}{(1 - e^{2(mS + n)})^2}\right)$$

$$\text{und } \Omega = \frac{C.(1 - e^{2(mS+n)})^2}{[(mS+k-1)e^{2(mS+n)} + mS+k+1]^2}.$$

476. Problem 99. Die Fälle zu bestimmen, wo die Form der Röhre so beschaffen ist, daſs der Integralwerth von $v$ sich durch drei Glieder der oben bestimmten Reihe vollständig ausdrücken lasse.

Auflösung. Das vollständige Integral der Differentialgleichung des zweiten Grades, welche die Bewegung im Allgemeinen bestimmte, soll hier seyn:

$$v = O + Nf'':(S+ct) + Mf':(S+ct) + Lf:(S+ct).$$

Da die Gröſse $O$ hier eben so bestimmt wird, wie vorhin, so will ich blos die Coefficienten der Functionen $f''''$, $f'''$ etc. hersetzen; man kann sie leicht in folgender Darstellung übersehen.

| $f^{IV}:(S+ct)$ | $f''':(S+ct)$ | $f'':(S+ct)$ | $f':(S+ct)$ | $f:(S+ct)$ |
|---|---|---|---|---|
| $+N$ | $+2\frac{dN}{dS}$ | $+\frac{d^2N}{dS^2}$ | | |
| | $+M$ | $+\frac{2dM}{dS}$ | $+\frac{d^2M}{dS^2}$ | |
| | | $+L$ | $+\frac{2dL}{dS}$ | $+\frac{d^2L}{dS^2}$ |
| | $+UN$ | $+U\frac{dN}{dS}$ | | |
| | | $+UM$ | $+U\frac{dM}{dS}$ | |
| | | | $+UL$ | $+U\frac{dL}{dS}$ |
| | | $+N\frac{dU}{dS}$ | $+M\frac{dU}{dS}$ | $+L\frac{dU}{dS}$ |
| $-N$ | $-M$ | $-L$ | | |

Hieraus folgt:

$$\text{I.}\quad \frac{2dN}{dS} + UN = 0,$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^2N}{dS^2} + \frac{2dM}{dS} + \frac{UdN + NdU}{dS} + UM = 0,$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^2M}{dS^2} + \frac{2dL}{dS} + \frac{UdM + MdU}{dS} + UL = 0,$$

$$\text{IV.}\quad \frac{d^2L}{dS^2} + \frac{UdL + LdU}{dS} = 0.$$

Man setze $M = Ny$, $L = Nz$, so gibt die erste Gleichung

$$UN = -\frac{2dN}{dS},\ UM = -\frac{2ydN}{dS},\ UL = -\frac{2zdN}{dS},$$

und die zweite läſst sich nun in folgende umformen:

$$\frac{d^2N}{dS^2} + 2.\frac{ydN + Ndy}{dS} - 2\frac{d^2N}{dS^2} - \frac{2ydN}{dS} = 0,$$

$$\text{oder} -\frac{d^2N}{dS^2} + \frac{2Ndy}{dS} = 0, \text{ - - II.}$$

Die dritte Gleichung gibt

$$\frac{Nd^2y + 2dNdy + yd^2N}{dS^2} + 2.\frac{zdN + Ndz}{dS} - \frac{2yd^2N}{dS^2}$$
$$-\frac{2dNdy}{dS^2} - \frac{2zdN}{dS} = 0,$$

$$\text{oder III. - -}\ \frac{Nd^2y - yd^2N}{dS^2} + \frac{2Ndz}{dS} = 0,$$

und die vierte

$$\frac{Nd^2z + 2dNdz + zd^2N}{dS^2} - \frac{2dzdN + 2zd^2N}{dS^2} = 0,$$

$$\text{oder IV. - - -}\ Nd^2z - zd^2N = 0.$$

Man erhält daher für $\frac{d^2N}{N}$ einen dreifachen Werth

$$\frac{d^2N}{N} = 2dydS = \frac{2dzdS + d^2y}{y} = \frac{d^2z}{z},$$

$$\text{und daher } 2ydydS = d^2y + 2dzdS,$$

$$\text{und } yd^2z - zd^2y = 2zdzdS.$$

Das Integral der letztern ist $ydz - zdy = dS(z^2 + A)$, das Integral der erstern $dy + 2zdS = dS(y^2 + B)$, oder $dy = dS(y^2 - 2z + B)$, dividirt man jene mit dieser, so ist

$$\frac{ydz - zdy}{dy} = \frac{z^2 + A}{y^2 - 2z + B}.$$

Ich setze $z = uy$, so wird aus dieser Gleichung

$$\frac{y^2 du}{dy} = \frac{u^2 y^2 + A}{y^2 - 2uy + B},$$

oder $y^4 du - 2uy^3 du + By^2 du = u^2 y^2 dy + A dy$, woraus sich nur dann mit einiger Leichtigkeit fernere Schlüsse herleiten lassen, wenn $A = 0$ und $B = 0$ ist. Alsdann hat man die homogene Gleichung

$$y^2 du - 2uydu = u^2 dy, \text{ oder } y^2 du = d.u^2 y.$$

Diese Gleichung muſs mit $u^4 y^2$ dividirt werden, um integrabel zu seyn, und gibt dann

$$\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{3m^3} = \frac{1}{u^2 y} \text{ oder } y = \frac{3m^3 u}{m^3 + u^3}$$

und $z = uy = \dfrac{3m^3 u^2}{m^3 + u^3}$. Jetzt wird auch

$$dS = \frac{dy}{y^2 - 2uy} = \frac{ydz - zdy}{z^2}, \text{ daher } S = -\frac{y}{z} + \text{Const.}$$

oder $\dfrac{1}{u} = -S - \dfrac{\beta}{\alpha}$, $u = \dfrac{-\alpha}{\alpha S + \beta}$ mithin ferner

$$y = -\frac{3\alpha m^3 (\alpha S + \beta)^2}{m^3 (\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3} \text{ und } z = \frac{3\alpha^2 m^3 (\alpha S + \beta)}{m^3 (\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3},$$

oder, wenn man $\dfrac{\alpha^3}{m^3} = \gamma^3$ setzt,

$$y = -\frac{3\alpha(\alpha S + \beta)^2}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3} \text{ und } z = \frac{3\alpha^2 (\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}.$$

Aus der Gleichung IV. folgt

$$Ndz - zdN = AdS = \frac{Adu}{u^2},$$

welche, mit $z^2 = \frac{9\alpha^6 u^4}{(\alpha^3+\gamma^3 u^3)^2}$ dividirt, gibt

$$-d.\frac{N}{z} = \frac{B\,du}{u^6}(\alpha^3+\gamma^3 u^3)^2 \text{ und}$$

$$-\frac{N}{z} = C + B\left\{\gamma^6 u - \frac{\alpha^3\gamma^3}{u^2} - \frac{\alpha^6}{5u^5}\right\},$$

$$\text{und } N = -Cz + \frac{Bz}{5u^5}(\alpha^6 + 5\alpha^3\gamma^3 u^3 - 5\gamma^6 u^6),$$

oder, wenn man die Werthe der beständigen Gröſsen anders annimmt,

$$N = \frac{A(\alpha S+\beta)^6 - 5A\gamma^3(\alpha S+\beta)^3 - 5A\gamma^6 + B(\alpha S+\beta)}{(\alpha S+\beta)^3 - \gamma^3}.$$

Hiedurch wird der Querschnitt $\Omega$ bestimmt, da $\Omega = \frac{C}{N^2}$ ist, und es wird

$$M = -\frac{3\alpha N(\alpha S+\beta)^2}{(\alpha S+\beta)^3-\gamma^3} \text{ und } L = \frac{3\alpha^2(\alpha S+\beta)N}{(\alpha S+\beta)^3-\gamma^3},$$

$O$ aber wird, wie vorhin,

$$O = \frac{1}{\Omega}\int \Omega\,dS\left[\frac{b}{a}Z + \log\frac{Q}{B}\right],$$

und wenn die hier bestimmte Gestalt der Röhre Statt findet, daſs $\Omega = \frac{C}{N^2}$, so ist vollständig

$$v = O + N.\Gamma'':(S+ct) + M.\Gamma':(S+ct) + L.\Gamma:(S+ct)$$
$$+ N\Delta'':(S-ct) + M\Delta':(S-ct) + L\Delta:(S-ct).$$

477. Diese Auflösung ist nicht völlig allgemein, weil wir in der Gleichung zwischen $y$ und $z$ zwei beständige Gröſsen $= 0$ gesetzt haben; aber dennoch umfaſst sie weit mehrere Fälle, als das vorige Problem in seiner gröſsten Allgemeinheit umfaſste.

Die einfachsten Fälle, die hier vorkommen, findet man, wenn man $\gamma = 0$ setzt. Alsdann wird

$$N = A(\alpha S+\beta)^3 + \frac{B}{(\alpha S+\beta)^2},$$

und wenn einer der beständigen Coefficienten $A$ oder $B$, $= 0$ ist, $N = (\alpha S + \beta)^{-2}$ oder $N = (\alpha S + \beta)^3$. In jenem Falle wird $\Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^4$, in diesem

$$\Omega = \frac{C}{(\alpha S + \beta)^6}.$$

478. Unter den Fällen, da $v$ durch ein einziges Glied der Reihe ausgedrückt ward, gab es auch zwei einfachere, $\Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^0$ und $\Omega = C\, (\alpha S + \beta)^{-2}$. Ward $v$ durch zwei Glieder vollständig bestimmt, so konnte

$$\Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^2 \text{ und } \Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^{-4}$$

seyn; und hier finden wir als die einfachsten Fälle

$$\Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^4 \text{ und } \Omega = C \,.\, (\alpha S + \beta)^{-6}.$$

Es läſst sich also voraussehen, daſs wenn man weiter fortgienge, die Auflösung immer gelingen würde, wenn

$$\Omega = C\, (\alpha S + \beta)^{\pm 2n}$$

ist, und $n$ kann jede ganze Zahl bedeuten.

479. Auſser diesen einfachsten Fällen aber ist die Auflösung des letzten Problems in unzähligen andern Fällen möglich, welche alle aus der Gleichung

$$y^4 du - 2uy^3 du - u^2 y^2 dy + By^2 du - A dy = 0$$

hergeleitet werden müssen. Wir haben vorhin diese Gleichung unter der beschränkenden Voraussetzung aufgelöst, daſs $A = B = 0$ sey; die Auflösung gelingt aber auch, wenn man blos $A = 0$ setzt, oder

$$dS = \frac{y\,dz - z\,dy}{z^2} = \frac{du}{u^2}.$$

Alsdann wird $y^2 du - 2uy\,du - u^2 dy + B\,du = 0$, und wenn man $u^2 y = x$ annimmt,

$$\frac{x^2\,du}{u^4} - dx + B\,du = 0,$$

$$\text{oder } d \,.\, \frac{1}{x} + B\,du \,.\, \frac{1}{x^2} + \frac{du}{u^4} = 0,$$

welcher Gleichung der Werth $\frac{1}{x} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2}$ Genüge thut,

indem diese gibt

$$-\frac{\alpha}{u^2} - \frac{2\beta}{u^3} + \frac{B\alpha^2}{u^2} + \frac{2B\beta\alpha}{u^3} + \frac{B\beta^2}{u^4} + \frac{1}{u^4} = 0.$$

Man muſs also $\beta^2 = -\frac{1}{B}$ und $\alpha = \frac{1}{B} = -\beta^2$ nehmen, und hat mithin $\frac{1}{x} = -\frac{\beta^2}{u^2} + \frac{\beta}{u^2}$ als einen speciellen Fall, welcher jener Differentialgleichung Genüge thut. Um das vollständige Integral zu finden, setze man

$$\frac{1}{x} = -\frac{\beta^2}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{1}{p},$$

so wird $dp - \frac{2p\,du}{u} + \frac{2p\,du}{\beta u^2} + \frac{du}{\beta^2} = 0$,

weil die übrigen Glieder sich aufheben. Diese Gleichung, mit $\frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}}{u^2}$ multiplicirt und integrirt, gibt

$$\frac{p.e^{-\frac{2}{\beta u}}}{u^2} + \frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}}{2\beta} = \frac{C}{2\beta},$$

oder $p = \frac{C.u^2.e^{\frac{2}{\beta u}}}{2\beta} - \frac{u^2}{2\beta}$,

und $\frac{1}{x} = -\frac{\beta^2}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{2\beta}{u^2\left(C.e^{+\frac{2}{\beta u}} - 1\right)} = \frac{1}{u^2 y}$.

Hieraus läſst sich $y$ und $z$ durch $u$ bestimmen, und man findet dann leicht die Werthe von $N$, $M$, $L$ und $\Omega$.

480. Auch wenn der Werth von $v$ mehrere Glieder enthielte, würde man durch ähnliche Rechnungsmethoden die Figur der Röhre und die Coefficienten $L$, $M$, $N$ bestimmen können, obgleich die Rechnung immer verwickelter wird. Man würde so immer mehrere Formen der Röhre finden, bei welchen die Bestimmung der unendlich kleinen

Schwingungen der Luft nach dieser Methode möglich ist, und immer, wenn man annimmt, daſs der Werth von $v$ noch ein Glied der Reihe (§. 465.) mehr enthalte, erhält man eine unendlich Mal gröſsere Anzahl von Fällen, als wenn dieses Glied nicht mehr vorkommen soll. Dennoch aber bleiben unendlich viele mögliche Gestalten der Röhre ausgeschlossen, für welche sich die Schwingungen (nach dieser Methode wenigstens) der Rechnung nicht unterwerfen lassen. Wir bleiben hier nur bei den einfachsten Fällen stehen, und da bieten sich uns zuerst, nächst den cylindrischen Röhren, die hyperbolisch conoidischen dar, für welche die Auflösung unsers Hauptproblems wenig schwieriger wird, als bei den cylindrischen Röhren: denn auch hier wird $v$ durch das erste Glied der Reihe vollständig ausgedrückt. Unter denjenigen Fällen, wo im Werthe von $v$ zwei Glieder vorkommen,

$$v = O + Mf':(S \pm ct) + Lf:(S \pm ct),$$

sind die conischen Röhren die merkwürdigsten, wo nämlich $\Omega = AS^2$ wird; es gehören aber auch diejenigen Röhren hieher, für welche $\Omega = \frac{A}{S^4}$, oder aber $\Omega = \frac{AS^2}{(S^3 + B)^2}$ ist, und unzählige andre Formen, die durch transcendente Functionen ausgedrückt werden. Enthält der vollständige Werth von $v$ noch mehrere Glieder, so werden die Rechnungen schon äuſserst verwickelt, und es würde wenig interessant seyn, diese Fälle umständlicher zu untersuchen.

---

## Fünfter Abschnitt.

### *Von den Schwingungen der Luft in hyperbolisch-conoidischen Röhren.*

481. Problem 100. Wenn die Röhre die Gestalt eines Conoids hat, welches durch Umdrehung eines Bogens der gleichseitigen Hyperbel $AB$ (Fig. 91.) um ihre Asymtote $IL$ entstanden ist, und es wird in dieser Röhre die Luft in Schwingung gesetzt, die fernere Bewegung der Luft für jeden Zeitpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Es sey $I$ der Punkt, wo die Asymtoten der Hyperbel sich durchschneiden, und wenn man $IS = S$ nimmt, so sey in $S$ der Querschnitt der Röhre $\Omega = \frac{C}{SS}$. Ferner bezeichne $Q$ die in $S$ Statt findende Dichtigkeit, $\Upsilon$ die Geschwindigkeit nach der Richtung $IB$ für den anfänglichen Zustand, so wird, wie wir vorhin (§. 466.) gesehen haben, der Raum $Ss = v$, durch welchen eben das Lufttheilchen am Ende der Zeit $= t$ fortgerückt ist, wenn wir dort $\alpha = 1$, $\beta = 0$ setzen, und auf die Wirkung der Schwere keine Rücksicht nehmen,

$$v = S^2 \int \frac{dS}{S^2} \log. \frac{Q}{B} + S\Gamma : (S + ct) + S\Delta : (S - ct),$$

und $c$ bedeutet hier den Raum, durch welchen der Schall sich in einer Secunde fortpflanzt.

Für eben den Zeitpunkt wird desselben Theilchens Dichtigkeit

$$q = Q\,[1 - \log. \frac{Q}{B} + \Gamma : (S + ct) + \Delta : (S - ct) - S\Gamma' : (S + ct) - S\Delta' : (S - ct)],$$

und die Geschwindigkeit

$$u = cS\,.\,[\Gamma' : (S + ct) - \Delta' : (S - ct)]:$$

man wird daher für jeden Zeitpunkt den Zustand und die Bewegung des flüssigen Körpers anzugeben im Stande seyn, wenn $\Gamma$ und $\Delta$ bekannte Functionen sind.

Diese Functionen müssen vermittelst des anfänglichen Zustandes bestimmt werden, und weil für $t = o$, $v = o$, $q = Q$ und $x = \Upsilon$ werden muſs, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad S^2 \int \frac{dS}{S^2} \log. \frac{Q}{B} + S\Gamma : S + S\Delta : S = o,$$

$$\text{II.} \quad -\log. \frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S - S\Gamma' : S - S\Delta' : S = o,$$

$$\text{III.} \quad \Upsilon = cS\,(\Gamma' : S - \Delta' : S),$$

wo indeſs die beiden ersten eigentlich nur als eine zu betrachten sind, wie aus der Entstehung der zweiten (§. 468.) erhellt.

Der Kürze wegen sey $\Gamma : S + \Delta : S = x$ und

$$\Gamma : S - \Delta : S = y,$$

so gibt die zweite Gleichung

$$-\log \frac{Q}{B} + x - S\,\frac{dx}{dS} = o;$$

und die dritte $\Upsilon = cS \cdot \frac{dy}{dS}$.

Aus der ersten folgt auch

$$x = -S \int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B},$$

und aus der dritten

$$y = \frac{1}{c} \int \frac{\Upsilon dS}{S}, \text{ folglich ist}$$

$$\Gamma : S = -\tfrac{1}{2} S \int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} + \frac{1}{2c} \int \frac{\Upsilon dS}{S},$$

$$\Delta : S = -\tfrac{1}{2} S \int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{2c} \int \frac{\Upsilon dS}{S},$$

$$\text{und } \Gamma' : S = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{2S} \log \frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{2cS},$$

$$\Delta' : S = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{2S} \log \frac{Q}{B} - \frac{\Upsilon}{2cS}.$$

Hiedurch sind diese Functionen völlig bestimmt; denn da für jeden Punkt $S$ der Axe aus dem anfänglichen Zustande die Gröſsen $\Upsilon$ und $\log \frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ bekannt sind, so lassen sich die Curven $C\Gamma c$ und $D\Delta d$ so zeichnen, daſs die Ordinaten der ersten $S\Gamma = \Gamma' : S$, und die Ordinaten der zweiten $S\Delta = \Delta' : S$ werden. Aber diese Curven erstrecken sich nicht über die Endpunkte der Röhre $A$, $B$ hinaus, und sie reichen daher zur vollkommenen Auflösung des Problems nicht hin: indeſs, so lange $t$ kleine Werthe hat, so daſs, wenn man $St = ST = c\,.\,t$ nimmt, die Punkte $T$ und $t$ innerhalb der Röhre fallen, so erhält man mit Hülfe dieser Scalen, da $\Gamma : S = CAS\Gamma$ und $\Delta : S = DAS\Delta$ ist,

$$v = S^2 \int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} + S\,(ACTM + ADtn),$$

$$q = Q\,[1 - \log \frac{Q}{B} + ACTM + ADtn - S(TM + tn)],$$

$$x = cS\,(TM - tn).$$

Wenn aber $t$ so groſs wird, daſs $T$, $t$ auſserhalb der Röhre fallen, so ist eine Fortsetzung der Scalen nothwendig.

482. Statt der im vorigen §. gebrauchten Scalen kann man besser sich zweier andrer bedienen. Es stelle wieder $AB$ (Fig. 92.) dieselbe Röhre vor, und für den Punkt $S$ sey $IS = S$, und der Querschnitt $\Omega = \frac{f^2}{S^2}$; man zeichne jetzt über der Axe $IL$ die Curven $EQe$, $FYf$, so daſs der erstern Ordinaten

$$SQ = \int \frac{dS}{S^2} \log \frac{Q}{B} + \frac{1}{S} \log \frac{Q}{B} = \int \frac{dQ}{SQ},$$

der zweiten Ordinaten $SY = \frac{\Upsilon}{cS}$ werden, so erhält man
$\Gamma' : S = -\frac{1}{2}SQ + \frac{1}{2}SY$ und $\Delta' : S = -\frac{1}{2}SQ - \frac{1}{2}SY$, und
$\Gamma : S = -\frac{1}{2}AESQ + \frac{1}{2}AFSY$, $\Delta : S = -\frac{1}{2}AESQ - \frac{1}{2}AFSY$.

Hieraus folgt, wenn man $ST = St = c.t$ nimmt, für das anfangs in $S$ befindliche Theilchen $S$ nach Verlauf der Zeit $= t$ die Dichtigkeit

$$q = Q\,[1 - \log\frac{Q}{B} - \frac{1}{2}AETM - \frac{1}{2}AEtm + \frac{1}{2}AFTN$$
$$- \frac{1}{2}AFtn + \frac{1}{2}S(TM + tm - TN + tn)],$$

die Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}cS(-TM + TN + tm + tn)$, und der Raum, um welchen dieses Theilchen fortgerückt ist,

$$v = S^2 \int \frac{dS}{S^2} \log\frac{Q}{B} - \frac{1}{2}S(AETM - AFTN + AEtm + AFtn),$$

weil aber für $t = 0$ nothwendig $v = 0$ wird, so ist

$$S^2 \int \frac{dS}{S^2} \log\frac{Q}{B} = S \,.\, AESQ, \text{ und daher}$$

$$v = \frac{1}{2}S(2AESQ - AETM + AFTN - AEtm - AFtn).$$

483. Diese Formeln enthalten zwar mehrere Glieder, als die im Probleme, sind aber gleichwohl zum Gebrauche bei der fernern Rechnung passender, weil darin die von der anfänglichen Dichtigkeit und die von der Geschwindigkeit abhängenden Glieder abgesondert vorkommen. Dieses ist wegen der Fortsetzung der Scalen, worauf doch bei den fernern Untersuchungen alles ankommt, sehr wichtig. Man kann aber die Ausdrücke bequemer machen, so daſs von dem Endpunkte $A$ der Röhre nichts darin abhängt. Denn da aus dem Vorigen folgt, daſs

$$\int \frac{dS}{S^2} \log\frac{Q}{B} = \frac{AESQ}{S}$$

ist, und zufolge der Construction

$$SQ = \int \frac{dS}{S^2} \log\frac{Q}{B} + \frac{1}{S} \log\frac{Q}{B},$$

$$\text{so ist } \log\frac{Q}{B} = S \,.\, SQ - AESQ,$$

und wenn man dieses in die Formeln setzt,

$$\frac{q}{Q} = 1 + \tfrac{1}{2} S (TM + tm - 2 SQ) - \tfrac{1}{2} S (TN - tn) + \tfrac{1}{2}(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2} TNtn,$$

$$s = \tfrac{1}{2} c S (tm - TM + TN + tn),$$

$$v = \tfrac{1}{2} S (SQtm - SQTM + TNtn),$$

wo die Abscisse $IS = S$ vom Durchschnittspunkte der Asymtoten an gerechnet wird.

484. Ehe wir weiter fortgehen, ist es nothwendig, über die Construction der Scalen $EQe$, $FYf$ noch einige nähere Betrachtungen anzustellen. Diese müssen aus dem Zustande, in welchem sich bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts die Luft befand, hergeleitet werden, nämlich aus der Dichtigkeit $= Q$ und der Geschwindigkeit $= \Upsilon$, welche in irgend einem Punkte $S$ Statt fand. Die Construction der Scale $FYf$ hat nun gar keine Schwierigkeit, da man $SY = \frac{\Upsilon}{c \cdot S}$ nimmt; die Scale $EQe$ hingegen erfordert wegen der Integralformel, die in dem Werthe der Ordinate vorkommt, einige Erläuterung.

Da für jeden Punkt $S$ (Fig. 93.) die Dichtigkeit $= Q$ gegeben ist, so zeichne man zuerst eine Linie $CV$, so daſs der Abscisse $AS = S$ die Ordinate $SV = \frac{1}{S^2} \log \frac{Q}{B}$ zugehört, wobei man irgend eine gerade Linie als Einheit annimmt: alsdann aber construire man $EQ$ so, daſs ihre Ordinate $SQ = S \cdot SV + ACSV$ wird, und hiernach werden sich für die ganze Röhre die Ordinaten der Scale bestimmen lassen. Da ferner auch der Flächenraum $AESQ$ in den Formeln vorkommt, so kann man statt dessen, weil

$$AESQ = \int dS \cdot SQ = S \cdot SQ - \int S \cdot d \cdot SQ = S \cdot SQ - \int dS \cdot S \cdot SV - \int S^2 \cdot d \cdot SV - \int S dS \cdot SV,$$

oder $AESQ = S \cdot SQ - S^2 \cdot SV$ ist, auch setzen

$$AESQ = S \cdot ACSV.$$

485. Man kann die Formeln auch ganz durch die Linie $CV$ (Fig. 93.) ausdrücken, so dafs $E\varrho$ gar nicht darin vorkommt, und nun mit mehrerem Rechte $CV$ die Scale der Dichtigkeiten nennen.

Es sey also $C\varrho c$ (Fig. 94.) diese Scale der Dichtigkeiten, wo zu jeder Abscisse $IS = S$ die Ordinate $S\varrho = \frac{1}{S^2} \log \frac{\varrho}{B}$ gehört, für die Scale $FYf$ aber sey wieder $SY = \frac{1}{c \cdot S}$.

Man mufs also nun statt $S\varrho$ in den vorigen Formeln setzen $S \cdot S\varrho + ACS\varrho$, und statt der Fläche (Fig. 93.) $AES\varrho$ jetzt (Fig. 94.) $S \cdot ACS\varrho$, auch ist jetzt $\log \frac{\varrho}{B} = S^2 \cdot S\varrho$. Die Gleichungen §. 483. geben also jetzt, wenn man am Ende der Zeit $t$, $ST = St = c \cdot t$ nimmt, die Dichtigkeit

$$q = \varrho [1 - S^2 \cdot S\varrho - \tfrac{1}{2} S(ACTM + ACtm) + \tfrac{1}{2} TNtn - \tfrac{1}{2} S(TN - tn) + \tfrac{1}{2} S^2 (TM + tm) + \tfrac{1}{2} S \cdot (ACTM + ACtm)],$$

weil nämlich auch $TM$ jetzt $= S \cdot TM + ACTM$, und das dortige $S\varrho TM$ hier $= S \cdot S\varrho TM$ ist. Dieser Ausdruck für $q$ ist auch

$$q = \varrho [1 + \tfrac{1}{2} S^2 (TM + tm - 2S\varrho) - \tfrac{1}{2} S \cdot (TN - tn) + \tfrac{1}{2} TNtn],$$

die Geschwindigkeit aber wird

$$z = -\tfrac{1}{2} c S^2 (TM - tm) - \tfrac{1}{2} c \cdot S \cdot TMtm + \tfrac{1}{2} c \cdot S(TN + tn).$$

Endlich wird der Raum, durch den das Lufttheilchen fortgerückt ist,

$$v = \tfrac{1}{2} S^2 (S\varrho tm - S\varrho TM) + \tfrac{1}{2} S \cdot TNtn,$$

und für die hiebei zum Grunde liegenden Scalen sind die Ordinaten $S\varrho = \frac{1}{S^2} \log \frac{\varrho}{B}$, $SY = \frac{1}{c \cdot S}$ für jede Abscisse $= S$. Diese Formeln werden wir, als die bequemsten, im Verfolge der Untersuchung gebrauchen.

486. **Problem 101.** Wenn die Röhre sich in $A$ endigt, und $A$ der gegen den Mittelpunkt der Hyperbel gekehrte Endpunkt der Röhre ist, die Fortsetzung der im letzten §. angegebenen Scalen über $A$ hinaus zu bestimmen, sowohl in dem Falle, da die Röhre in $A$ offen, als wenn sie da geschlossen ist.

**Auflösung.** Die Entfernung des Endpunkts $A$ (Fig. 95.) der Röhre vom Mittelpunkte der Hyperbel sey $IA = a$, und es sey die Röhre zuerst an diesem Ende offen. In diesem Falle wird die Fortsetzung dadurch bestimmt, daſs hier immer die Dichtigkeit der natürlichen Dichtigkeit der Luft gleich seyn muſs, also $\varrho = B$, und folglich trift die Scale der Dichtigkeiten in diesem Punkte die Axe. $AM$ sey die Scale der Dichtigkeiten, deren Ordinaten $= \frac{1}{S^2} \log \frac{\varrho}{B}$, und $FN$ die Scale der Geschwindigkeiten, deren Ordinaten $= \frac{\Upsilon}{c \cdot S}$ sind. Da nun auch in der Folge der Zeit immer in $A$ die Dichtigkeit $q = B$ bleibt, so muſs die Fortsetzung der Scalen so genommen werden, daſs, wenn man für irgend einen Zeitraum $= t$ die Entfernungen $AT = At = c \cdot t$ nimmt, der durch die Formel des vorigen §. ausgedrückte Werth von $q$, wenn man sie auf den Punkt $A$ anwendet, immer $= \varrho = B$ werde: es müssen daher, weil hier $S\varrho = 0$ ist, die Scalen nach $Am$ und $Fn$ so fortgesetzt werden, daſs wenn $S = a$ ist, $S^2 . (TM + tm) - S(TN - tn) + TNtn = 0$ sey, und dieses muſs so geschehen, daſs die Fortsetzung der einen Scale nicht von der Fortsetzung der andern abhänge. Dieses wird in Rücksicht der Dichtigkeitsscale sehr leicht erreicht, wenn man $tm = - TM$ nimmt, oder die ganze Scale $AM$ nach der entgegengesetzten Richtung an der andern Seite der Axe zeichnet. Um aber auch die Fortsetzung der Scale der Geschwindigkeiten zu finden, sey $AT = At = x$, $TN = y$ und $tn = z$. Da nun

$$TNtn - a\,(TN - tn) = 0$$

seyn muſs, so wird

$$\int y\,dx + \int z\,dx - ay + az = 0,$$

daher $y\,dx + z\,dx - a\,dy + a\,dz = 0,$

und, wenn man mit $e^{\frac{x}{a}}$ multiplicirt und integrirt,

$$az.e^{\frac{x}{a}} = \int .e^{\frac{x}{a}}(a\,dy - y\,dx) = e^{\frac{x}{a}}.ay - 2\int e^{\frac{x}{a}}.y\,dx,$$

$$\text{also } z = y - \frac{2}{a}.e^{-\frac{x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}y\,dx,$$

und das Integral muſs so genommen werden, daſs es mit $x$ zugleich verschwindet.

Wir wollen nun zur Betrachtung des zweiten Falles übergehen, da die Röhre in $A$ geschlossen ist: alsdann muſs hier immer $s = 0$ (Fig. 96.) seyn, und da auch anfangs in diesem Punkte $\Upsilon = 0$ ist, so geht die Scale der Geschwindigkeiten durch $A$; über die Beschaffenheit der Dichtigkeitsscale aber wird nichts bestimmt.

Die Vergleichung der Gleichung für $s$ zeigt, daſs $TN + tn = 0$ und $-a^2(TM - tm) - a.TMtm = 0$ seyn muſs. Die Scale der Geschwindigkeiten wird also an der entgegengesetzten Seite der Axe so fortgesetzt, daſs gleichen Abscissen $At = AT$ gleiche Ordinaten zugehören. Für die Dichtigkeitsscale aber nenne man $AT = At = x$, $TM = y$, $tm = z$, so muſs

$ay - az + \int y\,dx + \int z\,dx = 0$ seyn, also

$a\,dy - a\,dz + y\,dx + z\,dx = 0$ und

$$e^{-\frac{x}{a}}.az = \int e^{-\frac{x}{a}}(a\,dy + y\,dx) = e^{-\frac{x}{a}}.ay + 2\int e^{-\frac{x}{a}}.y\,dx,$$

daher ist für die Fortsetzung dieser Scale

$$z = y + \frac{2}{a}e^{\frac{x}{a}}\int e^{-\frac{x}{a}}.y\,dx.$$

487. Im ersten Falle, wenn die Röhre in $A$ offen ist, hat also die Fortsetzung der Geschwindigkeitsscale die Eigenschaft, daſs $AFtn + AFTN = a(TN - tn)$ (Fig. 95.)

ist, und man hat also, nachdem $tn$ gefunden worden,

$$AFtn = IA . (TN - tn) - AFTN.$$

Auf ähnliche Weise hat man, wenn die Röhre in $A$ (Fig. 96.) geschlossen ist, für die Scale der Dichtigkeiten, nachdem $tm$ bestimmt ist, die Fläche

$$ACtm = IA . (tm - TM) - ACTM.$$

488. Ist im ersten Falle die Störung des Gleichgewichts so beschaffen, daſs dabei keine Geschwindigkeit Statt findet, so fällt sowohl die Scale $FN$ selbst, als ihre Fortsetzung mit der Axe zusammen.

Im zweiten Falle, wenn die Röhre in $A$ geschlossen ist, findet eben das für die Scale der Dichtigkeit Statt, wenn bei der anfänglichen Erschütterung die Dichtigkeit ungeändert blieb.

Ist aber dieses nicht der Fall, sondern haben $Q - B$ im letzten und $\Upsilon$ im ersten Falle Werthe, die von Null verschieden sind, so ist die Fortsetzung der einen Scale immer gar sehr von dieser Scale selbst verschieden, und ihre Construction läſst sich nur mit Hülfe von Quadraturen ausführen.

489. Problem 102. Wenn die Röhre sich in $B$ endigt, die Fortsetzung der Scalen über $B$ hinaus zu bestimmen, sowohl für den Fall, da die Röhre hier offen, als da sie geschlossen ist, wenn $B$ den vom Mittelpunkt der Hyperbel abwärts gekehrten Endpunkt bezeichnet.

Auflösung. Es sey die Entfernung $IB = b$ (Fig 97.) vom Mittelpunkte der Hyperbel angerechnet, und zuerst die Röhre in $B$ offen, also hier immer die Dichtigkeit der natürlichen Dichtigkeit gleich $= B$, so muſs die Scale der Dichtigkeit $mB$ durch $B$ gehen: die Scale der Geschwindigkeit aber sey $nf$.

Man nehme von $B$ nach beiden Seiten die Abscissen $Bt = BT = x = c . t$, wenn $t$ die seit dem Anfange ver-

flossene Zeit bedeutet. Da nun nach §. 485. die Dichtigkeit in $B$,

$$q = \varrho\,[1 + \tfrac{1}{2}b^2(TM + tm) - \tfrac{1}{2}b(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TNtn]$$

ist, und diese immer $= \varrho = B$ seyn muſs, so wird $TM = -tm$, folglich auch hier die Scale der Dichtigkeiten an der entgegengesetzten Seite so fortgesetzt, daſs die Bogen $Bm$, $BM$ einander gleich und ähnlich sind. Für die Fortsetzung der Scale der Geschwindigkeiten hingegen hat man, wenn $tn = y$, $TN = z$ gesetzt wird,

$$\int y\,dx + \int z\,dx = bz - by, \text{ und daher}$$

$$e^{-\frac{x}{b}}.bz = \int e^{-\frac{x}{b}}(b\,dy + y\,dx) = e^{-\frac{x}{b}}.by + 2\int e^{-\frac{x}{b}}.y\,dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{b}}by + 2\int e^{-\frac{x}{b}}b\,dy$$

$$\text{und } z = y + \frac{2}{b}e^{\frac{x}{b}}\int e^{-\frac{x}{b}}.y\,dx = -y + 2e^{\frac{x}{b}}\int e^{-\frac{x}{b}}dy.$$

In dem zweiten Falle, da die Röhre in $B$ (Fig. 98.) verschlossen ist, wird die Scale der Geschwindigkeiten $nB$ so durch $B$ gehen, daſs hier immer $u = 0$ ist, also

$$0 = -b^2(TM - tm) - b.TMtm + b(TN + tn).$$

Die Scale der Geschwindigkeiten wird also so fortgesetzt, daſs $TN = -tn$ ist, und der Bogen $BN$ dem $Bn$ gleich und ähnlich, aber an der entgegengesetzten Seite der Axe gezeichnet wird.

Für die Fortsetzung der Scale $cm$ der Dichtigkeit aber ist, wenn man die Abscisse $Bt = BT = x$, die bekannte Ordinate $tm = y$, die unbekannte $TM = z$ nennt,

$$\int y\,dx + \int z\,dx + b(z - y) = 0 \text{ und}$$

$$z = y - \frac{2}{b}.e^{-\frac{x}{b}}\int e^{\frac{x}{b}}.y\,dx = -y + 2e^{-\frac{x}{b}}\int e^{\frac{x}{b}}dy.$$

490. Auch hier braucht man, wenn für die in $B$ offene Röhre die Ordinaten $TN$ der fortgesetzten Scale der Geschwindigkeit berechnet sind, die Fläche $BfTN$ (Fig. 97.) nicht besonders zu suchen, da

$$BfTN = IB(TN - tn) - Bftm \text{ ist.}$$

Eben so, wenn die Röhre in $B$ (Fig. 98.) verschlossen ist, wird die von der fortgesetzten Dichtigkeitsscale begränzte Fläche $BcTM = IB.(tm - TM) - Bctm$, wo man also blos $TM$ zu bestimmen braucht.

491. Wenn die Entfernung $IB = b$, in Vergleichung mit den Räumen $BT = Bt = x$, sehr groſs ist, so daſs $e^{\pm\frac{x}{b}} = 1$ wird, oder, wenn man den Bruch $\frac{x}{b}$ als unveränderlich betrachten kann, so wird

$$2e^{\pm\frac{x}{b}} \int e^{\mp\frac{x}{b}} dy = 2y,$$

und die Fortsetzungen der Scalen werden in beiden Fällen so wie bei cylindrischen Röhren.

492. Problem 103. Wenn die hyperbolisch-conoidische Röhre an dem Ende $A$ (Fig. 99) offen ist, und es wird irgendwo in einem kleinen Raume $GH$ innerhalb der Röhre das Gleichgewicht der Luft gestört, die Fortpflanzung dieser in $GH$ erregten Schwingung zu bestimmen.

Auflösung. Man zeichne über demjenigen Theile $GH$ der Axe, wo das Gleichgewicht gestört ist, die Scale der Dichtigkeiten $GMH$, und die Scale der Geschwindigkeiten $GNH$, so, daſs die Ordinaten der ersten $TM = \frac{1}{S^2} \log \frac{Q}{B}$, und der zweiten $TN = \frac{\Upsilon}{c.S}$ sind, wenn für den Punkt $T$ die Abscisse $IT = S$, vom Mittelpunkte $I$ der Hyperbel gerechnet, bezeichnet, und hier die anfängliche Dichtigkeit $= Q$, die Geschwindigkeit nach der Richtung $AH = \Upsilon$ war, und $B$ die natürliche Dichtigkeit der Luft, $c$ den Raum bedeutet, welchen der Schall in einer cylindrischen Röhre in einer Secunde durchläuft.

Nach den im vorletzten Probleme angeführten Regeln müssen nun die Scalen über $A$ hinaus fortgesetzt werden. Zuerst, da beide Scalen von $A$ bis $G$ mit der Axe zusammenfallen, muſs man auch nach der andern Seite von $A$

den Raum $Ag = AG$ nehmen, und auch hier die Scalen als mit der Axe zusammenfallend betrachten. Alsdann aber muſs, weil die Röhre in $A$ offen ist, über dem Raume $gh = GH$ der Axe die Dichtigkeitsscale der $GMH$ gleich und ähnlich an der entgegengesetzten Seite der Axe gezeichnet werden; für die Geschwindigkeitsscale müſste man die Fortsetzung nach den vorigen Regeln suchen; aber weil zu $AT = x$ nur für die äuſserst wenig verschiedenen Werthe, welche zwischen $x = AG$ und $x = AH$ fallen, reelle Ordinaten der Geschwindigkeitsscale gehören, so kann man $\frac{x}{a}$ als unveränderlich ansehen, und (§. 486. 491.) $z = y$ oder $tn = TN$ setzen, oder die Scale $gnh$ der $GNH$ gleich und ähnlich zeichnen, und an eben der Seite der Axe. Hiemit würde die ganze Fortsetzung vollendet seyn, wenn die Röhre sich nach der andern Seite von $H$ ins Unendliche erstreckte; ist aber dieses nicht der Fall, sondern endigt sie sich irgendwo in $B$, so muſs man auch jenseits $B$ die Scalen fortsetzen, und alsdann auch dieselben noch weiter über $A$ hinaus fortführen, auf ähnliche Weise, wie dies bei den cylindrischen Röhren gezeigt ist. Hier aber ist es blos mein Zweck, die Schwingung zu untersuchen, welche in der Oefnung $A$ entsteht, und sich von da in der freien Luft weiter fortpflanzt: die Wiederholungen des Schalles, welche nachher entstehen, will ich als bloſse Resonanzen hier nicht weiter betrachten, da davon schon im Vorigen die Rede gewesen ist.

Die Luft wird also in $A$ so lange in Ruhe bleiben, bis $t = \frac{AG}{c}$ ist, und dann wird eine Schwingung entstehen, wie sie den beiden zusammentreffenden Schlägen gemäſs ist. Man nehme nach beiden Seiten von $A$ die Entfernungen $AT = At = c.t$, und, weil des Punktes $A$ Entfernung von $l$, vom Mittelpunkte der Hyperbel und Anfangspunkte der Ordinaten $= a$ ist, so wird in den Glei-

chungen des 485. §. $S = a$ und $S\varrho = 0$, daher wird hier am Ende der Zeit $= t$ die Dichtigkeit

$$q = B[1 + \tfrac{1}{2}a^2(TM - tm) - \tfrac{1}{2}a(TN - tn) - area\, GTN],$$

oder, weil die Fläche $GTN$ als sehr klein kann weggelassen werden, $q = B$, wie die Natur der Sache erfordert. Für die Geschwindigkeit aber hat man

$$s = -\tfrac{1}{2}a^2c(TM + tm) + \tfrac{1}{2}a.c.(TN + tn), \text{ oder}$$

$$s = a^2.c.TM + a.c.TN = -\frac{a^2 c}{S^2} \log \frac{\varrho}{B} + \frac{a}{S} \tau,$$

der Raum endlich, um welchen das Lufttheilchen fortgerückt ist, $v = -a^2 . GTM + a . GTN$, und dieser wird immer sehr klein seyn.

493. Die Zeit, in welcher die Schwingung sich bis an $A$ fortpflanzt, ist also eben so groſs, wie in cylindrischen Röhren, und man darf schlieſsen, daſs überhaupt die Gestalt der Röhre auf die Schnelligkeit, mit welcher sich die Schwingungen fortpflanzen, keinen Einfluſs habe, obgleich sich dieses nicht strenge für alle Röhren beweisen läſst.

494. Ferner erhellet, daſs alles, was oben über die Wiederholung desselben Schalles, oder über die verschiedenen auf einander folgenden Schläge gesagt ist, auch hier gelte, da für Schwingungen, die sich durch einen sehr kleinen Raum erstrecken, eben die Fortsetzungen der Scalen gefunden werden, wie dort: es findet folglich auch hier eine Resonanz Statt, wie vorhin.

495. Ich habe dieses Problem vorzüglich deswegen hier angeführt, um es auf die Sprachröhre anzuwenden, deren Figur einer solchen hyperbolischen Röhre ziemlich ähnlich ist. Es sey also $kab$ (Fig. 100.) eine zwischen den Asymtoten $IB$ und $IK$ gezeichnete gleichseitige Hyperbel; und ein Theil derselben, der Bogen $ab$, bilde durch seine Umdrehung um die Axe $AB$ die Röhre, welche als Sprachrohr gebraucht wird. Wenn nun hier bei $Bb$ ein Schall erregt wird, oder eine Stimme hineinruft, so wird dadurch

zunächst an $B$ die Dichtigkeit $= Q$ gröſser, als die natürliche Dichtigkeit, und es wird der Luft eine Geschwindigkeit $= \Upsilon$ nach der Richtung $BA$ mitgetheilt, welche der in der Auflösung des Problems angenommenen Richtung entgegengesetzt ist.

Nun sey die Entfernung $IA = a$, $IB = b$, so wird, wenn der Schall in $Aa$ ankommt, dort der Luft eine Geschwindigkeit ertheilt, welche

$$s = \frac{a}{b}\Upsilon + \frac{a^2 c}{b^2} \log \frac{Q}{B}$$

ist, nach der Richtung $AI$.

Da hier $IA = a$ beträchtlich kleiner als $b$ ist, so würde diese Geschwindigkeit erheblich viel kleiner seyn, als $\Upsilon$, wenn sie nicht durch das zweite Glied vergröſsert würde, welches wegen des groſsen Coefficienten $c$ erheblich wird. Wenn nun dieses letzte Glied auch nur den Werth von $s$ um so viel vergröſsert, daſs $s$ ungefähr $= \Upsilon$ wird, so wird der Schall gleichwohl sehr verstärkt werden, weil die Oeffnung $Aa$, worin die eben so schnelle Schwingung verbreitet ist, so viel gröſser ist, und die Wirkung wird daher eben so verstärkt, als ob so viele Stimmen zugleich erschallten, so vielmal die Gröſse von $Bb$ in $Aa$ enthalten ist.

Wenn die Stimme $Bb$ ohne Sprachrohr in die freie Luft erschallte, so würde sie, nach allen Seiten fortgepflanzt, in der Entfernung $BA$ schon merklich geschwächt seyn: jetzt aber, da sie in dem ganzen Raume $Aa$ eine viel stärkere Schwingung bewirkt, als ohne das Rohr geschehen wäre, so muſs offenbar auch der erregte Schall weit stärker seyn. Zugleich aber kann man hieraus wohl schlieſsen, daſs die Gestalt der Röhre, wenn sie nur einigermaſsen dieser ähnlich ist, nicht viel Einfluſs auf diese Verstärkung habe.

496. Auch die Töne der Trompete, des Waldhorns, und ähnlicher Instrumente, scheinen aus diesen Lehren er-

klärt werden zu müssen. Diese weichen darin von den Flöten ab, dafs bei ihnen schon durch die Oefnung ein Ton eingeblasen wird, entweder aus dem Munde des Blasenden, oder, indem an diesem Ende ein elastischer Körper in schwingende Bewegung gesetzt wird, statt dafs bei den Flöten durch Einblasen neuer Luft die ganze in denselben enthaltene Luftmasse in Bewegung gesetzt wird, und so eine oscillirende Bewegung entsteht, welche den Ton bestimmt. Bei den Trompeten und ähnlichen Instrumenten findet also eine solche, an einer bestimmten Stelle erregte Schwingung Statt, wie die hier betrachteten, und diese pflanzt sich durch die ganze Länge der Röhre fort. Die Höhe und Tiefe des Tones hängt also hier vorzüglich von den auf einander folgenden Schlägen oder Schwingungen ab, die an der Oefnung hervorgebracht werden, und deswegen sind die Töne bei diesen Instrumenten von den Flötentönen sehr verschieden. — Indefs hängt der Ton auch hier zum Theil von der Länge und Figur der Röhre ab, und diese Umstände vereinigen sich mit jenen; daher kann auch nicht jeder Ton auf diesem Instrumente hervorgebracht werden, sondern nur gewisse Töne, die ungefähr nach dem Verhältnisse der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 u. s. w. bestimmt werden. Dieses fand, wie wir gesehen haben, auch bei den Flöten Statt, und so scheint es, dafs die Töne des Horns und der Trompete ebenfalls zum Theil von Schwingungen der in der Röhre enthaltenen Luftmasse herrühren. Ganz vollständige Aufschlüsse dürfen wir hier von der noch nicht genug vollendeten Theorie wohl nicht erwarten *).

497. Problem 104. Wenn in einer hyperbolischen Röhre *AabB* (Fig. 101.), welche an beiden Enden offen

---

*) Nach Chladni hängen auch bei diesen Instrumenten die Töne hauptsächlich von der Länge der schwingenden Luftsäule ab. — — Indefs gibt eine divergirende Röhre bei gleicher Länge etwas höhere Töne, als die cylindrische. Chladni's Akustik, §. 71. 72.

ist, das Gleichgewicht der Luft auf eine solche Weise gestört wird, daſs blos die Dichtigkeit eine Aenderung leidet, aber im anfänglichen Zustande den Lufttheilchen keine Geschwindigkeit mitgetheilt ist, die oscillirende Bewegung zu bestimmen, welche die Luft in der Röhre nachher annimmt.

Auflösung. $I$ sey der Mittelpunkt der Hyperbel, aus deren Umdrehung die Röhre entsteht: die Entfernung eines unbestimmten Punktes $S$ der Röhre von demselben $IS$ sey $= S$, und die anfängliche Dichtigkeit sey hier $= Q$, statt daſs die natürliche Dichtigkeit $= B$ ist.

Wenn man hier die Ordinate $SQ = \frac{1}{S^2} \log \frac{Q}{B}$ nimmt, so liegt $Q$ in der Scale der Dichtigkeiten $AQB$, und diese muſs in beiden Endpunkten der Röhre $A$, $B$, da dieselbe offen ist, die Axe schneiden. Die Fortsetzung dieser Scale findet man leicht, da man sie blos wechselsweise oberhalb und unterhalb der Axe zu wiederholen braucht, und zwar so, daſs die Punkte $A$, $B$, $A'$, $B'$, $A''B''$, welche um Entfernungen $= AB$ auseinander liegen, Mittelpunkte der von ihnen ausgehenden gleichen Bogen werden. Die Scale der Geschwindigkeiten fällt hier ganz mit der Axe zusammen.

Um nun den Zustand desjenigen Lufttheilchens, welches sich anfangs in $S$ befand, am Ende der Zeit $= t$ zu bestimmen, nehmen wir nach beiden Seiten von $S$ die Entfernungen $ST = St = c \cdot t$, wo $c$ den Raum bedeutet, den der Schall in einer Secunde durchläuft. So wird (§. 485.)

I. Die Dichtigkeit

$$q = Q\,[1 + \tfrac{1}{2} S^2 (TM + tm - 2\,SQ)],$$

II. Die Geschwindigkeit

$$u = -\tfrac{1}{2} c \,.\, S^2 (TM - tm) - \tfrac{1}{2} c S \,.\, TMtm,$$

III. Der Raum, um welchen das Theilchen fortgerückt ist,

$$Ss = \tfrac{1}{2} S^2 (SQtm - SQTM).$$

Nimmt man nun $ST = St = 2AB$, welches geschehen mufs, wenn die Zeit $t = \frac{2AB}{c}$ verflossen ist, so wird $TM = tm = SQ$, und daher die Dichtigkeit $q = Q$, die Geschwindigkeit $u = 0$, der Raum $Ss = 0$, indem dann $SQtm = SQTM = 0$ ist.

498. Die Luft in der Röhre hat also während der Zeit $= \frac{2AB}{c}$ zwei Oscillationen vollendet, und es geschehen in einer Secunde $\frac{c}{AB}$ Oscillationen.

In diesem bestimmten Falle also, wenn keine anfängliche Geschwindigkeit Statt findet, geschehen die Oscillationen eben so schnell, als in einer cylindrischen Röhre, und die hyperbolische würde mit dieser einerlei Ton angeben.

499. Unsre Rechnung zeigt, dafs die Luft wieder in ihren anfänglichen Zustand zurückgekommen ist, also zwei Oscillationen vollendet hat, nachdem $t = \frac{2AB}{c}$ geworden ist; aber hieraus folgt noch nicht, dafs am Ende der halben Zeit $= \frac{AB}{c}$ eine Oscillation vollendet sey, sondern dieses würde nur dann der Fall seyn, wenn die Scale $AQB$ aus zwei ähnlichen Theilen bestände, oder einen Durchmesser hätte, welcher in der Mitte der Linie $AB$ auf diese senkrecht wäre. Ist dieses nicht der Fall, so werden die Oscillationen so auf einander folgen, dafs die Zeiträume abwechselnd grofs und klein sind, wobei kein so reiner Ton entstehen kann, als wenn sie alle isochronisch wären. Dieses ist vielleicht ein Hauptgrund, weswegen cylindrische Röhren reinere Töne geben, als convergirende oder divergirende Röhren. Noch mehr aber entfernt sich die Natur der Schwingungen von den bei cylindrischen Röhren

gefundenen, wenn man bei der anfänglichen Schwingung auch eine Geschwindigkeit annimmt: indefs, wie auch die Scale dieser Geschwindigkeiten beschaffen seyn mag, so erhellt aus §. 485., dafs die folgenden Oscillationen so aus beiden Scalen bestimmt werden, dafs man sie als aus der Wirkung beider Umstände, für sich genommen, zusammengesetzt betrachten kann. Wir wollen daher jetzt annehmen, bei der anfänglichen Schwingung bleibe die Dichtigkeit ungeändert, und untersuchen, wie die blos aus der Scale der Geschwindigkeiten bestimmten Schwingungen ausfallen: alsdann wird man aus der Verbindung beider Wirkungen herleiten können, wie die Schwingungen sich verhalten, wenn beide Scalen zugleich in Betrachtung gezogen werden.

500. Problem 105. Wenn bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts die Dichtigkeit überall ungeändert bleibt, und blos eine Bewegung mitgetheilt worden ist, die folgenden Oscillationen in einer an beiden Enden ofnen hyperbolischen Röhre $AaBb$ (Fig. 102.) zu bestimmen.

Auflösung. Es sey $FYG$ die gegebne Scale der Geschwindigkeiten, welche aus der anfänglichen Geschwindigkeit T so bestimmt wird, dafs $SY = \frac{T}{c \,.\, S}$ ist, wenn $S = IS$ den Abstand desjenigen Punktes $S$ vom Mittelpunkte $I$ der Hyperbel bezeichnet, wo anfangs die Geschwindigkeit nach der Richtung $AB = T$ war. Diese Scale mufs nun nach den Regeln des 486. und 489. §. über die Endpunkte der Röhre hinaus fortgesetzt werden. — Es sey $IA = a$, $IB = b$, und für die zu bestimmende Fortsetzung über $A$ hinaus die Abscisse $AS' = AS = x$, also $x = S - a$, und die gegebne Ordinate $SY = y$, so wird die gesuchte Ordinate $S'Y' = z$,

$$S'Y' = z = y - \frac{2}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\, dx,$$

wo das Integral so muſs genommen werden, daſs es mit $x = 0$ verschwindet. Weil nun $x = S - a$, so wird

$$S'Y' = SY - \frac{2}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS \,.\, SY,$$

und die Fläche $AFS'Y' = a(SY - S'Y') - AFSY$.

Auf ähnliche Weise wird in $B$ die Fortsetzung gefunden. Es sey jetzt $BS'' = BS = x = b - S$, und wieder $SY = y$, so wird die Ordinate in $S''$,

$$S''Y'' = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{-\frac{x}{b}} y\,dx,$$

$$S''Y'' = SY - \frac{2}{b} e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} \,.\, dS \,.\, SY,$$

und die Fläche $BGS''Y'' = b(S''Y'' - SY) - BGSY$.

Hiemit sind aber die Fortsetzungen der Scalen erst bis an $B'$ und $A'$ gefunden, wenn man $AB' = BA' = AB$ nimmt: um sie weiter fortzuführen, kehren wir zu dem Punkte $A$ zurück, und setzen

$$AS''' = AS'' = x = 2b - a - S,$$

aber $S''Y'' = y$, so wird die in $S'''$ zu errichtende Ordinate

$$S'''Y''' = y - \frac{2}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\,dx, \text{ oder}$$

$$S'''Y''' = S''Y'' + \frac{2}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} dS \,.\, S''Y'',$$

das ist, wenn man für $S''Y''$ seinen Werth setzt:

$$S'''Y''' = SY - \frac{2}{b} e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS \,.\, SY + \frac{2}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} dS \,.\, SY$$
$$- \frac{4}{ab} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\left(\frac{S}{a} + \frac{S}{b}\right)} dS \int e^{\frac{S}{b}} dS \,.\, SY,$$

das letzte Glied ist aber, wenn man theilweise integrirt,

$$= -\frac{4}{ab} e^{\frac{S}{a}} \Big\{ -\frac{ab}{a+b} e^{-\frac{S(a+b)}{ab}} \int e^{\frac{S}{b}} dS \,.\, SY$$
$$+ \frac{ab}{a+b} \int e^{-\frac{S}{a}} dS \,.\, SY \Big\},$$

folglich

$$S'''Y''' = SY + \frac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} . dS . SY$$
$$+ \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} dS . SY.$$

Kehren wir abermals zu dem Endpunkt $B$ zurück, und setzen $BS^{IV} = BS' = x = b - 2a + S$ und $S'Y' = y$, so wird die in $S^{IV}$ zu errichtende Ordinate

$$S^{IV}Y^{IV} = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{-\frac{x}{b}} y dx,$$

$$S^{IV}Y^{IV} = S'Y' + \frac{2}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{-\frac{S}{b}} dS . S'Y',$$

oder durch die Substitution des für $S'Y'$ gefundenen Werthes

$$S^{IV}Y^{IV} = SY - \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{-\frac{S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} . dS . SY$$
$$- \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{S}{b}} \int e^{-\frac{S}{b}} dS . SY.$$

Eben so könnte man die fernern Fortsetzungen bestimmen.

Wir wollen jetzt zu bestimmen suchen, in welchem Zustande das Lufttheilchen, welches anfangs in $S$ war, sich befindet, wenn die Zeit $t = \frac{2AB}{c}$ verflossen ist: alsdann ist $c.t = 2AB = SS'''$ und $= SS^{IV}$, daher müssen wir in der allgemeinen Gleichung §. 485. $TN = S^{IV}Y^{IV}$ und $tn = S'''Y'''$ setzen, folglich die Dichtigkeit

$q = Q[1 - \frac{1}{2}S(S^{IV}Y^{IV} - S'''Y''') + \frac{1}{2}\ \text{area}\ S'''Y'''S^{IV}Y^{IV}]$,

die Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}c.(S^{IV}Y^{IV} + S'''Y''')$,

der Raum $Ss = v = \frac{1}{2}S.S'''Y'''S^{IV}Y^{IV}$.

Die Fläche $S'''Y'''S^{IV}Y^{IV}$ läſst sich durch die Ordinaten ausdrücken, weil

I. $SYS'Y' = a(SY - S'Y')$,

II. $S''Y''S'''Y''' = a(S''Y'' - S'''Y''')$,

III. $SYS''Y'' = b(S''Y'' - SY)$,

IV. $S'Y'S^{IV}Y^{IV} = b(S^{IV}Y^{IV} - S'Y')$,

aus welchen, wenn man sie verbindet, folgt:

IV—I. - $SYS^{IV}Y^{IV} = b(S^{IV}Y^{IV} - S'Y') - a(SY - S'Y')$,

II—III. - $SYS'''Y''' = a(S''Y'' - S'''Y''') - b(S'Y'' - SY)$,

daher die Fläche

$$S'''Y'''S^{IV}Y^{IV} = (b-a)(SY - S'Y' - S''Y'') + b \,.\, S^{IV}Y^{IV} - a S'''Y''',$$

oder, wenn man die Werthe der Coordinaten substituirt und $SY = y$ setzt, diese Fläche

$$= \frac{2(b-a)}{(a+b)} \left\{ e^{-\frac{S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} . y dS - e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} . y dS + e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} . y dS - e^{\frac{S}{b}} \int e^{-\frac{S}{b}} y dS \right\},$$

wo man die Integrale so nehmen muſs, daſs die, welche $a$ enthalten, verschwinden, wenn $S = a$ ist, diejenigen aber, welche $b$ enthalten, verschwinden, wenn $S = b$ ist. Diese Fläche, mit $\frac{1}{2}S$ multiplicirt, gibt den Raum $Ss$, um welchen das Lufttheilchen fortgerückt ist. Um aber $q$ und $s$ zu bestimmen, muſs man noch folgende Ausdrücke zu Hülfe nehmen:

$$S^{IV}Y^{IV} - S'''Y''' = -\frac{2(b-a)}{a+b} \left\{ \frac{1}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} . y dS + \frac{1}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} y dS + \frac{1}{b} e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} y dS + \frac{1}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{-\frac{S}{b}} y dS \right\}$$

und

$$S^{IV}Y^{IV} + S'''Y''' = 2y - \frac{2(b-a)}{a+b} \left\{ \frac{1}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} . y dS - \frac{1}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{-\frac{S}{a}} y dS - \frac{1}{b} e^{-\frac{S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} y dS + \frac{1}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{-\frac{S}{b}} y dS \right\}$$

501. Diese Untersuchung zeigt, daſs der Zustand der Luft am Ende der Zeit $= \frac{2AB}{e}$ sehr weit von dem anfänglichen verschieden seyn könne, wenn anfangs den Lufttheilchen eine Geschwindigkeit mitgetheilt war; indeſs wird dieser Unterschied desto kleiner, je kleiner der Bruch

$\frac{2(b-a)}{a+b}$ wird, und je mehr die Scale der Geschwindigkeiten $FYG$ sich der Axe nähert, oder je kleiner die anfängliche Geschwindigkeit ist.

502. Man kann also hier, wo eine anfängliche Geschwindigkeit Statt findet, nicht annehmen, daſs am Ende der Zeit $= \frac{2AB}{c}$ zwei Oscillationen vollendet sind, und noch weniger wird sich eine andre bestimmte Zeit angeben lassen, wenn dieses der Fall sey, und wegen dieser Unregelmäſsigkeit der Oscillationen wird auch der Ton, welchen eine solche Röhre angibt, rauh und zur Harmonie untauglich seyn.

503. Hyperbolische Röhren haben also, wenn man sie als musicalische Instrumente gebrauchen wollte, den groſsen Fehler, daſs sie keine reine, wohlklingende Töne geben, weil sich die Bewegung nicht in bestimmte Oscillationen auflösen läſst, und dieser Fehler ist desto merklicher, je stärker ein solches Instrument geblasen wird, weil die Oscillationen sich dann am wenigsten unterscheiden lassen: bei einem sanften Anblasen könnten sie wohl noch einen erträglichen Ton geben.

Es läſst sich auch wohl einsehen, daſs nicht die hyperbolischen Röhren allein diesen Fehler haben, sondern daſs er bei allen Röhren desto mehr Statt finden werde, je mehr sie sich von der cylindrischen Form entfernen: dieses ist also der Grund, warum man sich bei Orgeln blos der cylindrischen Pfeifen, welche allein zum musicalischen Gebrauch tauglich sind, bedient.

Wollte man die hyperbolische Röhre an einem Ende verschlieſsen, so würden die Töne noch rauher werden, weil alsdann keine der beiden Scalen, wenn man sie für sich betrachtet, reguläre Oscillationen gäbe. — Es ist daher nicht der Mühe werth, diesen Fall umständlich zu untersuchen.

## Sechster Abschnitt.

### *Von den kleinen Schwingungen der Luft in conischen Röhren.*

---

504. Problem 106. Wenn in einer conischen Röhre das Gleichgewicht auf irgend eine Weise (unendlich wenig) gestört wird, die Scalen anzugeben, welche man bei der Bestimmung des Zustandes der Luft für jeden folgenden Zeitpunkt braucht.

Auflösung. Es sey $A$ (Fig. 103.) des Kegels Spitze, $AB$ seine Axe, und für einen unbestimmten Punkt $S$ der Axe sey die Entfernung von der Spitze $AS = S$. Wir behalten die vorigen Bezeichnungen bei, dafs $B$ die beim Gleichgewichte Statt findende Dichtigkeit, $Q$ aber diejenige Dichtigkeit bezeichnet, welche im Anfange der Bewegung das Lufttheilchen in $S$ hat, und $\Upsilon$ die Geschwindigkeit eben desselben nach der Richtung $AB$ für den anfänglichen Zustand bedeutet.

Da nun in $S$ der Querschnitt der Röhre $\Omega = n^2 S^2$ ist, so müssen wir, um §. 471. hiemit zu vergleichen, dort $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ setzen, wodurch $M = -\frac{1}{S}$ und $L = \frac{1}{S^2}$ wird. Die Formeln des 471. §. geben daher, wenn man auf die Wirkung der Schwere nicht Rücksicht nimmt,

$$O = \frac{1}{S^2} \int S^2 dS \log \frac{Q}{B},$$

und man findet für den Zustand des anfangs in $S$ befindlichen Lufttheilchens, am Ende der Zeit $= t$, den Raum $Ss$, um welchen dasselbe fortgerückt ist,

$$v = \frac{1}{S^2} \int S^2 dS \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Gamma' : (S + ct) + \frac{1}{S^2} \Gamma : (S + ct)$$
$$- \frac{1}{S} \Delta' : (S - ct) + \frac{1}{S^2} \Delta : (S - ct).$$

Die Geschwindigkeit $x = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ wird daher

$$x = -\frac{c}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{c}{S^2}\Gamma':(S+ct)$$
$$+\frac{c}{S}\Delta'':(S-ct) - \frac{c}{S^2}\Delta':(S-ct);$$

für die Dichtigkeit $= q$ war §. 463. die allgemeine Gleichung

$$q = Q\left\{1 - \frac{v\,d\Omega}{\Omega\,dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right\};\text{ nun ist hier}$$

$$\left(\frac{dv}{dS}\right) = -\frac{2}{S^3}\int S^2\,dS\log\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{2}{S^2}\Gamma':(S+ct)$$
$$-\frac{2}{S^3}\Gamma:(S+ct)$$
$$+\log\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}\Delta'':(S-ct) + \frac{2}{S^2}\Delta':(S-ct) - \frac{2}{S^3}\Delta:(S-ct),$$

ferner $\frac{d\Omega}{\Omega\,dS}$ hier $= \frac{2}{S}$, daher

$$\frac{v\,d\Omega}{\Omega\,dS} = \frac{2}{S^3}\int S^2\,dS\log\frac{Q}{B} - \frac{2}{S^2}\Gamma':(S+ct) + \frac{2}{S^3}\Gamma:(S+ct)$$
$$-\frac{2}{S^2}\Delta':(S-ct) + \frac{2}{S^3}\Delta:(S-ct),$$

daher

$$q = Q\left\{1 - \log\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{1}{S}\Delta'':(S-ct)\right\}.$$

Wendet man diese Gleichungen auf den anfänglichen Zustand an, so wird für $t = 0$

$$v = \frac{1}{S^2}\int S^2\,dS\log\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}(\Gamma':S+\Delta':S) + \frac{1}{S^2}(\Gamma:S+\Delta:S),$$

$$q = Q\left\{1 - \log\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}(\Gamma'':S+\Delta'':S)\right\},$$

$$x = -\frac{c}{S}(\Gamma'':S-\Delta'':S) + \frac{c}{S^2}(\Gamma':S-\Delta':S),$$

und weil alsdann $v = 0$, $q = Q$, $x = \Upsilon$ seyn muſs, so

erhalten wir zur Bestimmung der beiden Functionen die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad - - \int S^2 dS \log \frac{Q}{B} - S(\Gamma' : S + \Delta' : S) + \Gamma : S + \Delta : S = 0,$$

$$\text{II.} \quad - - - \quad S \,.\log \frac{Q}{B} - \Gamma'' : S - \Delta'' : S = 0,$$

$$\text{III.} \quad - - - - - \frac{S^2 \Upsilon}{c} = - S(\Gamma'' : S - \Delta'' : S) + \Gamma' : S - \Delta' : S,$$

wo die zweite blos das Differential der ersten ist. Der Kürze wegen sey $\Gamma' : S + \Delta' : S = y$ und $\Gamma' : S - \Delta' : S = z$,

so gibt $\quad \text{II.} \quad - - - \quad dy = S dS \log \dfrac{Q}{B},$

$$\text{III.} \quad - - - \quad \frac{1}{c} S^2 \Upsilon dS = - S dz + z dS,$$

$$\text{folglich } y = \int S dS . \log \frac{Q}{B} \text{ und } \frac{-z}{S} = \frac{1}{c} \int \Upsilon dS,$$

$$\text{oder } z = - \frac{S}{c} \int \Upsilon dS; \text{ es muſs also}$$

$$\Gamma' : S = \tfrac{1}{2} \int S dS \log \frac{Q}{B} - \frac{S}{2c} \int \Upsilon dS,$$

$$\Delta' : S = \tfrac{1}{2} \int S dS \log \frac{Q}{B} + \frac{S}{2c} \int \Upsilon dS$$

werden, und ferner

$$\Gamma'' : S = \tfrac{1}{2} S \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{2c} \int \Upsilon dS - \frac{S . \Upsilon}{2c},$$

$$\Delta'' : S = \tfrac{1}{2} S \log \frac{Q}{B} + \frac{1}{2c} \int \Upsilon dS + \frac{S . \Upsilon}{2c},$$

endlich durch Integration

$$\Gamma : S = \tfrac{1}{2} S \int S dS \log \frac{Q}{B} - \tfrac{1}{2} \int S^2 dS \log \frac{Q}{B} - \frac{S^2}{4c} \int \Upsilon dS + \frac{1}{4c} \int S^2 \Upsilon dS,$$

$$\Delta : S = \tfrac{1}{2} S \int S dS \log \frac{Q}{B} - \tfrac{1}{2} \int S^2 dS \log \frac{Q}{B} + \frac{S^2}{4c} \int \Upsilon dS - \frac{1}{4c} \int S^2 \Upsilon dS.$$

Man construire nun über der Axe die Linien $AQD$ und $AYF$, so daſs man die Ordinaten der ersten

$$SQ = S \log \frac{Q}{B},$$

$$\text{der zweiten } SY = \frac{1}{c} \int \Upsilon dS + \frac{1}{c} S . \Upsilon$$

nimmt, so bestimmen diese Curven die Natur der Functionen $\Gamma$, $\Delta$ so, daſs
$\Gamma'' : S = \frac{1}{2} SQ - \frac{1}{2} SY$ und $\Delta'' : S = \frac{1}{2} SQ + \frac{1}{2} SY$ wird, daher
$\Gamma' : S = \frac{1}{2} ASQ - \frac{1}{2} ASY$ und $\Delta' : S = \frac{1}{2} ASQ + \frac{1}{2} ASY$,
und endlich, wenn man $\int dS . ASQ$ durch $\Sigma . (ASQ)$ andeutet, $\Gamma : S = \frac{1}{2}\Sigma(ASQ) - \frac{1}{2}\Sigma(ASY)$
und $\Delta : S = \frac{1}{2}\Sigma(ASQ) - \frac{1}{2}\Sigma(ASY)$.

Mit Hülfe jener Scalen läſst sich nun der Zustand der Luft in der Röhre nach Verlauf jeder gegebenen Zeit $= t$ bestimmen. Man nehme nämlich von $S$ an die Entfernungen $ST = St = c . t$, so erhält man für das Lufttheilchen, welches anfangs in $S$ war,

$$q = Q\left[1 - \frac{SQ}{S} + \frac{1}{2S}(TM - TN + tm + tn)\right],$$

$$x = \frac{c}{2S}(tm + tn - TM + TN) + \frac{c}{2S^2}(ATM - ATN - Atm - Atn),$$

endlich

$$v = Ss = \frac{1}{S^2}\int S^2 dS \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{2S}(ATM - ATN + Atm + Atn)$$
$$+ \frac{1}{2S^2}[\Sigma(ATM) - \Sigma(ATN) + \Sigma(Atm) + \Sigma(Atn),$$

wo in dem letzten Ausdrucke

$$\int S^2 dS \log \frac{Q}{B} = \int S . SQ . dS = S . ASQ - \Sigma(ASQ)$$

ist. Man kann diese Ausdrücke auch so darstellen:

$$q = Q\left[1 + \frac{1}{2S}(TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2S}(TN - tn)\right],$$

$$x = \frac{c}{2S}(tm - TM) + \frac{c}{2S}(tn + TN) + \frac{c}{2S^2}(TMtm - ATN - Atn),$$

$$Ss = \frac{1}{2S}(2ASQ - ATM - Atm) + \frac{1}{2S}tnTN$$
$$- \frac{1}{2S^2}[2\Sigma(ASQ) - \Sigma(ATM) - \Sigma(Atm)]$$
$$- \frac{1}{2S^2}[\Sigma(ATN) - \Sigma(Atn)].$$

505. Betrachtet man die Entfernung $AS$ als unendlich, so wird die conische Röhre ein Cylinder, und man behält zwar $\frac{SQ}{S} = \log\frac{Q}{B}$, muſs aber $\frac{SY}{S} = \frac{\Upsilon}{c}$ setzen, (weil nämlich $\int \Upsilon dS$ klein gegen $S.\Upsilon$ wird, wenn die Scale der Geschwindigkeiten sich nur über einen Raum erstreckt, welcher gegen das unendliche $S$ unbedeutend ist). Ferner ist $\frac{1}{S}ASQ = \int dS \log\frac{Q}{B}$ und $\frac{ASQ}{S^2} = 0$, aber

$$\frac{1}{S^2}\Sigma(ASQ) = \frac{1}{S^2}\int dS.ASQ = \frac{1}{S}ASQ = \int dS \log\frac{Q}{B},$$

ferner $\frac{1}{S}.ASY = \frac{1}{c}\int Y dS$ und $\frac{1}{S^2}.ASY = 0$,

$$\frac{1}{S^2}.\Sigma(ASY) = \frac{1}{c}\int \Upsilon dS,$$

und alsdann stimmen diese Formeln mit den für cylindrische Röhren gefundenen überein.

505 *b)*. Man kann dieses noch leichter übersehen, wenn man den Anfangspunkt der Abscissen verlegt. Es sey $S = a + x$, so kann man statt der Function $\Gamma : S$, $\Delta : S$ setzen $\Gamma : x$, $\Delta : x$, indem bei diesen noch ganz unbestimmten Functionen auf den Anfangspunkt der Abscissen nichts ankommt. Die vorhin gefundnen Werthe für $\Gamma'' : S$ und $\Delta'' : S$ geben jetzt

$$\Gamma'' : x = \tfrac{1}{2}(a+x)\log\frac{Q}{B} - \frac{1}{2c}\int \Upsilon\, dx - \frac{(a+x).\Upsilon}{2c},$$

$$\Delta'' : x = \tfrac{1}{2}(a+x)\log\frac{Q}{B} + \frac{1}{2c}\int \Upsilon\, dx + \frac{(a+x).\Upsilon}{2c}.$$

Setzt man hier $a = \sim$, so darf man alle Glieder, welche kein $a$ enthalten, weglassen, und es wird

$$\Gamma'' : x = \tfrac{1}{2} a \log \frac{Q}{B} - \frac{a\Upsilon}{2c},$$

$$\Delta'' : x = \tfrac{1}{2} a \log \frac{Q}{B} + \frac{a\Upsilon}{2c}.$$

Zeichnet man also die Scalen jetzt so, daſs für $AS = a + x$, $SQ = \log \frac{Q}{B}$ und $SY = \frac{\Upsilon}{c}$ werde, so stimmen diese Scalen mit den im §. 402. gebrauchten ganz überein, und man hat, wenn in Fig. 72. $A$ der Anfangspunkt der Abscisse ist,

$$\Gamma'' : x = a(\tfrac{1}{2} SQ - \tfrac{1}{2} SY),$$
$$\Delta'' : x = a(\tfrac{1}{2} SQ - \tfrac{1}{2} SY),$$
$$\Gamma'' : (x + c.t) = a(\tfrac{1}{2} TM - \tfrac{1}{2} TN),$$
$$\Delta'' : (x - ct) = a(\tfrac{1}{2} tm + \tfrac{1}{2} tn),$$
$$\Gamma' : (x + c.t) = \tfrac{1}{2} a.(ACTM - AETN),$$
$$\Delta' : (x - ct) = \tfrac{1}{2} a(ACtm + AEtn),$$

folglich, wenn man nun die in §. 504. gefundnen Werthe durch diese Scalen ausdrückt,

$$q = Q(1 - SQ + TM + tm - TN + tn),$$

weil $\frac{a}{S} = \frac{a}{a+x} = 1$ gesetzt wird,

$$z = \tfrac{1}{2} c(TN - TM + tn + tm),$$

weil $\frac{c}{(a+x)^2} . \Gamma' : (x + ct) = \frac{1}{2a} . (ACTM - AETN)$ wegen des unendlich groſsen Divisors verschwindet, und eben das für $\frac{c}{(a+x)^2} . \Delta' : (x - ct)$ gilt. Endlich erhält man für $v$, weil

$$\frac{1}{S^2} \int S^2 dS . \log \frac{Q}{B} = \frac{1}{a^2} \int a^2 dx \log \frac{Q}{B} = \int dx \log \frac{Q}{B},$$

und die Glieder, welche $S^2$ im Nenner enthalten, verschwinden, weil in ihrem Zähler nur die erste Potenz von $a$ vorkommt,

$$v = ACSQ + \tfrac{1}{2} AETN - \tfrac{1}{2} ACTM - \tfrac{1}{2} AEtn - \tfrac{1}{2} ACtm.$$

und diese Formeln sind ganz einerlei mit den in §. 402. für cylindrische Röhren gefundenen.

506. Die Construction der Scale für die Dichtigkeiten $AQD$ (Fig. 103.) hat keine Schwierigkeit; aber die zweite Scale $AYF$ wird nicht so leicht aus der anfänglichen Geschwindigkeit $\Upsilon$ bestimmt, weil sie eine Integralformel enthält. Um sie zu construiren, zeichne man vorher eine Curve $AvC$, deren Ordinaten $Sv$ die Geschwindigkeit $\Upsilon$ in dem Punkte $S$ selbst darstellen, und nehme dann der Curve $AYF$ Ordinaten $SY = \frac{1}{c}.AS.Sv + \frac{1}{c} ASv$; alsdann lassen sich die Flächenräume dieser Curve auch durch $ASY = \frac{1}{c} AS.ASv$ ausdrücken. Bringt man nun jene natürliche Scale der Geschwindigkeiten $AvC$ in die Rechnung, so ist $TN = \frac{1}{c}.AT.TL + \frac{1}{c}.ATL$,

$$tn = \frac{1}{c} At.tl + \frac{1}{c} Atl,$$

$$ATN = \frac{1}{c} AT.ATL \text{ und } Atn = \frac{1}{c} At.Atl,$$

daher wird die Geschwindigkeit

$$u = \frac{c}{2S}(tm - TM) + \frac{c}{2S^2} - tm\,TM$$
$$+ \frac{1}{2S}(AT.TL + At.tl) - \frac{c.t}{2S^2} TLtl,$$

weil nämlich

$$\frac{1}{2S}(ATL + Atl) - \frac{1}{2S^2}(AT.ATL + At.Atl$$
$$= \frac{1}{2S^2}(S - S - c.t)ATL + \frac{1}{2S^2}(S - S + ct)Atl \text{ ist.}$$

Diese Formel zeigt nun sogleich, daſs wenn anfangs in dem ganzen Raume $Tt$ die Dichtigkeit $= B$ und die Geschwindigkeit $= 0$ war, auch am Ende der Zeit $t$, $u = 0$

wird. Die vorige Formel zeigte dies nicht so deutlich; denn wenn anfangs irgendwo innerhalb des Raumes $At$ eine Bewegung Statt gefunden hätte, so würde die Linie $AvC$ eine Fläche einschliefsen, und wegen dieser Fläche erhielte die Curve $AFY$ auch für den ganzen übrigen Theil $tT$ der Abscissenlinie Ordinaten, die $>$ o wären, wenn auch $AvC$ dort mit der Axe zusammenfiele: es schiene daher zweifelhaft zu bleiben, ob die Glieder

$$\frac{c}{2S}(TN+tn) - \frac{c}{2S^2}(ATN+Atn)$$

in diesem Falle = o würden, welches hingegen deutlich erhellt, wenn man die Scale $AvC$ in die Rechnung einführt.

507. Auch das Glied $\Sigma(ASY)$, welches $= \int dS.ASY$ ist, läfst sich nun durch die natürliche Dichtigkeitsscale $Avc$ ausdrücken; es ist nämlich

$$\Sigma(ASY) = \frac{1}{c}AS.\Sigma(ASv) - \Sigma.\Sigma(ASv),$$

$$\text{oder} = \frac{1}{c}AS.\int dS.ASv - \int dS \int dS\,ASv,$$

$$\text{daher}\ \Sigma(ATN) = \frac{1}{c}[AT\Sigma(ATL) - \Sigma\Sigma(ATL)],$$

$$\text{und}\ \Sigma(Atn) = \frac{1}{c}[At\Sigma(Atl) - \Sigma\Sigma(Atl)].$$

Die Werthe von $q$, $s$ und $v$ werden also jetzt durch die Scale der Dichtigkeit $AQD$ und die Scale der Geschwindigkeit $AvC$ auf folgende Weise ausgedrückt:

$$q = Q[1 + \frac{1}{2S}(TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2cS}(AT.TL - At.tl + tlTL)],$$

$$s = \frac{c}{2S}(tm - TM) + \frac{c}{2S^2}TMtm + \frac{1}{2S}(AT.TL + At.tl) - \frac{ST}{2S^2}.tlTL,$$

$$Ss = \frac{1}{2S}(SQtm - SQTM) - \frac{1}{2S^2}[\Sigma(SQtm) - \Sigma(SQTM)]$$
$$+ \frac{1}{2cS}(AT.ATL - At.Atl) - \frac{1}{2cS^2}[AT.\Sigma(ATL)$$
$$- At.\Sigma(Atl) - \Sigma\Sigma(tlTL)],$$

welche Formeln zum Gebrauche bequemer sind.

508. Problem 107. Wenn in einer conischen Röhre *ABb* (Fig. 104.), welche sich ins Unendliche erstreckt, irgendwo in dem kleinen Raume *GH* eine Schwingung erregt wird, die Fortpflanzung derselben in der Röhre nach *Bb* zu bestimmen.

Auflösung. Da die Schwingung sich blos auf den Raum *GH* erstreckt, so muſs in den beiden Endpunkten dieses Raumes die Dichtigkeit so groſs, wie beim Gleichgewichte, und die Geschwindigkeit $= 0$ seyn. Es sey also *GlH* die Scale der Geschwindigkeiten, deren Ordinaten *tl* die in *t* Statt findende anfängliche Geschwindigkeit nach der Richtung *tB* darstellen, also $tl = \Upsilon$; ferner sey *GmH* die Scale der Dichtigkeiten, deren Ordinate

$$tm = At \,.\, \log \frac{Q}{B}$$

ist, wenn $Q : B$ das Verhältniſs der in *t* wirklich anfangs Statt findenden zu der dem Gleichgewichte entsprechenden Dichtigkeit ausdrückt.

Man betrachte nun einen bestimmten Punkt *S* der Röhre, und wenn $AS = S$, so wird, weil beide Scalen auſserhalb des Raumes *GH* mit der Axe zusammenfallen, die Luft in *S* so lange im Gleichgewichte bleiben, bis die Zeit $= \frac{SH}{c}$ Secunden verflossen ist, seit in *GH* die Schwingung erregt worden, und wenn die Zeit $= \frac{SG}{c}$ Secunden geworden ist, so wird die Schwingung in *S* vorübergegangen seyn: ihre ganze Dauer ist also $= \frac{GH}{c}$

Secunde. Es sey nun $t = \frac{St}{c}$, so wird, weil es für die nach der andern Seite zu nehmende Abscisse $ST = St$ keine Ordinaten gibt, der Zustand des anfangs in $S$ befindlichen Lufttheilchens durch folgende Gleichungen bestimmt: die Dichtigkeit $q = B\left[1 + \frac{tm}{2S} + \frac{At.tl}{2c.S} - \frac{Htl}{2cS}\right]$, weil die anfängliche Dichtigkeit in $S = B$ war, die Geschwindigkeit $x = \frac{c.tm}{2S} + \frac{c.Htm}{2S^2} + \frac{At.tl}{2S} - \frac{St.Htl}{2S^2}$.

Man kann hier die Flächen $Htm$, $Htl$ weglassen, weil der Raum $GH$ als äusserst klein betrachtet wird, alsdann läſst sich, da $tl = \Upsilon$ und $tm = At.\log\frac{Q}{B} = At.\frac{Q-B}{B}$ ist, $q$ und $x$ auf folgende Weise ausdrücken:

$$q = B\left\{1 + \frac{At}{2AS}\left(\frac{Q-B}{B}\right) + \frac{At.\Upsilon}{2c.AS}\right\},$$

$$\text{oder } \log\frac{q}{B} = \frac{At}{2AS}\left[\log\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right],$$

$$x = \frac{c.At}{2.AS}\left(\frac{Q-B}{B}\right) + \frac{At.\Upsilon}{2.AS} = \frac{At.c}{2.AS}\left[\log\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right].$$

509. Wenn der Raum $GH$ nicht ganz klein ist, so darf man die Flächen $Htl$, $Htm$ nicht bei Seite setzen, und dieses desto weniger, je näher $GH$ der Spitze des Kegels liegt, weil dann die Fläche $Htl$ in Vergleichung gegen $At.tl$ nicht als unbedeutend darf weggelassen werden. In diesem Falle ist vollständig

$$\log\frac{q}{B} = \frac{At}{2AS}\left[\log\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right] - \frac{Htl}{2c.AS} \text{ und}$$

$$x = \frac{c.At}{2.AS}\left[\log\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right] + \frac{c}{2.AS^2}\left[Htm - \frac{St}{c}.Htl\right],$$

wo $\frac{St}{c} = t$ der seit dem Anfange verfloſsnen Zeit gleich ist.

510. Wenn die verflossene Zeit gröſser ist, als $\frac{SG}{c}$, so fällt der Punkt $t$ jenseits $G$ gegen $A$ zu, wo anfangs $\log\frac{Q}{B} = 0$ und $\Upsilon = 0$ war, aber gleichwohl wird

$$\log\frac{q}{B} = -\frac{\text{area}\,.\,GlH}{2c\,.\,AS}$$

und $s = \frac{c}{2\,.\,AS^2}(\text{area}\ GmH - t\,.\,\text{area}\ GlH)$,

also ist das Gleichgewicht noch nicht wieder hergestellt. — Und dieses Resultat ist desto merkwürdiger, weil diese Abweichung vom Gleichgewichte fortzudauern scheint, und gar nicht aufhört, wie groſs auch $t$ angenommen werde.

Diese irrige Folgerung rührt aber wohl daher, weil wir auf die Fortsetzung der Scale über die Spitze $A$ hinaus nicht Rücksicht genommen haben: wir wollen daher die Untersuchung jetzt vollständiger anstellen, und suchen, wie die Fortsetzungen der Scalen beschaffen seyn müssen.

511. Problem 108. Wenn die conische Röhre nicht bis an die Spitze $I$ (Fig. 106.) vollständig ist, sondern sich in $Aa$ endigt, und hier entweder offen oder verschlossen ist, die Formeln zur Bestimmung der Bewegung der darin enthaltenen Luft für beide Fälle aus dem gegebnen anfänglichen Zustande herzuleiten.

Auflösung. Die Entfernung des Endpunktes $A$ von der Spitze $I$ des Kegels sey $IA = a$, und man bezeichne die Entfernung des unbestimmten Punktes $S$ von $Aa$ mit $s$, so daſs $AS = s$ und $IS = a + s$ sey. Die Dichtigkeit der Luft, welche beim Gleichgewichte Statt findet, sey $= B$, die Dichtigkeit, welche das Lufttheilchen $S$ anfangs hatte, $= Q$, die Geschwindigkeit desselben nach der Richtung $SB = \Upsilon$. Eben dasselbe Lufttheilchen habe am Ende der Zeit $= t$ die Dichtigkeit $= q$ und die Geschwindigkeit $= x$ erlangt, und sey um den Raum $Ss = v$ fortgerückt.

Da nun in $S$ die Weite der Röhre $\Omega = n^2 (a+s)^2$ ist, so wird $\frac{d\Omega}{\Omega\, dS} = \frac{2}{(a+s)}$, und die vorigen Formeln geben:

$$v = \frac{1}{(a+s)^2} \int ds\, (a+s)^2 \log \frac{Q}{B} - \frac{1}{a+s} \Gamma' : (s+ct)$$

$$+ \frac{1}{(a+s)^2} \Gamma : (s+ct) - \frac{1}{a+s} \Delta' : (s-ct) + \frac{1}{(a+s)^2} \Delta : (s-ct),$$

$$q = Q \left[1 - \log \frac{Q}{B} + \frac{1}{a+s} \Gamma'' : (s+ct) + \frac{1}{a+s} \Delta'' : (s-ct)\right],$$

$$x = \frac{-c}{a+s} \Gamma'' : (s+ct) + \frac{c}{a+s} \Delta'' : (s-ct) + \frac{c}{(a+s)^2} \Gamma' : (s+ct)$$

$$- \frac{c}{(a+s)^2} \Delta' : (s-ct).$$

Die Anwendung dieser Formeln auf den anfänglichen Zustand führt uns zu folgenden Gleichungen, aus welchen die Functionen $\Gamma$, $\Delta$ müssen bestimmt werden:

$$0 = \int (a+s)^2 ds \log \frac{Q}{B} - (a+s)(\Gamma' : s + \Delta' : s) + \Gamma : s + \Delta : s,$$

$$(a+s) \log \frac{Q}{B} = \Gamma'' : s + \Delta'' : s, \text{ und}$$

$$\Upsilon = - \frac{c}{(a+s)} (\Gamma'' : s - \Delta'' : s) + \frac{c}{(a+s)^2} (\Gamma' : s - \Delta' : s).$$

Die letzte gibt

$$\int \Upsilon\, ds = \frac{-c}{a+s} (\Gamma' : s - \Delta' : s),$$

oder $c(\Gamma' : s - \Delta' : s) = -(a+s) \int \Upsilon\, ds$

und $c(\Gamma'' : s - \Delta'' : s) = - \int \Upsilon\, ds - (a+s)\Upsilon$.

Verbindet man hiemit die zweite Gleichung

$$\Gamma'' : s + \Delta'' : s = (a+s) \log \frac{Q}{B}, \text{ so wird}$$

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s) \log \frac{Q}{B} - \frac{(a+s)\Upsilon + \int \Upsilon\, ds}{2c},$$

$$\Delta'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s) \log \frac{Q}{B} + \frac{(a+s)\Upsilon + \int \Upsilon\, ds}{2c}.$$

Um diese Functionen bequem auszudrücken, zeichne man zwei Scalen, so dafs die Ordinaten $SQ$ der ersten $CQc$, $SQ = (a+s)\log\frac{Q}{B}$, die Ordinaten der zweiten $DVd$, $SV = \frac{(a+s)\Upsilon + \int \Upsilon ds}{c}$ werden, so ist

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}SV,\quad \Delta'' : s = \tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}SV,$$
$$\text{und } \Gamma' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ - \tfrac{1}{2}ADSV,$$
$$\Delta' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ + \tfrac{1}{2}ADSV.$$

Vermöge der vorhin angegebenen Gleichungen kann man jetzt die Dichtigkeit $= q$ und die Geschwindigkeit $= x$, welche das anfangs in $S$ befindliche Lufttheilchen am Ende der Zeit $= t$ hat, mit Hülfe dieser Scalen angeben, wenn man $ST = St = c.t$ nimmt, indem alsdann wird

$$q = Q\left[1 + \frac{1}{2(a+s)}(TM - TN + tm + tn - 2SQ)\right],$$

$$x = \frac{c}{2(a+s)}(tm + tn - TM + TN) + \frac{c}{2(a+s)^2}(ACTM - ADTN - ACtm - ADtn),$$

und auch der Raum $Ss$, um welchen das Lufttheilchen fortgerückt ist, liefse sich leicht bestimmen.

Um nun zu bestimmen, wie die Scalen müssen fortgesetzt werden, nehme ich den Punkt $S$ als mit $A$ zusammenfallend an, dafs also $s = 0$ wird. Nimmt man nun die Abscissen $AT' = At' = c.t$, und denkt sich auch in $t'$ Ordinaten $t'm'$, $t'n'$ errichtet, welche noch erst bestimmt werden müssen, so erhält man Formeln für $q$ und $x$, wenn diese Gröfsen sich jetzt auf das anfangs in $A$ befindliche Theilchen beziehen: man mufs aber in diesen Formeln die Flächenräume, welche an der linken Seite von $A$ liegen, als negativ betrachten, weil wir vorhin die von hier an zur rechten Seite liegenden positiv annahmen. Es wird daher

$$q = Q\left[1 + \frac{1}{2a}(T'M' + t'm' - 2AC) - \frac{1}{2a}(T'N' - t'n')\right],$$

$$x = \frac{c}{2a}(t'm' - T'M') + \frac{c}{2a}(T'N' + t'n') + \frac{c}{2a^2}(ACT'M'$$
$$\pm ACt'm') - \frac{c}{2a^2}(ADT'N' - ADt'n').$$

Hier finden nun zwei verschiedene Fälle Statt, wo $t'm'$, $T'M'$ auf verschiedene Weise bestimmt werden, nämlich, je nachdem die Röhre in $Aa$ offen oder verschlossen ist.

I. Die Röhre sey in $Aa$ offen, so wird hier die Dichtigkeit unveränderlich $q = Q = B$ seyn, es ist daher für den anfänglichen Zustand $AC = 0$, und für die Fortsetzung der Scalen muſs nothwendig $T'M' + t'm' = 0$ und $T'N' = t'n'$ seyn. Beide Scalen werden also völlig eben so fortgeführt, wie es bei cylindrischen Röhren der Fall war, nämlich die Scale der Dichtigkeit an der entgegengesetzten Seite der Axe, die Scale der Geschwindigkeiten aber an eben derselben Seite der Axe (§. 407.).

II. Die Röhre sey in $Aa$ verschlossen, so wird hier $T = 0$, und auch in der Folge der Zeit allemal $x = 0$. Es muſs daher

$$a(t'm' - T'M') + ACT'M' + ACt'm' = 0$$

und $a(t'n' + T'N') - ADT'N' + ADt'n' = 0$

seyn. Die erste Gleichung bestimmt die Fortsetzung der Dichtigkeitsscale. Es sey für dieselbe $AT' = At' = x$, $T'M' = y$ und $t'm' = z$, so gibt jene Gleichung

$$az - ay + \int(y + z)dx = 0,$$

oder $adz + zdx - ady + ydx = 0$,

deren Integral ist

$$az \cdot e^{\frac{x}{a}} = \int e^{\frac{x}{a}}(ady - ydx) = e^{\frac{x}{a}} \cdot ay - 2\int e^{\frac{x}{a}} ydx$$
$$= -e^{\frac{x}{a}} \cdot ay + 2a\int e^{\frac{x}{a}} dy,$$

daher $z = t'm' = y - \frac{2}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} ydx$,

oder $= -y + 2e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$.

Für die Scale der Geschwindigkeiten muſs

$$a(t'n' + T'N') - ADT'N' + ADt'n' = 0$$

seyn, also, wenn man hier $AT' = At' = x$ und $T'N' = y$, $t'n' = z$ ist,

$$a(y+z) - \int(y+z)\,dx = 0,$$

$$\text{oder } adz + zdx + ady - ydx = 0,$$

$$\text{daher } az\,.\,e^{\frac{x}{a}} = -ay\,.\,e^{\frac{x}{a}} + 2\int e^{\frac{x}{a}}\,y\,dx$$

$$= ay\,.\,e^{\frac{x}{a}} - 2a\int e^{\frac{x}{a}}\,dy,$$

$$\text{oder } z = -y + \frac{2}{a}e^{-\frac{x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}\,y\,dx = y - 2e^{-\frac{x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}}\,dy,$$

wo für beide Fälle die Integrale so bestimmt werden müssen, daſs für $x = 0$, $z = y$ werde.

512. Da die Scalen, wenn die Röhre bei $Aa$ offen ist, eben so fortgesetzt werden müssen, wie bei cylindrischen Röhren, und eben dieses Gesetz auch Statt fände, wenn die Röhre sich in $Bb$ wieder endigte, und auch da offen wäre, so folgt von selbst, daſs die Oscillationen der Luft in einer conischen, an beiden Enden offenen Röhre ganz mit denen übereinkommen, welche wir bei cylindrischen Röhren fanden. Mithin gilt alles, was vorhin von den Tönen offener Flöten gesagt ist, auch noch, wenn die Röhre nicht cylindrisch, sondern conisch ist: doch darf man sie nicht allzusehr divergirend annehmen, weil sonst nicht alle in einerlei Querschnitte liegende Lufttheilchen auf einerlei Weise möchten bewegt werden, so wie wir hier annehmen.

513. Obgleich aber die Töne einer conischen Röhre, wenn sie an beiden Enden offen ist, mit den Tönen der cylindrischen Röhren übereinkommen, so gilt dies doch keinesweges, wenn die conische Röhre an einem Ende verschlossen ist. Im letztern Falle nämlich werden die Fortsetzungen der Scalen den Scalen selbst ganz unähnlich, und es können keine regelmäſsigen Oscillationen entstehen,

daher auch der hervorgebrachte Schall rauh und zur Harmonie unbrauchbar seyn wird.

514. Dieses Problem wird auf cylindrische Röhren angewandt, wenn man $a = \infty$ setzt. Alsdann erhält man auch, wenn die Röhre in $A$ verschlossen ist, für die Fortsetzung der Scalen $t'm' = T'M'$ und $t'n' = -T'N'$, weil die nicht mit $a$ multiplicirten Glieder in Vergleichung mit $a$ verschwinden.

515. Problem 109. Wenn an der Spitze $A$ (Fig. 105.) des Kegels eine kleine Schwingung hervorgebracht wird, die Fortpflanzung derselben in der conischen Röhre, mit Hülfe der gehörig fortgesetzten Scalen, vollständig zu bestimmen.

Auflösung. Um die Auflösung des vorigen Problems hier anzuwenden, muſs man zuerst, weil der Kegel bis an die Spitze vollständig ist, $a = 0$ setzen, zweitens aber, da die Röhre in $A$ nothwendig geschlossen ist, die Formeln des dortigen zweiten Falles anwenden. Bezeichnet also hier $AMD$ die Scale der Dichtigkeiten, deren Ordinate $TM = s \log \frac{Q}{B}$ ist, und $ANFN'$ die Scale der Geschwindigkeiten, deren Ordinate $TN = \frac{s\Upsilon + \int \Upsilon ds}{c}$ ist, so wird, wenn die anfängliche Schwingung sich blos durch den Raum $AD$ erstreckt, die Scale der Dichtigkeiten jenseits $D$ mit der Axe zusammenfallen, die Scale der Geschwindigkeiten aber jenseits $D$ mit der Axe parallel werden, weil das Glied $\int \frac{\Upsilon ds}{c}$ hier einen unveränderlichen Werth erhält. Um diese Scalen an der andern Seite von $A$ fortzusetzen, kehren wir zu den Gleichungen §. 511. II. zurück, und nennen hier $AT = At = x$, und für die Scale der Dichtigkeit $TM = y$, $tm = z$; für die Scale der Geschwindigkeit $TN = y'$, $tn = z'$. Die dortigen Gleichungen sind also für die Scale der Dichtigkeiten

$$adz - ady + zdx + ydx = 0,$$

für die Scale der Geschwindigkeiten

$$adz' + ady' + z'dx - y'dx = 0.$$

Da aber hier $a = 0$, so geben diese Gleichungen offenbar $z = -y$ und $z' = y'$; die Scale der Dichtigkeiten wird daher an der entgegengesetzten Seite der Axe, die Scale der Geschwindigkeiten aber an derselben Seite der Axe so fortgesetzt, daſs zu gleichen positiven und negativen, von $A$ an gerechneten Abscissen, gleiche Ordinaten gehören. — Die Fortsetzungen fallen also hier eben so aus, als wenn die Röhre in $A$ offen wäre.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann sich die Schwingung bis zu irgend einem Punkt $S$ fortgepflanzt hat, und wie die Bewegung hier beschaffen seyn wird. Es sey $AS = s$, und seit dem Anfange der Bewegung sey die Zeit $= t$ verflossen, welche kleiner als $\frac{SD}{c}$ ist, und man nehme $ST' = St' = c.t$, so wird desjenigen Lufttheilchens, welches sich anfangs in $S$ befand, Dichtigkeit und Geschwindigkeit durch die in $T'$, $t'$ gezognen Ordinaten ausgedrückt. Im vorigen Probleme fanden wir (in Beziehung auf Fig. 106.) allgemein, wenn das dortige $a = 0$ gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad \cdot \cdot \quad q = Q[1 + \frac{1}{2s}(TM + tm - 2SQ + tn - TN),$$

$$\text{II.} \quad \cdot \cdot \quad u = \frac{c}{2s}(tm - TM + tn + TN) + \frac{c}{2s^2}(ACTM - ACtm - ADTN - ADtn).$$

Es war aber hier im Punkte $S$ anfangs $Q = B$, also $SQ = 0$, (Fig. 105.), und auch $T'M' = t'm' = 0$, so lange $t'$ diesseits $D$ fällt, endlich $T'N' = t'n'$, daher wird offenbar $q = Q = B$, so lange $t < \frac{SD}{c}$ ist, die Geschwindigkeit aber wird, weil hier $ACTM = ACtm$ in Fig. 106. einerlei mit $AMD$ (Fig. 105.) ist,

$$x = \frac{c}{2s^2}(2s.t'n' - ANT'N' - ANt'n'),$$

$$\text{oder } x = \frac{c}{s^2}(t'n'.AS - ANS'S).$$

Um diesen Ausdruck richtig zu verstehen, müssen wir aus der Natur der Scale die Fläche $ANS'S$ zu bestimmen suchen; es war aber $TN = \frac{s'\Upsilon + \int \Upsilon ds'}{c}$, wenn ich $AT = s'$ nenne, folglich die Fläche

$$ATN = \int \frac{s'ds'.\Upsilon}{c} + \int \frac{ds'}{c} \int \Upsilon ds' = \frac{s'}{c} \int \Upsilon ds',$$

und in $D$, wo $\Upsilon = 0$ wird, erhält die Ordinate $DF = t'n' = SS'$ den Werth $= \frac{1}{c} \int \Upsilon ds'$, wenn dieses Integral bis an $DF$ genommen wird, mithin ist $ANFD = DF.AD$ und $ANS'S = DF.(AD + DS) = t'n'.AS$. Der für $x$ gefundene Ausdruck ist also $= 0$, so lange $St' < SD$ bleibt, und folglich bleibt das Lufttheilchen $S$ völlig im Gleichgewichte, so lange die Zeit $t < \frac{SD}{c}$ ist. Wird aber $t$ grösser, als $\frac{SD}{c}$, so nehme man $ST = c.t$, und es wird nun, weil an der rechten Seite von $S$ die Ordinaten der Dichtigkeitsscale $= 0$, die der Geschwindigkeitsscale $= T'N' = SS'$ werden,

$$q = B[1 + \frac{1}{2s}(TM + TN - t'n')],$$

$$x = \frac{c}{2s}(TM + TN + t'n') + \frac{c}{2s^2}[DMT - ATN - (s+ct)t'n'],$$

$$\text{oder } x = \frac{c}{2s}(TM + TN) + \frac{c}{2s^2}(DMT - ATN - ST.t'n').$$

Endlich werde die verflossene Zeit grösser, als $\frac{Sd}{c}$, so werden beide Ordinaten der Dichtigkeitsscale $= 0$, beide Ordinaten der Geschwindigkeitsscale werden gleich $= df = DF$;

also gibt die Gleichung I. wieder $q = Q = B$, in der Gleichung II. aber ist $ACTM = AMD = ACtm = Amd$, denn $Amd$ ist positiv, da die an der linken Seite von $A$ liegenden Flächen, wenn sie sich oberhalb der Axe befinden, negativ sind, ferner $Anfd = -ANFD = -AD.DF$, die Fläche aber, welche in der Formel $+ADtn$ hieſs, muſs jetzt $-ADtn$ bezeichnet werden, weil sie an der andern Seite von $A$ liegt, und es ist, wenn $t = \frac{ST''}{c}$,

$$x = \frac{c}{s} DF - \frac{c}{2s^2} [DF.(s+ct) - DF(ct-s)],$$

$$\text{oder } x = \frac{c.DF}{s} - \frac{2c.s.DF}{2s^2} = 0,$$

das Gleichgewicht der Luft ist also in $S$ hergestellt, sobald $t > \frac{Sd}{c}$ ist, und die Schwingung dauert in $S$ nur so lange, als der Schall Zeit braucht, um sich durch den Raum $dD$ fortzupflanzen.

516. Die Schwierigkeit, auf welche wir vorhin geriethen, daſs das Gleichgewicht noch nicht hergestellt zu seyn schien, obgleich die Schwingung schon vorüber gegangen war, fällt also völlig weg, wenn man auf die Fortsetzung der Scalen Rücksicht nimmt, und die Resultate sind jetzt denen ganz ähnlich, welche wir fanden, da die Röhre als cylindrisch angenommen ward. Die Zeit nämlich, welche verflieſst, bis die Schwingung in $S$ ankommt, ist hier eben so groſs wie dort, und die hier für $q$ und $x$ gefundenen Werthe unterscheiden sich von den dortigen blos dadurch, daſs $\frac{q-B}{B}$ und $x$ hier desto kleiner werden, je gröſser die Entfernung $AS = s$ ist, statt daſs in cylindrischen Röhren diese Gröſsen immer einerlei Werth für jede Entfernung behielten. Wenn also die Schwingung sich in einer conischen Röhre fortpflanzt, so wird sie in gröſsern Entfernungen immer schwächer, und die dem Lufttheilchen

ertheilte Geschwindigkeit nimmt ungefähr in eben dem Verhältnisse ab, wie die Entfernung wächst, denn das mit $s^2$ dividirte Glied kann man, sobald $s$ nur nicht ganz klein ist, weglassen. Nimmt man also an, dafs der Eindruck eines Schalles auf unsre Gehörorgane dem Quadrate der Geschwindigkeit $x$ proportional sey; so würde für eine conische Röhre die Stärke des gehörten Schalles sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung verhalten.

517. Dieee Untersuchungen lassen sich auch auf die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft anwenden. Denn wenn in $A$ ein Schall erregt wird, so kann man sich die umgebende Luft, als in unendlich viele Kegel getheilt, denken, deren Spitzen in $A$ zusammentreffen, und die Schwingung wird sich in diesen Kegeln so fortpflanzen, wie wir es eben bestimmt haben. Die Geschwindigkeit des Schalles ist also in der freien Luft eben so grofs, als in cylindrischen Röhren; aber die Stärke des Schalles nimmt wegen der Erweiterung der Röhre ab, je weiter man sich von $A$ entfernt, weil die fortgepflanzten Schwingungen oder Schläge immer schwächer werden, je weiter sie in der conischen Röhre fortrücken.

## Siebenter Abschnitt.

### *Darstellung von Lagrange's Untersuchungen über die Natur und Fortpflanzung des Schalles,*

*oder:*

*Methode, diese Untersuchungen so anzustellen, dafs dabei das Gesetz der Stetigkeit für den anfänglichen Zustand nicht vorausgesetzt wird.*

---

518. Obgleich die Resultate der bisherigen Untersuchung in Rücksicht ihrer fast überall vollkommenen Uebereinstimmung mit der Erfahrung wenig mehr zu wünschen übrig lassen, und die Richtigkeit der Theorie hiedurch fast gegen jeden Zweifel gesichert ist, so scheint ihr doch von einer Seite noch etwas zu fehlen, und eine vollkommnere Begründung derselben nothwendig zu werden. Es ist nämlich bei diesen Untersuchungen durchaus nöthig, solche Functionen in die Rechnung einzuführen, deren Abhängigkeit von den übrigen veränderlichen Gröfsen sich gar nicht durch ein bestimmtes Gesetz ausdrücken läfst, und welche daher nicht in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung zu gehören scheinen, und die Aufnahme dieser Functionen bedarf daher einer vollständigern Rechtfertigung, welche wir jetzt versuchen wollen.

519. Um diesen Zweck zu erreichen, müssen wir die Grundformeln für die Bewegung der Theilchen eines elastischen flüssigen Körpers so bestimmen, dafs dabei kein allgemeines Gesetz vorausgesetzt wird. Wenn nämlich die Linie $BC$ (Fig. 107.) eine Reihe elastischer Körperchen vorstellt, die man also als ein elastisches Fluidum bildend betrachten kann, und es ist während der ganzen Bewegung ein Theilchen, welches anfangs in $F$ war, bis an $\varphi$ fortgerückt, so dürfen wir nicht annehmen, dafs der Weg $F\varphi$ durch ein für alle Lufttheilchen passendes Gesetz bestimmt werde,

und eben deswegen können wir auch nicht, wie die Regeln der Differentialrechnung es sonst erlauben, den Weg $G\gamma$, welchen das zunächst liegende Theilchen $G$ in eben der Zeit zurückgelegt hat, $= F\phi + d.F\phi$ nennen; denn da es für $F\phi$ keine allgemeine Gleichung gibt, so findet auch keine Bestimmung des Differentials Statt. Indefs ist die Bewegung des Punktes $F$ darum keinesweges ganz unabhängig von der Bewegung der zunächst liegenden; denn wenn man sich drei gleiche Lufttheilchen $EF$, $FG$, $GI$ denkt, die bei ihrer anfänglichen Lage in $EFGI$ gleiche Elasticität hatten, aber, durch irgend einen Antrieb in Bewegung gesetzt, fortrücken, und sich jetzt in $\epsilon\phi$, $\phi\gamma$, $\gamma i$ befinden, so wird ihre elastische Kraft jetzt durch $\frac{EF}{\epsilon\phi}$, $\frac{EF}{\phi\gamma}$, $\frac{EF}{\gamma i}$ ausgedrückt, wenn die Elasticität der Dichtigkeit proportional ist, und anfangs $EF = FG = GI$ war, wenn also jetzt $\gamma i$, $\phi\epsilon$ nicht mehr gleich sind, so leidet das Theilchen $\gamma\phi$ nicht von beiden Seiten einerlei Druck, und die Beschleunigung wird hiedurch für dieses Theilchen auf bestimmte Weise angegeben. Wie dieses geschehe, will ich im folgenden Probleme untersuchen: ich werde dabei die Sache so betrachten, als ob auf der Linie $BC$ in gleichen Entfernungen die Theilchen $F$, $E$, $G$ lägen, deren jedes mit einer abstofsenden Kraft, welche der Entfernung umgekehrt proportional ist, auf das zunächst liegende wirke, denn diese Voraussetzung kommt mit einer der Dichtigkeit proportionalen Elasticität der Lufttheilchen ganz überein.

520. Problem 110. Auf der Linie $BC$ liegt in gleichen Entfernungen eine gegebene Anzahl von Körperchen $E$, $F$, $G$, $I$ etc., welche alle eine gleiche Masse haben, und jedes derselben wirkt auf die ihm zunächst liegenden mit einer zurückstofsenden Kraft, welche dem Abstande umgekehrt proportional ist. Von diesen Körpern werden einige auf irgend eine Weise nach der Richtung der Linie

*BC* in Bewegung gesetzt; man sucht zu bestimmen, wie im Fortgange der Bewegung die Beschleunigung irgend eines dieser Körper *F* bestimmt wird, wenn außer den abstoßenden Kräften dieser Körperchen keine beschleunigende Kräfte wirken, und die beiden äußersten jener Körper unbeweglich fest gehalten werden.

Auflösung. *E*, *F*, *G*, *I* stellen einige dieser Körper in ihrer Lage während des Gleichgewichts vor, und da damals ihre Abstände gleich waren, so ist $EF = FG = r$. Die abstoßende Kraft, welche in dieser Entfernung jeder Körper auf den nächsten ausübt, sey $= p$, wenn man die Kraft der Schwere $= 1$ setzt; die Masse eines jeden dieser Körperchen sey $= M$. Wir nehmen nun an, daß, nachdem das Gleichgewicht gestört worden, die Zeit $= t$ verflossen sey, und daß während dieser Zeit die Körper *E*, *F*, *G* nach $\varepsilon$, $\varphi$, $\gamma$ fortgerückt sind, so ist jetzt die Kraft, mit welcher $\varepsilon$ auf $\varphi$ wirkt, $= \frac{p \cdot r}{\varepsilon\varphi}$, und die Kraft, mit welcher $\gamma$ auf $\varphi$ wirkt, $= \frac{p \cdot r}{\varphi\gamma}$; der Punkt $\varphi$ wird daher mit einer Kraft $= p \cdot r \left(\frac{1}{\varepsilon\varphi} - \frac{1}{\varphi\gamma}\right)$ zur Bewegung nach der Richtung $\varphi c$ angetrieben, und wenn seine in $\varphi$ erlangte Geschwindigkeit $= v$ war, so wird, wenn $g$ die gewöhnliche Bedeutung hat, $\frac{dv}{dt} = 2g \cdot \frac{p \cdot r}{M} \left(\frac{1}{\varepsilon\varphi} - \frac{1}{\varphi\gamma}\right)$. Diese Gleichung läßt sich noch bequemer darstellen. Man bezeichne den Raum, durch welchen diese Körper von der dem Gleichgewichte entsprechenden Stelle fortgerückt sind, durch $E\varepsilon = {}^1y$, $F\varphi = {}^2y$, $G\gamma = {}^3y$, wo die oberhalb neben $y$ gesetzte Zahl blos dazu dient, anzuzeigen, auf welchen der verschiedenen Punkte die Größen ${}^1y$, ${}^2y$ u. s. w. sich beziehen, so ist $\varepsilon\varphi = {}^2y + r - {}^1y$, $\varphi\gamma = {}^3y + r - {}^2y$, und, weil ${}^2y$ zugleich den Raum ausdrückt, welchen $\varphi$ in der Zeit $t$ durchläuft, so ist auch $v = \frac{d.{}^2y}{dt}$ und $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\,{}^2y}{dt^2}$,

und die Gleichung für $\frac{dv}{dt}$ gibt

$$\frac{d^2 . {}^2y}{dt^2} = \frac{2gp}{M}\left[\frac{r}{{}^2y + r - {}^1y} - \frac{r}{{}^3y + r - {}^2y}\right]$$

$$= \frac{2gpr}{M}\,\frac{({}^3y - 2 . {}^2y + {}^1y)}{({}^2y - {}^1y + r)({}^3y - {}^2y + r)},$$

oder, wenn man annimmt, dafs die durchlaufenen Räume ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ unendlich klein sind, und ihre Unterschiede gegen $r$ nicht in Betrachtung kommen,

$$\frac{d^2\, {}^2y}{dt^2} = \frac{2gp}{M}\left[\frac{{}^3y - 2\,{}^2y + {}^1y}{r}\right],$$

und so ist die Beschleunigung des zweiten Punktes durch ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ bestimmt.

Man würde offenbar auf eben die Weise für den dritten Punkt finden

$$\frac{d^2\, {}^3y}{dt^2} = \frac{2gp}{M}\left[\frac{{}^4y - 2 . {}^3y + {}^2y}{r}\right],$$

wenn ${}^4y$ den Raum bezeichnet, welchen $I$ zurückgelegt hat, und für jeden $n^{ten}$ Punkt

$$\frac{d^2\, {}^ny}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}\,({}^{(n+1)}y - 2 . {}^ny + {}^{(n-1)}y).$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte: weil wir aber voraussetzen, dafs die beiden äufsersten Körper unbeweglich festgehalten werden, so setze ich jetzt die Anzahl aller auf der Linie $BC$ liegenden Körper $= m$, und nehme an, dafs der erste und letzte oder $m^{te}$ derselben unbeweglich sey, oder dafs ${}^1y = 0$ und ${}^my = 0$ werde, weil nämlich nach der angenommenen Bezeichnungsart diese Gröfsen den Weg ausdrücken, welchen der erste und $m^{te}$ Körper zurückgelegt hat, folglich wird die Bewegung aller Punkte durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\frac{d^2\, {}^2y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}\,({}^3y - 2 . {}^2y),$$

$$\frac{d^2\,{}^3y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}({}^4y - 2\,{}^3y + {}^2y),$$

$$\frac{d^2\,{}^4y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}({}^5y - 2.\,{}^4y + {}^3y),$$

etc. etc.

$$\frac{d^2.\,{}^{(m-2)}y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}({}^{(m-1)}y - 2\,{}^{(m-2)}y + {}^{(m-3)}y),$$

$$\frac{d^2.\,{}^{(m-1)}y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr}(-2\,{}^{(m-1)}y + {}^{(m-2)}y).$$

521. Diese Gleichungen sind allemal richtig, wenn auch die anfängliche Störung des Gleichgewichts gar nicht dem Gesetze der Stetigkeit unterworfen ist, indem wir nicht angenommen haben, daſs die Gröſsen ${}^2y$, ${}^3y$, ${}^ny$ als Function des Orts, wo der zweite, dritte, $n^{te}$ Körper sich im Zustande des Gleichgewichts befand, sollen angesehen werden. Aber in Rücksicht der Zeit ist jede dieser Gröſsen dem Gesetze der Stetigkeit unterworfen, denn wir setzen voraus, daſs, nachdem die Bewegung einmal angefangen hat, die Geschwindigkeit jedes Punktes keine plötzliche Aenderung leide.

Die Anzahl der Gleichungen, welche angeben, wie die Bewegung eines Punktes von der Bewegung der übrigen abhängt, ist eben so groſs, als die Anzahl der beweglichen Punkte selbst; wenn man also diese Gleichungen integriren könnte, so erhielte man zur Bestimmung der Gröſsen ${}^2y$, ${}^3y$ - - - ${}^{(m-1)}y$, deren Anzahl $= m - 2$ ist, $m - 2$ Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Gröſsen hinreichen würden.

522. Um die Gleichungen denen ganz ähnlich zu machen, welche Lagrange findet, will ich den ersten unbeweglichen Punkt mit o bezeichnen, daſs also ${}^0y = 0$ ist, und die Anzahl der beweglichen Punkte $= m - 1$, dann erhält man $m - 1$ Gleichungen, die alle, blos die erste und letzte ausgenommen, von einerlei Form sind.

Nämlich $\frac{d^2 . {}^1y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr} ({}^2y - 2\,{}^1y)$,

$$\frac{d^2 . {}^2y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr} ({}^3y - 2\,{}^2y + {}^1y),$$

etc. etc.

$$\frac{d^2 . {}^{(m-2)}y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr} ({}^{(m-1)}y - 2\,{}^{(m-2)}y + {}^{(m-3)}y),$$

$$\frac{d^2 . {}^{(m-1)}y}{dt^2} = \frac{2gp}{Mr} (-2\,{}^{(m-1)}y + {}^{(m-2)}y).$$

Und hier und im Folgenden zeigt die an der linken Seite von $y$ oberwärts stehende Zahl an, auf den wievielten Punkt diese Gröſse sich bezieht. — Eine ähnliche Bezeichnung werde ich in der Folge gebrauchen, wenn andre Gröſsen vorkommen, welche, in Beziehung auf die verschiedenen Punkte, ähnliche Bedeutungen haben.

523. Problem 111. Es sind $m-1$ Differentialgleichungen von der im vorigen §. angegebenen Form gegeben, man soll daraus Integralgleichungen für die Gröſsen ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ - - - ${}^{m-1}y$ finden, deren Anzahl $= m-1$ ist.

Auflösung. Ich setze den beständigen Coefficienten $\frac{2gp}{Mr} = c$, und nenne, um die Gleichungen des vorigen §. zu integriren,

$$d.{}^1y = {}^1u\,dt,\ d.{}^2y = {}^2u\,dt,\ d.{}^3y = {}^3u\,dt \text{ u. s. w.}$$

$$d.{}^{(m-1)}y = {}^{(m-1)}u\,dt,$$

Es verwandeln sich also, weil $dt$ beständig ist, die zu integrirenden Gleichungen in folgende:

$$d.{}^1u = c({}^2y - 2\,{}^1y)\,dt,$$

$$d.{}^2u = c({}^3y - 2\,{}^2y + {}^1y)\,dt,$$

$$d.{}^3u = c({}^4y - 2\,{}^3y + {}^2y)\,dt,$$

etc. etc.

$$d.{}^{(m-1)}u = c(-2\,{}^{(m-1)}y + {}^{(m-2)}y)\,dt.$$

Hier bedeuten ${}^1u$, ${}^2u$, ${}^3u$ . . . die Geschwindigkeiten derjenigen Körper, welche die Räume ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ . . . durchlaufen.

Jede dieser Gleichungen, nämlich sowohl die

$$d\,{}^1y = {}^1u\,dt, \quad d\,{}^2y = {}^2u\,dt \;\ldots$$

als die folgenden, multiplicire man mit unbestimmten beständigen Coefficienten, welche für die erste Reihe von Gleichungen durch ${}^1N$, ${}^2N$, ${}^3N \ldots$ für die letztere durch ${}^1M$, ${}^2M$, ${}^3M \ldots$ ausgedrückt werden mögen. Unter diesen unbestimmten Coefficienten, deren Anzahl $= 2(m-1)$ ist, ist es erlaubt, einen $= 1$ zu setzen, es sey daher ${}^1M = 1$: dieses anzunehmen ist gewifs erlaubt, weil man, wenn ${}^1M$ nicht diesen Werth hätte, statt jener Coefficienten gewifs setzen dürfte

$$\frac{{}^1N}{{}^1M},\ \frac{{}^2N}{{}^1M}\ \ldots\ \frac{{}^1M}{{}^1M},\ \frac{{}^2M}{{}^1M}\ \ldots$$

und dadurch ein Glied von seinem Coefficienten befreien könnte.

Diese so veränderten Gleichungen

$${}^1N d\,{}^1y = {}^1N\,{}^1u\,dt,$$
$${}^2N d\,{}^2y = {}^2N\,{}^2u\,dt,$$
etc.
$${}^1M d\,{}^1u = c\,{}^1M dt({}^2y - 2\,{}^1y),$$
$${}^2M d.\,{}^2u = c.\,{}^2M dt({}^3y - 2\,{}^2y + {}^1y),$$
etc.

addire man sämmtlich, so wird

$${}^1Md.\,{}^1u + {}^1Nd.\,{}^1y + {}^2Md.\,{}^2u + {}^2Nd.\,{}^2y + {}^3Md.\,{}^3u$$
$$+ {}^3Nd.\,{}^3y + + + {}^{(m-1)}Md.\,{}^{(m-1)}u + {}^{(m-1)}Nd.\,{}^{(m-1)}y$$
$$= {}^1N\,{}^1u\,dt + c({}^2M - 2\,{}^1M)\,{}^1y\,dt + {}^2N\,{}^2u\,dt$$
$$+ c({}^3M - 2\,{}^2M + {}^1M)\,{}^2y\,dt + {}^3N\,{}^3u\,dt$$
$$+ c({}^4M - 2\,{}^3M + {}^2M)\,{}^3y\,dt + + + +$$
$$+ {}^{(m-1)}N.\,{}^{(m-1)}u\,dt + c\,dt(-2\,{}^{(m-1)}M + {}^{(m-2)}M)\,{}^{(m-1)}y,$$

wo man ${}^1M = 1$ setzen kann.

In dieser Gleichung ist es allemal möglich, die Coefficienten so anzunehmen, dafs das Differential des nach dem Gleichheitszeichen stehenden Theils ein genaues Multiplum des vor dem Gleichheitszeichen stehenden werde. Wenn also $R$ eine beständige Gröfse bezeichnet, so darf man, wenn man die einzelnen Glieder vergleicht,

${}^1N = R\,{}^1M$, ${}^2N = R\,{}^2M$, ${}^3N = R\,{}^3M$ u. s. w., ferner
$R\,{}^1N = c\,{}^2M - 2c\,{}^1M$, $R\,{}^2N = c({}^3M - 2\,{}^2M + {}^1M)$ u. s. w.
endlich $R\,{}^{(m-1)}N = c(-2\,{}^{(m-1)}M + {}^{(m-2)}M)$
setzen, und die Anzahl dieser Gleichungen ist so grofs, als die Anzahl der unbestimmten Coefficienten. Setzt man hier in der letzten Reihe von Gleichungen die durch die erste Reihe von Gleichungen bestimmten Werthe von ${}^1N, {}^2N$ . . so wird

$$R^2\,{}^1M = c({}^2M - 2\,{}^1M),$$
$$R^2\,{}^2M = c({}^3M - 2\,{}^2M + {}^1M),$$
$$R^2\,{}^3M = c({}^4M - 2\,{}^3M + {}^2M),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$R^2\,{}^{(m-1)}M = c(-2\,{}^{(m-1)}M + {}^{(m-2)}M),$$

daher ${}^2M = \left(\frac{R^2}{c} + 2\right)\,{}^1M,$

und wenn man $\frac{R^2 + 2c}{c} = K$ setzt,

$${}^2M = K.\,{}^1M,$$
$${}^3M = K^2 - {}^1M,$$
$${}^4M = K.\,{}^3M - {}^2M \text{ u. s. w.}$$

oder für jeden $\mu$ten Coefficienten

$${}^{\mu}M = K.\,{}^{(\mu-1)}M - {}^{(\mu-2)}M,$$

wo man für $\mu$ alle Zahlen von 0 bis $m - 1$ setzen kann.

Diese Coefficienten bilden also eine zurückkehrende Reihe, wo jedes Glied durch die zwei zunächst vorhergehenden bestimmt wird. Der Natur dieser Reihen zu Folge ist, wenn $A$, $B$ beständige Gröfsen sind, und $a$, $b$ die Wurzeln der Gleichung $z^2 - Kz + 1 = 0$ sind,

$${}^{\mu}M = A\,.\,a^{\mu} + B\,.\,b^{\mu}.$$

Die Wurzeln $a$, $b$ findet man

$$a = \tfrac{1}{2}K + \sqrt{(\tfrac{1}{4}K^2 - 1)},$$
$$b = \tfrac{1}{2}K - \sqrt{(\tfrac{1}{4}K^2 - 1)},$$

und die beständigen Gröfsen $A$, $B$ werden aus den bekannten Werthen von ${}^0M$ und ${}^1M$ bestimmt.

Setzt man nämlich $\mu = 0$, so muſs, weil dieser Coefficient gar nicht vorkommt, ${}^0M = 0$, daher $0 = A + B$ seyn. ${}^1M$ hingegen ist $= 1$ gesetzt, also $1 = Aa + Bb$, woraus $A = -B$ und $A(a-b) = 1$, oder $A = \frac{1}{a-b}$ folgt, der allgemeine Werth des Coefficienten ${}^\mu M$ wird daher ${}^\mu M = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$.

Endlich aber muſs, weil der Coefficient ${}^mM$ nicht mehr vorkommt, der Werth von ${}^\mu M$ verschwinden, wenn man $\mu = m$ setzt, das ist, es muſs $\frac{a^m - b^m}{a-b} = 0$ seyn, und diese Gleichung bestimmt das noch unbekannte $R$ oder $K$, wodurch alsdann alle Coefficienten ${}^\mu M$, ${}^\mu N$ bestimmt sind.

Um aus der Gleichung $\frac{a^m - b^m}{a-b} = 0$ die Gröſse $K$ zu bestimmen, muſs man sich erinnern *), daſs

$$a^m - b^m = (a-b)\sqrt{\left[a^2 - 2ab \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{m} + b^2\right]} \times$$
$$\sqrt{\left[a^2 - 2ab \operatorname{Cos}\frac{4\pi}{m} + b^2\right]} . \sqrt{\left[a^2 - 2ab . \operatorname{Cos}\frac{6\pi}{m} + b^2\right]} \times$$
$$\sqrt{\left[a^2 - 2ab . \operatorname{Cos}\frac{8\pi}{m} + b^2\right]} \; . \; . \; . \; .$$

ist, wenn man die Anzahl dieser Factoren $= m$ nimmt, daſs also der letzte $= \sqrt{\left[a^2 - 2ab \operatorname{Cos}\frac{2(m-1)\pi}{m} + b^2\right]}$ wird, und $\pi$ bedeutet hier den halben Umfang des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist. Der Forderung $\frac{a^m - b^m}{a-b} = 0$ kann

---

*) Eulers Einleitung in d. Anal. d. Unendl. B. 1. Cap. 9. oder Kästners Analys. des Unendlichen, §. 395.

also Genüge geschehen, wenn irgend einer dieser Factoren $= 0$ ist. Man nehme an, dafs $\nu$ eine zwischen $0$ und $m$ fallende ganze Zahl sey, und dafs der Factor

$$\sqrt{\left(a^2 - 2ab \,.\, \mathrm{Cos}\, \frac{2\nu\pi}{m} + b^2\right)} = 0$$

werde, so ist, weil $a^2 + b^2 = K^2 - 2$ und $ab = 1$,

$$a^2 - 2ab \,.\, \mathrm{Cos}\, \frac{2\nu\pi}{m} + b^2 = K^2 - 2 - 2\, \mathrm{Cos}\, \frac{2\nu\pi}{m},$$

welches $= 0$ seyn soll, daher

$$K^2 = 2\left(1 + \mathrm{Cos}\, \frac{2\nu\pi}{m}\right),$$

$$\text{oder } K^2 = 4\left(\mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m}\right)^2,$$

$$K = 2 \,.\, \mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m},$$

wo man auf das doppelte Zeichen bei der Wurzel nicht zu sehen braucht, weil, wenn $\nu$ gröfser als $\frac{1}{2}m$ wird, die vorigen Werthe mit umgekehrtem Zeichen wieder kommen, für $\nu$ aber kann man alle ganzen Zahlen von $0$ bis $m - 1$ setzen.

Durch $K$ wird $R$ bekannt, weil $\frac{R^2}{c} + 2 = K$,

$$R^2 = c(K - 2) = 2c\left(\mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m} - 1\right),$$

$$\text{oder } R^2 = -4c\left(\mathrm{Sin}\, \frac{\nu\pi}{2m}\right)^2,$$

$$R = \pm 2 \,.\, \sqrt{-c} \,.\, \mathrm{Sin}\, \frac{\nu\pi}{2m}.$$

Aus dem Werthe von $K$ folgt auch

$$a = \mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m} + \sqrt{\left\{\left(\mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m}\right)^2 - 1\right\}} = \mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m} + \sqrt{-1} \,.\, \mathrm{Sin}\, \frac{\nu\pi}{m},$$

$$b = \mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m} - \sqrt{\left\{\left(\mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m}\right)^2 - 1\right\}} = \mathrm{Cos}\, \frac{\nu\pi}{m} - \sqrt{-1} \,.\, \mathrm{Sin}\, \frac{\nu\pi}{m},$$

und ferner

$$ {}^{\mu}M = \frac{\left[\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}\right]^{\mu} - \left[\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m} - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}\right]^{\mu}}{2\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}}, $$

oder, weil der Sinus des vielfachen Winkels

$$ \mathrm{Sin}\,\frac{\mu\nu\pi}{m} = \frac{\left[\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}\right]^{\mu} - \left[\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m} - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}\right]^{\mu}}{2\,.\,\sqrt{-1}} $$

ist *), so wird $ {}^{\mu}M = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\mu\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}} $.

Jetzt also sind die Coefficienten, welche wir den Differentialgleichungen gaben, bestimmt, und wir können zur Integration der aus der Summe aller bestehenden Gleichung fortgehen, in welcher ich statt ${}^{1}N$, ${}^{2}N$ . . . . . ihre Werthe setze, und

$$ {}^{1}M\,{}^{1}u + {}^{2}M\,{}^{2}u + {}^{3}M\,{}^{3}u +++ {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}u $$
$$ + R\,({}^{1}M\,{}^{1}y + {}^{2}M\,{}^{2}y + {}^{3}M\,{}^{3}y +++ {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}y) = z $$

nenne. Durch diese Substitution geht die ganze Gleichung in $dz = Rz\,dt$ über, woraus $z = F\,.\,e^{Rt}$ folgt, und $F$ ist eine beständige Gröfse, welche dem Werthe gleich ist, den $z$ erhält für $t = 0$. Restituire ich also für $z$ seinen Werth, so ist

$$ {}^{1}M\,{}^{1}u + {}^{2}M\,{}^{2}u + {}^{3}M\,{}^{3}u +++ {}^{(m-1)}M\,{}^{(m-1)}u $$
$$ + R\,{}^{1}M\,{}^{1}y + R\,{}^{2}M\,{}^{2}y +++ R\,{}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}u = F\,.\,e^{Rt}, $$

oder, wenn man mit $e^{Rt}\,.\,dt$ multiplicirt, und ${}^{1}u\,dt = d\,{}^{1}y$, ${}^{2}u\,dt = d\,.\,{}^{2}y$ u. s. w. setzt,

$$ ({}^{1}Md\,.\,{}^{1}y + {}^{2}Md\,.\,{}^{2}y + {}^{3}Md\,{}^{3}y +++ {}^{(m-1)}Md\,.\,{}^{(m-1)}y)\,e^{Rt} $$
$$ + R\,({}^{1}M\,{}^{1}y + {}^{2}M\,{}^{2}y + {}^{3}M\,{}^{3}y +++ {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}y)\,e^{Rt}\,dt $$
$$ = F\,.\,e^{2Rt}\,dt. $$

---

*) Kästners Anal. d. Unendl. §. 337.

Und hieraus folgt

$$({}^1M\,{}^1y + {}^2M\,{}^2y + {}^3M\,{}^3y + + + {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}y)\,e^{Rt} = \frac{F}{2R}\,.\,e^{2Rt} + G,$$

welches die gesuchte Integralgleichung ist, in der nur noch die beständigen Gröſsen bestimmt werden müssen.

Man bezeichne mit ${}^1V$, ${}^2V$, ${}^3V$ . . . . die Werthe, welche ${}^1u$, ${}^2u$, ${}^3u$ . . . . hatten, als $t = 0$ war, eben so werde aus ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ . . . . ${}^1Y$, ${}^2Y$, ${}^3Y$ . . . . wenn $t = 0$ genommen wird, und der Kürze wegen sey die Summe der Glieder

$${}^1M\,{}^1Y + {}^2M\,{}^2Y + {}^3M\,{}^3Y + + + {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}Y = P,$$
$${}^1M\,{}^1V + {}^2M\,{}^2V + {}^3M\,{}^3V + + + {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}V = Q,$$

so gibt die erste Integralgleichung, wenn $t = 0$ ist, $F = Q + RP$.

die zweite $P = \dfrac{F}{2R} + G$, oder

$$G = \frac{2PR - F}{2R} = \frac{PR - Q}{2R}.$$

Die letzte Integralgleichung wird also

$${}^1M\,{}^1y + {}^2M\,{}^2y + {}^3M\,{}^3y + + + {}^{(m-1)}M\,.\,{}^{(m-1)}y = \frac{RP+Q}{2R}\,.\,e^{Rt}$$
$$+ \frac{PR - Q}{2R}\,.\,e^{-Rt} = P\left[\frac{e^{Rt} + e^{-Rt}}{2}\right] + Q\left[\frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2R}\right]$$
$$= P\,.\,\mathrm{Cos}\left[2t\sqrt{c}\,.\,\mathrm{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}\right] + Q\,\frac{\mathrm{Sin}\left[2t\sqrt{c}\,.\,\mathrm{Sin}\dfrac{\nu\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c}\,.\,\mathrm{Sin}\dfrac{\nu\pi}{2m}},$$

wenn man die Exponentialgröſsen durch Kreisbogen ausdrückt, und für $R$ den oben gefundenen Werth setzt.

524. Diese einfache Gleichung reicht zur Bestimmung der Gröſsen ${}^1y$, ${}^2y$, ${}^3y$ . . . . hin, denn da sie die unbestimmte Zahl $\nu$ enthält, für welche man alle ganze Zahlen von 0 bis $m - 1$ setzen kann, so stellt diese Gleichung eigentlich $m - 1$ verschiedene Gleichungen vor,

welche man erhält, wenn man nach und nach für $\nu$ alle verschiedenen Werthe setzt, welche diese Zahl erhalten kann.

Diese Gröfsen $P$ und $Q$ erhalten ebenfalls, wenn man nach und nach für $\nu$ seine verschiedenen Werthe setzt, $m - 1$ verschiedene Werthe, weil in den Coefficienten ${}^1M$, ${}^2M$ . . . . die Zahl $\nu$ vorkommt: bezeichnet man also mit ${}^1P$, ${}^2P$ . . . . ${}^\nu P$ . . . . die Werthe, welche $P$ erhält, wenn man 1, 2 u. s. w. für $\nu$ setzt, so ist allgemein, wenn man den allen Gliedern gemeinschaftlichen Nenner $\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}$ wegläfst,

$$
{}^\nu P = {}^1Y.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m} + {}^2Y.\,\text{Sin}\,\frac{2\nu\pi}{m} + {}^3Y.\,\text{Sin}\,\frac{3\nu\pi}{m} + + + + {}^{(m-1)}Y.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{m},
$$

$$
{}^\nu Q = {}^1V\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m} + {}^2V.\,\text{Sin}\,\frac{2\nu\pi}{m} + {}^3V\,\text{Sin}\,\frac{3\nu\pi}{m} + + + + {}^{(m-1)}V\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{m},
$$

und die allgemeine Gleichung am Ende des vorigen §. wird auch

$$
{}^1y.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m} + {}^2y.\,\text{Sin}\,\frac{2\nu\pi}{m} + {}^3y.\,\text{Sin}\,\frac{3\nu\pi}{m} + + {}^{(m-1)}y.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{m}
$$

$$
= {}^\nu P.\,\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}\right] + \frac{{}^\nu Q\,\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c}.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}}.
$$

525. Nennt man den nach dem Gleichheitszeichen stehenden Theil $= {}^\nu S$, so erhält man folgende Gleichungen, wenn man für $\nu$ nach und nach seine verschiedenen Werthe setzt,

$$
{}^1y.\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{m} + {}^2y\,\text{Sin}\,\frac{2\pi}{m} + {}^3y.\,\text{Sin}\,\frac{3\pi}{m} + + + {}^{(m-1)}y.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{m} = {}^1S,
$$

$$ {}^{1}y \,.\, \text{Sin}\,\frac{2\pi}{m} + {}^{2}y \,.\, \text{Sin}\,\frac{4\pi}{m} + {}^{3}y \,.\, \text{Sin}\,\frac{6\pi}{m} $$

$$ +++\, {}^{(m-1)}y \,.\, \text{Sin}\,\frac{2(m-1)\pi}{m} = {}^{2}S, $$

etc. etc.

$$ {}^{1}y\ \text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{m} + {}^{2}y\ \text{Sin}\,\frac{2(m-1)\pi}{m} $$

$$ +++\, {}^{(m-1)}y\ \text{Sin}\,\frac{(m-1)(m-1)\pi}{m} = {}^{(m-1)}S, $$

und die Anzahl dieser Gleichungen ist $= m - 1$. Die Werthe von $S$ aber sind

$$ {}^{1}S = {}^{1}P \,.\, \text{Cos}\left[2t\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{\pi}{2m}\right] + \frac{{}^{1}Q \,.\, \text{Sin}\left[2t\sqrt{c}\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{\pi}{2m}}, $$

$$ {}^{2}S = {}^{2}P \,.\, \text{Cos}\left[2t\sqrt{c}\ \text{Sin}\,\frac{2\pi}{2m}\right] + \frac{{}^{2}Q \,.\, \text{Sin}\left[2t\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{2\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{2\pi}{2m}} $$

etc. etc.

$$ {}^{(m-1)}S = {}^{(m-1)}P \,.\, \text{Cos}\left[2t\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{2m}\right] $$

$$ + \frac{{}^{(m-1)}Q\,\text{Sin}\left[2t\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c} \,.\, \text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{2m}}. $$

Aus jenen $m - 1$ Gleichungen müssen die Werthe der Gröſsen ${}^{1}y$, ${}^{2}y$, ${}^{3}y$ . . . . ${}^{(m-1)}y$ bestimmt werden.

526. In Rücksicht der Gröſsen ${}^{v}P$, ${}^{v}Q$, ${}^{v}S$ muſs ich noch bemerken, daſs die Bedeutung der Zahlen, womit sie bezeichnet sind, eine andre ist, als bei den Gröſsen $y, u, Y, V$. Bei den letztern gibt die an den Buchstaben oberwärts gesetzte Zahl an, auf den wievielten der beweg-

ten Punkte die Gröfse sich beziehe, bei jenen aber zeigt sie an, dafs man unter den $m - 1$ verschiedenen Werthen, welche ${}^{\nu}P$ haben kann, irgend einen bestimmten nehme, und ${}^{1}P$, ${}^{1}Q$, ${}^{1}S$ etc. bezieht sich also nicht auf einen einzelnen der bewegten Körper. — Dieses erhellt auch aus der vorigen Rechnung schon von selbst.

527. Die Werthe von ${}^{\nu}P$, ${}^{\nu}Q$, und folglich von ${}^{\nu}S$ werden aus dem anfänglichen Zustande bestimmt, und es bedeutet hier ${}^{1}Y$, ${}^{2}Y$, ${}^{3}Y$ .... ${}^{(m-1)}Y$ die Entfernung, um welche der erste, zweite, dritte .... $(m - 1)$te Körper bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts von der Stelle weggerückt ist, wo er sich während des Gleichgewichts befand; hingegen ${}^{1}V$, ${}^{2}V$, ${}^{3}V$ .... ${}^{(m-1)}V$ bedeuten die Geschwindigkeiten, welche anfangs dem ersten, zweiten, dritten .... $(m - 1)$ten Körper mitgetheilt waren.

Die einfachern, in diesen Gleichungen enthaltenen Fälle würden also die seyn, wo entweder jedem Körper anfangs blos eine Geschwindigkeit ertheilt wird, und keine anfängliche Verrückung aus der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage Statt fand — alsdann sind alle $Y = 0$, oder wo die Störung des Gleichgewichts blos in einer Verrückung aus der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage bestand, aber anfangs die Geschwindigkeit aller Körper, das ist, alle $V = 0$ waren.

527 *b*). Von der Richtigkeit des gefundnen Werthes von ${}^{\mu}M$ kann man sich leicht überzeugen, denn es läfst sich zeigen, dafs dieser Werth für das $(\mu + 1)$te Glied gilt, wenn er für das $(\mu - 1)$te und für das $\mu$te richtig ist.

Es soll nämlich ${}^{(\mu+1)}M = K \cdot {}^{\mu}M - {}^{(\mu-1)}M$ seyn, also, wenn man die Werthe, welche wir für $K$ und ${}^{\mu}M$, ${}^{(\mu-1)}M$ gefunden haben, setzt:

$$^{(\mu+1)}M = \frac{2\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}} - \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(\mu-1)\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}},$$

oder

$$^{(\mu+1)}M = \frac{2.\mathrm{Cos}\frac{\nu\pi}{m}.\mathrm{Sin}\frac{\mu\nu\pi}{m} - \mathrm{Sin}\frac{\mu\nu\pi}{m}.\mathrm{Cos}\frac{\nu\pi}{m} + \mathrm{Cos}\frac{\mu\nu\pi}{m}.\mathrm{Sin}\frac{\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}},$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{\nu\pi}{m}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu\nu\pi}{m} + \mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(\mu+1)\nu\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\nu\pi}{m}},$$

welches dem für $^{\mu}M$ gefundnen allgemeinen Werth gemäſs ist. Der gefundne Werth für $^{\mu}M$ gilt also für jedes dritte Glied, wenn er für die beiden vorhergehenden richtig ist: er ist aber richtig für die beiden ersten Glieder der Reihe, folglich für das dritte und jedes folgende.

528. Aus den in §. 525. gefundenen $m-1$ Gleichungen sollten nun die Gröſsen $^{1}y$, $^{2}y$, . . . $^{(m-1)}y$, deren Anzahl ebenfalls $= m-1$ ist, bestimmt werden. Daſs jene Gleichungen hiezu hinreichend sind, ist nun zwar einleuchtend, aber zugleich ist es klar, daſs die Anzahl der beweglichen Körper sehr geringe seyn müſste, wenn sich die $m-1$ unbekannten Gröſsen daraus nach den gewöhnlichen Regeln sollten finden lassen; denn bei einer nur mäſsig groſsen Anzahl von Körpern würde das Eliminiren aller unbekannten Gröſsen bis auf eine, in endlose Rechnungen führen; und wenn sogar die Anzahl der beweglichen Körper unendlich wäre (und die Betrachtung dieses Falles ist doch eigentlich unser Hauptzweck), so würde diese Methode gar nicht mehr anwendbar seyn. Das folgende Problem lehrt daher eine andre Methode.

529. Problem 112. Aus den Gleichungen des 525. §., deren Anzahl $= m - 1$ ist, jede der unbekannten Gröſsen, deren Anzahl eben so groſs ist, zu bestimmen.

Auflösung. Da diese Bestimmung eine ziemlich weitläuftige Rechnung erfordert, so will ich die Auflösung dieses Problems in mehrere Abschnitte theilen, und bemerke nur folgendes voraus. — Man multiplicirt jede der Gleichungen mit einem unbestimmten beständigen Coefficienten, und leitet aus der Summe aller Gleichungen den Werth jedes $y$, und zugleich $m - 2$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten ab. Dieses ist der erste Theil der Auflösnng. Da aber der so gefundene Werth jedes $y$ oder ${}^{\mu}y$ die unbestimmten Coefficienten mit enthält, so müssen zweitens diese Coefficienten bestimmt ausgedrückt, und dann drittens der Werth von ${}^{\mu}y$ durch bekannte Gröſsen angegeben werden.

I. Man multiplicire jede der Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten, und nenne diese nach der Reihe ${}^{1}D$, ${}^{2}D$, ${}^{3}D$ . . . . ${}^{(m-1)}D$, und nehme den ersten ${}^{1}D = 1$ an. Die so veränderten Gleichungen addire man, so ist ihre Summe:

$$ {}^{1}y . \left[ {}^{1}D \text{ Sin } \frac{\pi}{m} + {}^{2}D \text{ Sin } \frac{2\pi}{m} + {}^{3}D \text{ Sin } \frac{3\pi}{m} \right. $$

$$ \left. + + + {}^{(m-1)}D . \text{ Sin } \frac{(m-1)\pi}{m} \right] $$

$$ + {}^{2}y \left[ {}^{1}D \text{ Sin } \frac{2\pi}{m} + {}^{2}D \text{ Sin. } \frac{4\pi}{m} + {}^{3}D . \text{ Sin } \frac{6\pi}{m} \right. $$

$$ \left. + + + {}^{(m-1)}D \text{ Sin } \frac{2(m-1)\pi}{m} \right] $$

$$ + {}^{3}y \left[ {}^{1}D \text{ Sin } \frac{3\pi}{m} + {}^{2}D \text{ Sin } \frac{6\pi}{m} + {}^{3}D \text{ Sin } \frac{9\pi}{m} \right. $$

$$ \left. + + + {}^{(m-1)}D \text{ Sin } \frac{3(m-1)\pi}{m} \right] $$

$$ + \quad + \quad + \quad + $$

$$+{}^{(m-1)}y\left\{{}^{1}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{m}+{}^{2}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{2.(m-1)\pi}{m}\right.$$

$$\left.+++\ {}^{(m-1)}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)(m-1)\pi}{m}\right\}$$

$$={}^{1}D\,{}^{1}S+{}^{2}D\,{}^{2}S+{}^{3}D\,{}^{3}S+{}^{4}D\,{}^{4}S+++\,{}^{(m-1)}D\,.\,{}^{(m-1)}S.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Werth irgend eines $y$, zum Beispiel ${}^{\mu}y$, wenn man die Coefficienten von ${}^{1}y$, ${}^{2}y$ ${}^{3}y$ . . . . kurz, alle Coefficienten, blos den von ${}^{\mu}y$ ausgenommen, $=0$ setzt. Dieses ist wegen der unbestimmten Gröſsen ${}^{2}D$, ${}^{3}D$ . . . . erlaubt, indem die $=0$ gesetzten Coefficienten nun $m-2$ Bedingungsgleichungen geben, welchen gemäſs diese Gröſsen, deren Anzahl $=m-2$ ist, angenommen werden können. Auf diese Weise erhält man

$${}^{\mu}y\left\{{}^{1}D\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}+{}^{2}D.\mathrm{Sin}\,\frac{2\mu\pi}{m}+++\,{}^{(m-1)}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\mu\pi}{m}\right\}$$

$$={}^{1}D\,{}^{1}S+{}^{2}D.\,{}^{2}S+{}^{3}D.\,{}^{3}S+++\,{}^{(m-1)}D.\,{}^{(m-1)}S,$$

und zugleich $m-2$ Bedingungsgleichungen, deren allgemeine Form ist:

$${}^{1}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\lambda\pi}{m}+++\,{}^{(m-1)}D.\mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}=0,$$

und man kann hier für $\lambda$ alle ganze Zahlen von 1 bis $m-1$ setzen, blos mit Ausschluſs der Zahl $\mu$. Aus diesen Gleichungen müssen die Coefficienten $D$ bestimmt werden.

II. Die Gleichung für die Coefficienten, welche eigentlich $m-2$ verschiedene Gleichungen in sich faſst,

$${}^{1}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\lambda\pi}{m}+++\,{}^{(m-1)}D\ \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}=0,$$

läſst sich allemal in eine Reihe verwandeln, welche statt der Sinus der vielfachen Winkel, Potenzen vom Cosinus des einfachen Winkels $\frac{\lambda\pi}{m}$ enthält: denn es ist bekannt, daſs der Sinus des vielfachen Winkels gleich ist dem Producte aus dem Sinus des einfachen Winkels in eine Reihe, deren Glieder ganze Potenzen vom Cosinus des einfachen Winkels

enthalten, und deren höchstes Glied diejenige Potenz dieses Cosinus enthält, welche um eins niedriger ist, als die Zahl der Vervielfachung des Winkels. Drückt man also $\text{Sin}\,\frac{2\lambda\pi}{m}$, $\text{Sin}\,\frac{3\lambda\pi}{m}$ u. s. w. auf diese Weise aus, so wird die allgemeine Bedingungsgleichung für alle $D$ in eine nach den Potenzen von $\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m}$ geordnete Gleichung vom $(m-2)$ten Grade verwandelt, welche $= 0$ seyn mufs, wenn man für $\lambda$ irgend eine ganze Zahl von 1 bis $m-1$, blos mit Ausschlufs der Zahl $\mu$, setzt: betrachtet man also hier $\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m}$ als die unbekannte Gröfse, so sind

$$\text{Cos}\,\frac{\pi}{m},\ \text{Cos}\,\frac{2\pi}{m},\ \text{Cos}\,\frac{3\pi}{m}\ \ldots\ \text{Cos}\,\frac{(m-1)\pi}{m}$$

die Wurzeln der Gleichung, und es fehlt in dieser Reihe von Wurzeln blos $\text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}$. Jene nach den Potenzen von $\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m}$ geordnete Reihe ist also gleich dem Producte aus den Factoren

$$\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{\pi}{m},\ \text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{2\pi}{m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ \text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{(m-1)\pi}{m},$$

wenn man dieses mit einer unbestimmten beständigen Gröfse $L$ multiplicirt, aber es versteht sich nun von selbst, dafs in dieser Reihe von Factoren der einzige

$$\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}$$

fehlt. Diesem zufolge ist also:

$$\frac{{}^1D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m} + {}^2D\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m} + {}^3D\,\mathrm{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m} +++ {}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}}{\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}}$$

$$= L\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\frac{\pi}{m}\right)\cdot\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\frac{2\pi}{m}\right)\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\frac{3\pi}{m}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$

Den nach dem Gleichheitszeichen stehenden Theil könnte man auch auf folgende Weise darstellen:

$$L\,.\left(p^2 - 2pq\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{m} + q^2\right)\left(p^2 - 2pq\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{m} + q^2\right) \times$$

$$\left(p^2 - 2pq\,\mathrm{Cos}\frac{3\pi}{m} + q^2\right)\ldots\ldots\left(p^2 - 2pq\,\mathrm{Cos}\frac{(m-1)\pi}{m} + q^2\right),$$

wenn man $p^2 + q^2 = \mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}$ und $2pq = 1$ annimmt; aber bei diesem Ausdrucke ist es klar, daſs er $= \frac{p^{2m} - q^{2m}}{p^2 - q^2}$ seyn würde, wenn der Factor $p^2 - 2pq\,\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m} + q^2$ nicht in der Reihe der Factoren fehlte; — ehe wir aber weiter gehen, müssen die Gröſsen $p$, $q$ bestimmt werden. Nach den ihnen beigelegten Werthen ist

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 + \mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} = 2\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{2m}\right)^2,$$

und $p^2 - 2pq + q^2 = -1 + \mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} = -2\left(\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{2m}\right)^2,$

$$\text{daher } p + q = \pm\sqrt{2}\,.\,\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{2m},$$

$$p - q = \pm\sqrt{2}\,.\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{2m}\,.\sqrt{-1},$$

$$p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{2m} + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{2m}\right),$$

$$\text{und } q = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Cos} \frac{\lambda\pi}{2m} - \sqrt{-1} \text{ Sin} \frac{\lambda\pi}{2m}\right],$$

$$p^2 - q^2 = 2 . \sqrt{-1} . \text{Cos} \frac{\lambda\pi}{2m} . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{2m} = \sqrt{-1} . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m},$$

ferner

$$p^{2m} = \frac{1}{2^m} \left[\text{Cos} \frac{\lambda\pi}{2m} + \sqrt{-1} . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{2m}\right]^{2m}$$

$$= \frac{1}{2^m} \left[\text{Cos} \frac{\lambda\pi}{m} + \sqrt{-1} . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m}\right]^m,$$

$$= \frac{\text{Cos } \lambda\pi + \sqrt{-1} . \text{Sin } \lambda\pi}{2^m},$$

$$\text{und } q^{2m} = \frac{\text{Cos } \lambda\pi - \sqrt{-1} . \text{Sin } \lambda\pi}{2^m},$$

$$p^{2m} - q^{2m} = \frac{\sqrt{-1} . \text{Sin } \lambda\pi}{2^{m-1}}.$$

Wir kehren jetzt zu der Gleichung

$$\frac{{}^1D . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m} + {}^2D \text{ Sin} \frac{2\lambda\pi}{m} + + + {}^{(m-1)}D \text{ Sin} \frac{(m-1)\lambda\pi}{m}}{\text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m}}$$

$$= L\left[p^2 - 2pq \text{Cos} \frac{\pi}{m} + q^2\right] \;.\;.\;.\; \left[p^2 - 2pq \text{Cos} \frac{(m-1)\pi}{m} + q^2\right]$$

zurück, und setzen statt des nach dem Gleichheitszeichen stehenden Theils

$$L . \frac{p^{2m} - q^{2m}}{(p^2 - q^2)\left[p^2 - 2pq \text{ Cos} \frac{\mu\pi}{m} + q^2\right]},$$

oder zufolge der gefundenen Werthe

$$\frac{{}^1D . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m} + + + + {}^{(m-1)}D . \text{Sin} \frac{(m-1)\lambda\pi}{m}}{\text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m}}$$

$$= \frac{L . \sqrt{-1} . \text{Sin } \lambda\pi}{2^{m-1} \sqrt{-1} . \text{Sin} \frac{\lambda\pi}{m} \left[\text{Cos} \frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos} \frac{\mu\pi}{m}\right]},$$

oder

$${}^{1}D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}+{}^{3}D\,\mathrm{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m}++{}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}$$

$$=\frac{L\,.\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi}{2^{m-1}\,.\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}-\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right)}.$$

Da diese Gleichung identisch seyn muſs, so findet man daraus, wenn man mit $\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}-\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right)$ multiplicirt, und die Glieder ordnet, die Werthe von $D$. Man kann hier das Product aus $\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}$ in die vor dem Gleichheitszeichen stehende Reihe blos durch Sinus auf folgende Weise ausdrücken:

$$2.\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}\left({}^{1}D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}+++{}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}\right)$$

$$={}^{2}D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+({}^{3}D+{}^{1}D)\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}+({}^{4}D+{}^{2}D)\,\mathrm{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m}+$$

$$++++({}^{(m-1)}D+{}^{(m-3)}D)\mathrm{Sin}\frac{(m-2)\lambda\pi}{m}$$

$$+{}^{(m-2)}D\,.\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}+{}^{(m-1)}D\,.\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi,$$

und wenn man hievon das Product

$$2.\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\left({}^{1}D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}+++{}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}\right)$$

subtrahirt, so wird

$$2\left(\mathrm{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}-\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right)\left({}^{1}D\,\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+{}^{2}D\,\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}++{}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}\right)$$

$$=\left({}^{2}D-2\,{}^{1}D\,\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right)\mathrm{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}+\left({}^{3}D-2\,{}^{2}D\,\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}+{}^{1}D\right)\mathrm{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m}$$

$$+\left({}^{4}D-2\,{}^{3}D\,\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}+{}^{2}D\right)\mathrm{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m}++++$$

$$+\left(-2\,.\,{}^{(m-1)}D.\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{m}+{}^{(m-2)}D\right)\mathrm{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m}+{}^{(m-1)}D\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi$$

$$=\frac{L.\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi}{2^{m-2}}.$$

Hier kann man alle Coefficienten = o setzen, folglich

$$^{2}D - 2\,^{1}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} = 0,$$

$$^{3}D - 2\,^{2}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} + {}^{1}D = 0,$$

$$^{4}D - 2\,^{3}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} + {}^{2}D = 0,$$

u. s. w.

endlich $2 . {}^{(m-1)}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} - {}^{(m-2)}D = 0,$

$$^{(m-1)}D = \frac{L}{2^{m-2}}.$$

Hieraus findet man also, da $^{m}D = 0$,

$$^{(m-1)}D = \frac{L}{2^{m-2}},$$

$$^{(m-2)}D = \frac{L . \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m}}{2^{m-3}},$$

$$^{(m-3)}D = 2 . {}^{(m-2)}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} - {}^{(m-1)}D,$$

u. s. w.

oder allgemein

$$^{(m-n)}D = 2\,^{(m-n+1)}D \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} - {}^{(m-n+2)}D.$$

Man kann also wieder schliefsen, dafs, wenn $a$, $b$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2z \text{ Cos } \frac{\mu\pi}{m} + 1 = 0$$

bedeuten,

$$^{(m-n)}D = A . a^n + B . b^n \text{ sey.}$$

Die beständigen Gröfsen $A$, $B$ werden dadurch bestimmt, dafs $^{m}D = A + B = 0$ und

$$^{(m-1)}D = Aa + Bb = \frac{L}{2^{m-2}}$$

ist, und folglich

$$A = -B = \frac{L}{2^{m-2} . (a-b)},$$

$$^{(m-n)}D = \frac{L}{2^{m-2}} . \frac{(a^n - b^n)}{(a-b)}.$$

Es wird aber hier $a = \text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}$,

$$b = \text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m} - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m},$$

und daher auf ähnliche Weise, wie §. 523.,

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{\text{Sin}\,\frac{n\mu\pi}{m}}{\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}}, \text{ folglich}$$

$$^{(m-n)}D = \frac{L}{2^{m-2}} . \frac{\text{Sin}\left(\frac{n\mu\pi}{m}\right)}{\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}},$$

oder, wenn man $m - n = s$ setzt,

$$^{s}D = \frac{L}{2^{m-2}} . \frac{\text{Sin}\,\frac{(m-s)\,\mu\pi}{m}}{\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}} = \pm \frac{L}{2^{m-2}} . \frac{\text{Sin}\,\frac{s\mu\pi}{m}}{\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}},$$

weil Sin $\mu\pi = 0$ ist, da $\mu$ eine ganze Zahl, und $\pi$ den halben Umfang des Kreises bedeutet, und es gilt hier das Zeichen $+$, wenn $\mu$ ungerade ist, aber das negative Zeichen, wenn $\mu$ gerade ist. Hiemit sind also die Coefficienten $D$ bestimmt, und wir können nun zu dem für $^{\mu}y$ gefundenen Werthe zurückkehren.

III. Diese Gleichung für $^{\mu}y$ war, wenn wir jetzt in dem nach dem Gleichheitszeichen stehenden Theile für $D$ seine Werthe setzen:

$$ {}^{\mu}y \,.\, \Big[ {}^{1}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m} + {}^{2}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{2\mu\pi}{m} + {}^{3}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{3\mu\pi}{m} + + $$

$$ + + {}^{(m-1)}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\mu\pi}{m} \Big] = \pm \frac{L}{2^{m-2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}} \Big[ {}^{1}S \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m} $$

$$ + {}^{2}S \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{2\mu\pi}{m} + {}^{3}S \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{3\mu\pi}{m} + + + + {}^{(m-1)}S \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\mu\pi}{m} \Big], $$

und es gilt hier für den zweiten Theil der Gleichung das positive Zeichen, wenn $\mu$ ungerade, das negative Zeichen, wenn $\mu$ gerade ist. Der vor dem Gleichheitszeichen stehende Coefficient der Gröſse ${}^{\mu}y$ ist den Bedingungsgleichungen ganz ähnlich, welche wir zur Bestimmung der Gröſsen $D$ anwandten, und da dort

$$ {}^{1}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\lambda\pi}{m} + {}^{2}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{2\lambda\pi}{m} + + + {}^{(m-1)}D \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{(m-1)\lambda\pi}{m} $$

$$ = \frac{L \,.\, \mathrm{Sin}\,\lambda\pi}{2^{m-1}\Big[\mathrm{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}\Big]}, $$

war, so wird die in ${}^{\mu}y$ multiplicirte Reihe, wenn man hier $\lambda = \mu$ setzt,

$$ = \frac{L \,.\, \mathrm{Sin}\,\mu\pi}{2^{m-1}\Big[\mathrm{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m} - \mathrm{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}\Big]} = \frac{L \,.\, 0}{2^{m-1} \,.\, 0}, $$

und erhält also keinen bestimmten Werth.

Man kann aber auch hier den wahren Werth dieser $= \frac{0}{0}$ werdenden Gröſse nach der bekannten Methode bestimmen, wenn man $\lambda$ als eine veränderliche Gröſse betrachtet, und die Differentiale des Zählers $d \,.\, \mathrm{Sin}\,\lambda\pi$, und des Nenners $d \,.\, \Big[\mathrm{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \mathrm{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}\Big]$ jedes für sich sucht, und es wird

$$\frac{\operatorname{Sin}\mu\pi}{\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{m}-\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{m}}=\frac{d.\operatorname{Sin}\lambda\pi}{d.\left[\operatorname{Cos}\frac{\lambda\pi}{m}-\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right]}$$

$$=\frac{m\operatorname{Cos}\lambda\pi}{-\operatorname{Sin}\frac{\lambda\pi}{m}}=\frac{\pm m}{-\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}},$$

weil $\operatorname{Cos}\lambda\pi$ oder $\operatorname{Cos}\mu\pi=\pm 1$ ist, und zwar positiv, wenn $\mu$ eine gerade Zahl, negativ, wenn $\mu$ ungerade ist. Es wird daher

$$^{1}D.\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}+{}^{2}D\operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}+{}^{3}D\operatorname{Sin}\frac{3\mu\pi}{m}++$$

$$+{}^{(m-1)}D.\operatorname{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}=\pm\frac{Lm}{2^{m-1}.\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}},$$

und zwar gilt das obere Zeichen, wenn $\mu$ ungerade, das untere, wenn $\mu$ gerade ist. Die Gleichung für $y$ geht also jetzt in folgende über:

$$\pm{}^{\mu}y.\frac{Lm}{2^{m-1}.\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}}=\pm\frac{L}{2^{m-2}.\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}}\left[{}^{1}S\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}\right.$$

$$\left.+{}^{2}S.\operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}+{}^{3}S.\operatorname{Sin}\frac{3\mu\pi}{m}+++{}^{(m-1)}S.\operatorname{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}\right],$$

oder, da die Ambiguität der Zeichen wegfällt,

$$^{\mu}y=\frac{2}{m}\left[{}^{1}S.\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}+{}^{2}S.\operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}++\right.$$

$$\left.+{}^{(m-1)}S.\operatorname{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}\right].$$

Da man hier für $\mu$ alle ganze Zahlen von 1 bis $m-1$ setzen kann, so sind durch diese Gleichung alle gesuchte Gröſsen völlig bestimmt.

530. Setzt man in dieser Gleichung für $^{\mu}y$, statt $^{1}S$, $^{2}S$ . . . . die in §. 525. angegebenen Werthe, so ist

$$
\begin{aligned}
{}^{\mu}y = & \frac{2}{m} \cdot {}^{1}P . \operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m} \operatorname{Cos}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2m}\right] \\
& + \frac{2}{m}\, {}^{2}P . \operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{m} \operatorname{Cos}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{\pi}{m}\right] \\
& + \frac{2}{m}\, {}^{3}P . \operatorname{Sin}\frac{3\mu\pi}{m} . \operatorname{Cos}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{3\pi}{2m}\right] + + \\
& + + \frac{2}{m} . {}^{(m-1)}P . \operatorname{Sin}\frac{(m-1) . \mu\pi}{m} . \operatorname{Cos}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{(m-1)\pi}{2m}\right] \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}} \frac{{}^{1}Q . \operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{m}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2m}} \operatorname{Sin}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2m}\right] \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}} . \frac{{}^{2}Q . \operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{m} . \operatorname{Sin}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{2m}\right]}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{m}} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}} . \frac{{}^{3}Q \operatorname{Sin}\frac{3\mu\pi}{m} . \operatorname{Sin}\left[2t\sqrt{c} . \operatorname{Sin}\frac{3\pi}{2m}\right]}{\operatorname{Sin}\frac{3\pi}{2m}} + + \\
& + + \frac{1}{m\sqrt{c}} . \frac{{}^{(m-1)}Q \operatorname{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m} . \operatorname{Sin}\left[2t\sqrt{c} \operatorname{Sin}\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]}{\operatorname{Sin}\frac{(m-1)\pi}{2m}}
\end{aligned}
$$

und ${}^{1}P$, ${}^{2}P$ . . . . ${}^{1}Q$, ${}^{2}Q$ . . . . sind Gröſsen, welche aus dem anfänglichen Zustande bestimmt werden.

531. Aus dieser Formel für $y$ läſst sich auch $u$, das ist: die Geschwindigkeit jedes Punktes am Ende der Zeit $t$ bestimmen, denn da

$$ {}^{\mu}u = \frac{d . {}^{\mu}y}{dt} $$

ist, so wird

$$
{}^{\mu}u = -\frac{4\sqrt{c}}{m}\text{Sin}\frac{\pi}{2m}.{}^{1}P.\text{Sin}\frac{\mu\pi}{m}\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\pi}{2m}\right]
$$

$$
-\frac{4\sqrt{c}}{m}.{}^{2}P.\text{Sin}\frac{2\pi}{2m}.\text{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}.\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{2\pi}{2m}\right] - - -
$$

$$
-\frac{4\sqrt{c}}{m}.{}^{(m-1)}P.\text{Si}\frac{(m-1)\pi}{2m}.\text{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}.\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}\text{Sin}\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]
$$

$$
+\frac{2}{m}.{}^{1}Q.\text{Sin}\frac{\mu\pi}{m}.\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\pi}{2m}\right]
$$

$$
+\frac{2}{m}{}^{2}Q\,\text{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}.\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{2\pi}{2m}\right] + + +
$$

$$
+ + \frac{2}{m}{}^{(m-1)}Q.\text{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{(m-1)\pi}{2m}\right].
$$

Vermittelst dieser Gleichungen ist sowohl der Ort bestimmt, wohin jeder Körper am Ende der Zeit $t$ gelangt ist, als auch die Geschwindigkeit, mit welcher er hier sich zu bewegen fortfährt.

532. Beide Ausdrücke lassen sich auch so darstellen:

$$
{}^{\mu}y = \frac{2}{m}.{}^{\nu}P.\text{Sin}\frac{\nu\mu\pi}{m}.\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}\right]
$$

$$
+\frac{1}{m\sqrt{c}}.\frac{{}^{\nu}Q.\text{Sin}\frac{\nu\mu\pi}{m}.\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}\right]}{\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}}
$$

und

$$
{}^{\mu}u = -\frac{4\sqrt{c}}{m}.{}^{\nu}P.\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}.\text{Sin}\frac{\nu\mu\pi}{m}\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}\right]
$$

$$
+\frac{2}{m}{}^{\nu}Q.\text{Sin}\frac{\nu\mu\pi}{m}\text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\text{Sin}\frac{\nu\pi}{2m}\right],
$$

wo man für $\nu$ nach und nach alle ganze Zahlen von 1 bis $m-1$ setzen muſs, während $\mu$ denselben Werth behält.

533. In der Auflösung dieses Problems scheint das Verfahren, dessen wir uns bedienten, um den Quotienten (in III.), dessen Zähler und Nenner beide $= 0$ wurden,

zu bestimmen, beim ersten Anblicke hier nicht ganz passend; denn da λ in dieser ganzen Untersuchung blos ganze Zahlen bedeutet, so könnte man denken, es sey nicht erlaubt, λ als eine Gröfse zu betrachten, deren Aenderungen unendlich klein sind. Man wird indefs zugestehen, dafs die Werthe, welche

$$\frac{\text{Sin}\,\lambda\pi}{\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}}$$

erhält, wenn man für λ ganze Zahlen setzt, dadurch nicht geändert werden, wenn man auch die dazwischen fallenden Werthe sucht; wenn man aber

$$\frac{\text{Sin}\,\lambda\pi}{\text{Cos}\,\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\,\frac{\mu\pi}{m}} = \eta$$

setzt, und $\eta$ als Ordinate einer Curve betrachtet, welche der Abscisse λ zugehört, so erhält diese Curve eine Gestalt, wie *ABCD* (Fig. 108.), wenn man als Beispiel $m = 3$, $\mu = 2$ nimmt, und obgleich in unsrer Rechnung nur diejenigen Ordinaten vorkommen, welche den Abscissen $\lambda = AB = 1$ oder $\lambda = AE = 2$ zugehören, so ist es doch gewifs, dafs *CE* auch hier keinen andern Werth erhalten kann, als welchen man findet, wenn man alle dazwischen fallenden Körper mit berechnet, und λ alle möglichen Werthe beilegt, welche zwischen 0 und 3 fallen.

534. Die bisherigen Untersuchungen würden nun zwar hinreichen, um die Bewegungen der auf der Linie *BC* (Fig. 107.) befindlichen Körper, wenn ihre Anzahl nicht allzugrofs ist, zu bestimmen, vorausgesetzt, dafs diese Körper sich nur unendlich wenig von den Stellen entfernen, in welchen sie sich beim Gleichgewichte befanden. Aber, wenn man sich statt der Körperchen, welche sich einander abstofsen, eine linearische Luftmasse denken will, so ist es nothwendig, die Anzahl dieser Körper unendlich zu setzen, und ihre Abstände von einander, und die Masse

eines jeden, als unendlich klein anzusehen, und dieser Fall verdient daher eine besondere Betrachtung.

535. Problem 113. Die Anzahl der bewegten Körper, welche sich nach den in den vorigen Problemen betrachteten Regeln bewegen, ist unendlich, aber ihre Abstände von einander und die Masse jedes einzelnen sind unendlich klein, so daſs die ganze Länge des Raums, auf welchem diese Körper gleichförmig vertheilt sind, endlich ist, und auch die Masse aller zusammengenommen eine endliche Gröſse ist, man soll die allgemeinen Formeln auf diesen Fall anwenden.

Auflösung. Wir nannten §. 520. 522. die Entfernung zweier Körper von einander $= r$, und $m$ die Anzahl der Zwischenräume zwischen den beiden äuſsersten als unbeweglich angenommenen Körpern, daher ist die ganze Entfernung der beiden äuſsersten Körper, welche bisher mit o und $m$ bezeichnet wurden, von einander $= rm$, und diese soll eine endliche Gröſse seyn, welche ich $= a$ setze. Die Masse jedes Körpers hieſs vorhin $= M$, und da die Masse eines jeden gleich groſs ist, so ist die gesammte Masse aller $= m \,.\, M$, welche ich $= S$ nenne. Substituirt man diese Werthe in (§. 523.) $c = \frac{2gp}{Mr}$, so wird $c = \frac{m^2 . 2gp}{aS}$, und $\frac{\sqrt{c}}{m} = \sqrt{\frac{2gp}{aS}}$ ist eine endliche Gröſse, sie sey $= H$, also $\sqrt{c} = mH$.

Richten wir nun die Betrachtung auf einen dieser Körper, welcher, wie vorhin, der $\mu$te, genannt wird, so ist dessen Entfernung von dem mit o bezeichneten

$$= r \,.\, \mu = \frac{a}{m} \,.\, \mu,$$

sie sey $= x$, so ist $\frac{x}{a} = \frac{\mu}{m}$, und wenn man die Entfer-

nung des $(\mu+1)$ten mit $x+dx$ bezeichnet, so ist nun $r=dx$, und auch $m\,dx=a$, oder $m=\frac{a}{dx}$.

Diese Werthe müſste man nun in die Gleichungen §. 530. 531. setzen. Aber man darf, wenn $m$ unendlich ist, die Gröſsen $\text{Sin}\,\frac{\pi}{2m}=\frac{\pi}{2m}$,

$$\text{Sin}\,\frac{2\pi}{2m}=\frac{2\pi}{2m},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

setzen, wovon ich den Beweis, um hier die Untersuchung nicht zu unterbrechen, im folgenden §. geben will. Vermöge dieser Veränderung erhalten die Gleichungen des vorigen Problems, oder in §. 530. 531. folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mu}y = {} & \frac{2}{m}.\,{}^{1}P.\,\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}.\,\text{Cos}\,\frac{\pi t\sqrt{c}}{m} \\
& + \frac{2}{m}.\,{}^{2}P.\,\text{Sin}\,\frac{2m\pi}{m}.\,\text{Cos}\,\frac{2\pi.\,t\sqrt{c}}{m} + + + \\
& + \frac{2}{m}.\,{}^{(m-1)}P.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\mu\pi}{m}.\,\text{Cos}\,\frac{(m-1)\pi t\sqrt{c}}{m} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}}.\,\frac{{}^{1}Q.\,\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}}{\frac{\pi}{2m}}.\,\text{Sin}\,\frac{\pi t\sqrt{c}}{m} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}}.\,\frac{{}^{2}Q\,\text{Sin}\,\frac{2\mu\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\,\text{Sin}\,\frac{2\pi t\sqrt{c}}{m} + + + \\
& + \frac{1}{m\sqrt{c}}.\,\frac{{}^{(m-1)}Q.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\mu\pi}{m}.\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\pi t\sqrt{c}}{m}}{\frac{(m-1)\pi}{2m}},
\end{aligned}
$$

und ${}^{\mu}u$ wird auf ähnliche Weise ausgedrückt. Da aber hier $\frac{1}{m} = \frac{dx}{a}$, $\frac{\mu}{m} = \frac{x}{a}$, $\frac{\sqrt{c}}{m} = H$ ist, und $\sqrt{c} = \frac{aH}{dx}$, so lassen sich diese Gleichungen nun auch folgendermaſsen ausdrücken, wenn jetzt allgemein $y$ die Ausweichung desjenigen Körpers bedeutet, dessen Lage während des Gleichgewichts durch die Entfernung $= x$ bestimmt ist, und $u$ die Geschwindigkeit desselben — beides für das Ende der Zeit $= t$.

$$
\begin{aligned}
y = {} & \frac{2dx}{a} \cdot {}^{1}P \,.\, \text{Sin} \frac{\pi x}{a} \text{ Cos } Ht\pi \\
& + \frac{2dx}{a} \cdot {}^{2}P \,.\, \text{Sin} \frac{2\pi x}{a} \,.\, \text{Cos } 2Ht\pi \\
& + \frac{2dx}{a} \cdot {}^{3}P \,.\, \text{Sin} \frac{3\pi x}{a} \,.\, \text{Cos } 3Ht\pi \\
& + + + \text{ in infinitum} \\
& + \frac{2dx}{aH\pi} \cdot {}^{1}Q \text{ Sin} \frac{\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } Ht\pi \\
& + \frac{2dx}{2aH\pi} \cdot {}^{2}Q \text{ Sin} \frac{2\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } 2Ht\pi \\
& + \frac{2dx}{3aH\pi} \cdot {}^{3}Q \,.\, \text{Sin} \frac{3\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } 3Ht\pi \\
& + + + \text{ in infinitum}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
u = {} & - \frac{2H\pi dx}{a} \cdot {}^{1}P \text{ Sin} \frac{\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } \pi Ht \\
& - \frac{4H\pi dx}{a} \cdot {}^{2}P \,.\, \text{Sin} \frac{2\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } 2\pi Ht \\
& - \frac{6H\pi dx}{a} \cdot {}^{3}P \,.\, \text{Sin} \frac{3\pi x}{a} \,.\, \text{Sin } 3\pi Ht \\
& - - - - \text{ in infinitum}
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{2dx}{a} {}^{1}Q . \text{Sin} \frac{\pi x}{a} . \text{Cos}\, \pi H t$$

$$+ \frac{2dx}{a} . {}^{2}Q . \text{Sin} \frac{2\pi x}{a} . \text{Cos}\, 2\pi H t$$

$$+ \frac{2dx}{a} . {}^{3}Q . \text{Sin} \frac{3\pi x}{a} . \text{Cos}\, 3\pi H t$$

$$+ + + \text{ in infinitum.}$$

Um aber jetzt diese Reihe ganz durch bestimmte Gröſsen auszudrücken und zu summiren, muſs man für $P$, $Q$ ihre Werthe setzen, welche durch den anfänglichen Zustand gegeben sind. Diese Gröſsen sind (§. 524.) selbst die Summen unendlicher Reihen, und jede von ihnen hängt von dem anfänglichen Zustande aller Körper ab. Man könnte die Werthe dieser Gröſsen so darstellen:

$${}^{\nu}P = {}^{\lambda}Y . \text{ Sin } \frac{\lambda \nu \pi}{m}$$

$$\text{und } {}^{\nu}Q = {}^{\lambda}V . \text{ Sin } \frac{\lambda \nu \pi}{m},$$

und müſste, um den vollständigen Werth derselben zu erhalten, $\lambda$ alle verschiedene Werthe von o bis $m$ beilegen, während $\nu$ einerlei Werth behielte. Der Buchstab $\lambda$ bezieht sich hier auf irgend einen bestimmten unter den bewegten Körpern; bezeichnet man die Entfernung desselben von dem ersten unbeweglich festgehaltenen mit $= X$, so ist $X = \lambda r$, und da $a = mr$, so kann man $\frac{\lambda}{m} = \frac{X}{a}$ setzen. Gebraucht man nun auch hier die allgemeine Bezeichnung, daſs $Y$ die anfängliche Verrückung desjenigen Körpers ist, dessen Lage für den Zustand des Gleichgewichts durch $X$ angegeben wird, und $V$ die anfängliche Geschwindigkeit desselben, so ist ${}^{1}P$ die Summe aller Werthe, welche das Product $Y . \text{Sin} \frac{X\pi}{a}$ erhält, wenn man darin nach und nach für $X$ alle Werthe setzt, welche gröſser als o und kleiner als $a$ sind, und zu jedem den zugehörigen Werth von $Y$

nimmt. Diese aus unendlich vielen Gliedern bestehende Summe will ich durch das Zeichen Σ andeuten, und

$$^{1}P = \Sigma \,.\, Y \,.\, \text{Sin}\, \frac{\pi X}{a},$$

$$^{2}P = \Sigma \,.\, Y \,.\, \text{Sin}\, \frac{2\pi X}{a},$$

und auf ähnliche Weise

$$^{1}Q = \Sigma \,.\, V\, \text{Sin}\, \frac{\pi X}{a},$$

$$^{2}Q = \Sigma \,.\, V \,.\, \text{Sin}\, \frac{2\pi X}{a}$$

u. s. w. ausdrücken. Ich wähle dieses Zeichen, um der Verwechslung, da man das Integralzeichen $\int$ in der Folge auf $dx$ beziehen möchte, vorzubeugen. Die vorigen Gleichungen sind nunmehr diese:

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{a} . \Sigma [Y dx . (&\text{Sin}\frac{\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{\pi x}{a} . \text{Cos}\, \pi H t \\ &+ \text{Sin}\frac{2\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{2\pi x}{a} . \text{Cos}\, 2\pi H t \\ &+ \text{Sin}\frac{3\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{3\pi x}{a} . \text{Cos}\, 3\pi H t \\ &+ + + \text{in infin.})] \\ + \frac{2}{\pi a H} . \Sigma . [V dx (&\text{Sin}\frac{\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{\pi x}{a} . \text{Sin}\, \pi H t \\ &+ \tfrac{1}{2}\, \text{Sin}\frac{2\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{2\pi x}{a} . \text{Sin}\, 2\pi H t \\ &+ \tfrac{1}{3}\, \text{Sin}\frac{3\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{3\pi x}{a} . \text{Sin}\, 3\pi H t \\ &+ + + \text{in infin.})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } u = -\frac{2 H \pi}{a} . \Sigma . [Y dx . (&\text{Sin}\frac{\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{\pi x}{a} . \text{Sin}\, \pi H t \\ &+ 2\, \text{Sin}\frac{2\pi X}{a} . \text{Sin}\frac{2\pi x}{a} . \text{Sin}\, 2\pi H t \\ &+ 3 . \text{Sin}\frac{3\pi X}{a}\, \text{Sin}\frac{3\pi x}{a} . \text{Sin}\, 3\pi H t \\ &+ + + \text{in infin.})] \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{a}.\Sigma.[Vdx.(\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a}.\,\text{Sin}\,\frac{\pi x}{a}.\,\text{Cos}\,2\pi Ht$$

$$+\,\text{Sin}\,\frac{2\pi X}{a}.\,\text{Sin}\,\frac{2\pi x}{a}.\,\text{Cos}\,2\pi Ht$$

$$+\,\text{Sin}\,\frac{3\pi X}{a}.\,\text{Sin}\,\frac{3\pi x}{a}.\,\text{Cos}\,3\pi Ht$$

$$+ + + \text{ in infin.})],$$

und es bezieht sich in diesen Ausdrücken das Zeichen Σ blos auf die Summirung der in den Formeln

$$Y.\,\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a},\quad V.\,\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a}\ \text{u. s. w.}$$

enthaltenen Reihen. Diese Summirung wird also so vorgenommen, dafs man $X$ als veränderlich, aber $x$ als beständig betrachtet, und den Werth der Reihen, die man allgemein durch $\Sigma.Y.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi X}{a}$ und $\Sigma V.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi X}{a}$ ausdrücken kann, von $X = o$ bis $X = a$ sucht.

Die weitere Auflösung dieser Reihen will ich im folgenden Probleme an einem beschränkteren Falle zeigen.

556. Ehe ich weiter gehe, mufs ich die Richtigkeit des im vorigen Probleme angenommenen Satzes, dafs man die Ausdrücke $\text{Sin}\,\frac{\pi}{2m}$, $\text{Sin}\,\frac{2\pi}{2m}$, $\text{Sin}\,\frac{3\pi}{2m}$ etc. mit $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3}{2}.\frac{\pi}{m}$ etc. verwechseln dürfe, wenn $m$ unendlich ist, beweisen.

Diese Gröfsen kommen alle von der Gleichung am Ende des 523. §. her, wo nach dem Gleichheitszeichen

$${}^{\nu}P\ \text{Cos}\left[2t\sqrt{c}.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}\right] + \frac{{}^{\nu}Q.\,\text{Sin}\left[2t\sqrt{c}\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}\right]}{2\sqrt{c}.\,\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}}$$

vorkam, und hier entspringt der Factor $\text{Sin}\,\frac{\nu\pi}{2m}$ aus dem kurz vorher für $R$ gefundenen Werthe. Um also die im letzten Probleme angenommene Verwechselung zu rechtfertigen,

braucht nur bewiesen zu werden, daſs, wenn $m = \infty$ ist,

$R = \pm 2 . \sqrt{c} . \sqrt{-1} . \frac{\nu\pi}{2m}$ werde.

In §. 523. war $R^2 = c . (K - 2)$, also, wenn ich jetzt $c = m^2 H^2$ setze, $\frac{R^2}{m^2 H^2} = K - 2$, und dieses ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, weil $R$ und $H$ endliche Gröſsen sind, aber $m$ unendlich groſs ist. Es sey nun $\frac{R}{H} = f . \sqrt{-1}$, so wird $K = 2 - \frac{f^2}{m^2}$; es sollte aber, wie wir dort fanden,

$$[\tfrac{1}{2} K + \sqrt{(\tfrac{1}{4} K^2 - 1)}]^m - [\tfrac{1}{2} K - \sqrt{(\tfrac{1}{4} K^2 - 1)}]^m = 0$$

seyn, folglich nach den eben angenommenen Bezeichnungen

$$\left\{1 - \frac{f^2}{2m^2} + \sqrt{\left[-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right]}\right\}^m$$
$$= \left\{1 - \frac{f^2}{2m^2} - \sqrt{\left[-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right]}\right\}^m,$$

oder, wenn man die Wurzelgröſsen in Reihen auflöst, und Glieder, welche $m^2$ im Nenner enthalten, wegläſst:

$$\left[1 + \frac{f . \sqrt{-1}}{m}\right]^m - \left[1 - \frac{f\sqrt{-1}}{m}\right]^m = 0.$$

Betrachtet man hier $\frac{f}{m}$ als einen Kreisbogen, so ist, weil $f$ endlich, $m$ aber unendlich groſs ist, $\text{Sin} \frac{f}{m} = \frac{f}{m}$ und $\text{Cos} \frac{f}{m} = 1$, und, weil allgemein für jeden Bogen $\varphi$,

$$2 . \sqrt{-1} . \text{Sin}\, m\varphi = (\text{Cos}\, \varphi + \sqrt{-1} . \text{Sin}\, \varphi)^m$$
$$- (\text{Cos}\, \varphi - \sqrt{-1} . \text{Sin}\, \varphi)^m$$

ist, so ist auch für den unendlich kleinen Bogen $\frac{f}{m}$

$$\left[1 + \frac{f\sqrt{-1}}{m}\right]^m - \left[1 - \frac{f\sqrt{-1}}{m}\right]^m = 2\sqrt{-1} . \text{Sin} \frac{mf}{m},$$

und da dieses $= 0$ seyn soll, $\text{Sin}\, f = 0$ und $f = \nu\pi$, wo $\nu$ jede ganze Zahl bedeuten kann, mithin

$$R = Hf . \sqrt{-1} = H\nu\pi . \sqrt{-1},$$

welches mit demjenigen Ausdrucke einerlei ist, dessen Richtigkeit bewiesen werden sollte. Wendet man diesen Werth von $R$ im 523. §. und nachher an, so ergeben sich die Formeln so, wie sie im letzten Probleme gefunden sind.

537. Bei der Bestimmung der Werthe von $y$ und $v$, im vorigen Probleme, mufste $x$ und $t$ als beständig betrachtet werden, weil man eines bestimmten Theilchens Fortrückung und Geschwindigkeit am Ende einer bestimmten Zeit zu wissen verlangt, aber $X$, $Y$, $V$ mufsten als veränderlich angesehen werden, weil die Bewegung jenes Theilchens von dem anfänglichen Zustande aller übrigen mit abhängt, und daher $X$, $Y$, $V$ nach und nach auf alle Theilchen müssen bezogen werden, während $x$ sich immer auf eins und dasselbe bezieht.

538. Um die Ausdrücke zu vereinfachen, will ich annehmen, dafs in dem Werthe von $y$ die Gröfse $V = 0$ sey für jeden Werth von $X$, das heifst, dafs die anfängliche Störung des Gleichgewichts blos in einer Verrückung der Körper aus der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage bestand, dafs aber keinem derselben eine anfängliche Geschwindigkeit mitgetheilt worden. Diesen beschränktern Fall, welcher, wenn von einer Luftmasse die Rede ist, mit der Voraussetzung übereinkommt, dafs blos eine anfängliche Aenderung der Dichtigkeit, aber keine anfängliche Geschwindigkeit Statt fand, werde ich im folgenden Probleme näher betrachten.

539. Durch diese Voraussetzung wird der Werth von $y$ auf eine einzige unendliche Reihe gebracht, und da diese die Form erhält:

$$\text{Sin}\,\frac{\mu\pi}{m}\,.\,\text{Sin}\,\frac{\lambda\pi}{m} + \text{Sin}\,\frac{2\mu\pi}{m}\,.\,\text{Sin}\,\frac{2\lambda\pi}{m}$$

$$+ \text{Sin}\,\frac{3\mu\pi}{m}\,.\,\text{Sin}\,\frac{3\lambda\pi}{m} + + + \text{Sin}\,\frac{(m-1)\,\mu\pi}{m}\,\text{Sin}\,\frac{(m-1)\,\lambda\pi}{m},$$

so will ich über die Summirung dieser Reihe hier einige Bemerkungen voranschicken.

In §. 529. II. kamen wir bei Bestimmung der Coefficienten $D$ auf die Gleichung

$$ {}^1D.\text{Sin}\frac{\lambda\pi}{m} + {}^2D\,\text{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m} + {}^3D\,\text{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m} + + $$

$$ + + {}^{(m-1)}D\,\text{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m} = \frac{L.\text{Sin}\,\lambda\pi}{2^{m-1}\left\{\text{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\frac{\mu\pi}{m}\right\}}, $$

und die folgende Untersuchung zeigte, daſs diese Gleichung identisch werde, wenn man jene Coefficienten so annähme, daſs der $s$te oder

$$ {}^sD = \pm\frac{L}{2^{m-2}}.\frac{\text{Sin}\frac{s\mu\pi}{m}}{\text{Sin}\frac{\mu\pi}{m}} $$

werde. Setzt man also diese Werthe in jene Gleichung, so erhellet, daſs

$$ \text{Sin}\frac{\mu\pi}{m}.\text{Sin}\frac{\lambda\pi}{m} + \text{Sin}\frac{2\mu\pi}{m}\text{Sin}\frac{2\lambda\pi}{m} + \text{Sin}\frac{3\mu\pi}{m}\text{Sin}\frac{3\lambda\pi}{m} + $$

$$ +++\text{Sin}\frac{(m-1)\mu\pi}{m}.\text{Sin}\frac{(m-1)\lambda\pi}{m} = \pm\tfrac{1}{2}\frac{\text{Sin}\frac{\mu\pi}{m}.\,\text{Sin}\,\lambda\pi}{\text{Cos}\frac{\lambda\pi}{m} - \text{Cos}\frac{\mu\pi}{m}} $$

eine identische Gleichung ist, und daſs man das nach dem Gleichheitszeichen stehende Glied mit vollem Rechte als Summe der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Reihe betrachten dürfe. Diese Summirung gilt, was auch $\mu$, $\lambda$, $m$ für ganze Zahlen bedeuten mögen, und zwar muſs man im letzten Gliede das Zeichen + gebrauchen, wenn $\mu$ ungerade ist, und das Zeichen —, wenn $\mu$ gerade ist: diese Summe bleibt mithin anwendbar, auch wenn jene Zahlen unendlich werden.

540. Problem 114. Die für den Raum $= y$, um welchen irgend ein Theilchen am Ende der Zeit $= t$ von der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage entfernt ist,

gefundenen Formeln völlig aufzulösen, in dem Falle, da die anfängliche Störung des Gleichgewichts blos in einer Verrückung der Theilchen bestand, und die anfänglichen Geschwindigkeiten $= 0$ waren.

Auflösung. Da hier alle Voraussetzungen und Bezeichnungen des vorigen Problems gelten, und zugleich $V = 0$ ist, so können wir den dort gefundenen Werth von $y$ hier unverändert, blos mit Weglassung des letzten Gliedes, gebrauchen. Da aber

$$\text{Sin}\,\frac{\pi x}{a}\,\text{Cos}\,\pi Ht = \tfrac{1}{2}.\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a} - \pi Ht\right],$$

$$\text{Sin}\,\frac{2\pi x}{a}.\,\text{Cos}\,2\pi Ht = \tfrac{1}{2}.\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a} + 2\pi Ht\right] + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a} - 2\pi Ht\right]$$

u. s. w. ist, so läſst sich der Werth von $y$ nun auch so darstellen:

$$y = \frac{1}{a}.\,\Sigma.\,[Ydx\,(\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] + \text{Sin}\,\frac{2\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a} + 2\pi Ht\right] + \text{Sin}\,\frac{3\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{a} + 3\pi Ht\right] + + + \text{ in infinitum})]$$

$$+ \frac{1}{a}.\,\Sigma.\,[Ydx\,(\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a} - \pi Ht\right] + \text{Sin}\,\frac{2\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a} - 2\pi Ht\right] + \text{Sin}\,\frac{3\pi X}{a}.\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{a} - 3\pi Ht\right] + + + \text{ in infinitum})].$$

Die beiden Reihen, welche hier in $Ydx$ multiplicirt vorkommen, haben die im vorigen §. betrachtete Form,

wenn man statt des dortigen $\frac{\lambda}{m}$ hier $\frac{X}{a}$, und statt des dortigen $\frac{\mu}{m}$ hier $\frac{x}{a} \pm Ht$ setzt.

Diese Werthe, welche wir den Zahlen $\mu$, $\lambda$ beilegen, sind aber auch gewiſs ganze Zahlen (welches, um die dort gefundene Summe anzuwenden, nothwendig ist), denn $\frac{mX}{a}$ bedeutet hier noch eben das, wie im vorigen Probleme, und ward dort statt der ganzen Zahl $\lambda$ substituirt; auch $\frac{mx}{a}$, welches dort für die vorhin gebrauchte ganze Zahl $\mu$ gesetzt ward, hat hier denselben Werth, und $mHt$ kann man, ohne die Untersuchung zu beschränken, allemal einer ganzen Zahl gleich annehmen. Da also $\frac{Xm}{a}$ und $\frac{xm}{a} \pm mHt$ ganze Zahlen sind, so ist, was auch $m$ für eine Zahl sey, die Summe der Reihe

$$\text{Sin}\frac{\pi X}{a} . \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] + \text{Sin}\frac{2\pi X}{a}\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a} + 2\pi Ht\right]$$

$$+ \text{Sin}\frac{3\pi X}{a}\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{a} + 3\pi Ht\right] +++$$

$$+ \text{Sin}\frac{(m-1)\pi X}{a} . \text{Sin}\,(m-1)\pi . \left[\frac{x}{a} + Ht\right]$$

$$= \pm \tfrac{1}{2} . \frac{\text{Sin}\frac{\pi X}{a} . \text{Sin}\left\{m\pi . \left[\frac{x}{a} + Ht\right]\right\}}{\text{Cos}\left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] - \text{Cos}\frac{\pi X}{a}},$$

und folglich, da für die zweite Reihe ähnliche Schlüsse gelten,

$$2ay = \pm \Sigma . \frac{Ydx . \text{Sin} \frac{\pi X}{a} \text{Sin} \left[\frac{m\pi x}{a} + m\pi Ht\right]}{\text{Cos} \left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] - \text{Cos} \frac{\pi X}{a}}$$

$$\pm \Sigma \frac{Ydx . \text{Sin} \frac{\pi X}{a} \text{Sin} \left[\frac{m\pi x}{a} - m\pi Ht\right]}{\text{Cos} \left[\frac{\pi x}{a} - \pi Ht\right] - \text{Cos} \frac{\pi X}{a}} .$$

Es ist aber schon erwähnt worden, daſs $\frac{mx}{a} \pm mHt$ hier allemal eine ganze Zahl werde, und folglich ist

$$\text{Sin} \left[\frac{m\pi x}{a} \pm m\pi Ht\right] = o;$$

da also für alle Glieder der unendlichen Reihe der Zähler $= o$ wird, so kann in dieser ganzen Reihe, auf deren Summe das Zeichen $\Sigma$ hinweist, nur dasjenige Glied einen reellen Werth erhalten, wo zugleich auch der Nenner $= o$ wird, alle übrigen Glieder hingegen verschwinden. Statt der unendlichen Reihen bleiben uns also von der ersten Reihe nur diejenigen Glieder, wo

$$\text{Cos} \left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] = \text{Cos} \frac{\pi X}{a},$$

$$\text{oder } \frac{x}{a} + Ht = 2.s \pm \frac{X}{a},$$

und von der zweiten nur diejenigen, wo

$$\text{Cos} \left[\frac{\pi x}{a} - \pi Ht\right] = \text{Cos} \frac{\pi X}{a},$$

$$\text{oder } \frac{x}{a} - Ht = 2.s \pm \frac{X}{a}$$

wird, und $s$ kann hier jede ganze Zahl bedeuten.

Diese Glieder enthalten o im Zähler und im Nenner, und man findet daher ihren wahren Werth, wenn man Zähler und Nenner, jeden für sich, differentiirt, und dabei

$\frac{x}{a} \pm Ht$ allein als veränderlich betrachtet, nach vollendeter Differentiation aber $2.s \pm \frac{X}{a}$ statt dieser Gröfse setzt. Auf diese Weise findet man, weil jetzt auch das Zeichen $\Sigma$ wegfällt, indem von der ganzen Reihe nur ein einziges Glied vorkommt,

$$\frac{1}{2a} \cdot \Sigma \cdot \frac{Ydx \cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi X}{a} \cdot \operatorname{Sin}\left[\frac{m\pi x}{a} + m\pi Ht\right]}{\operatorname{Cos}\left[\frac{\pi x}{a} + \pi Ht\right] - \operatorname{Cos}\frac{\pi X}{a}}$$

$$= - \frac{m}{2a} \cdot \frac{Ydx \cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi X}{a} \operatorname{Cos}\left[2ms\pi \pm \frac{m\pi X}{a}\right]}{\operatorname{Sin}\left[2\pi s \pm \frac{\pi X}{a}\right]},$$

folglich ist die erste Hälfte des Werthes von $y$

$$= \mp \frac{\frac{mdx}{2a} \cdot Y \cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi X}{a} \cdot \operatorname{Cos}\left[2ms\pi \pm \frac{m\pi X}{a}\right]}{\operatorname{Sin}\left[2\pi s \pm \frac{\pi X}{a}\right]},$$

und hier gilt (wie aus Vergleichung des vorigen §. erhellt) das obere Zeichen, wenn $\frac{mX}{a}$ eine ungerade Zahl ist, aber das positive Zeichen, wenn $\frac{mX}{a}$ eine gerade Zahl ist; und $Y$ bedeutet hier die anfängliche Verrückung desjenigen Theilchens, für dessen Lage im Gleichgewichte

$$X = \pm (x + aHt - 2as)$$

ist. — Da nun hier $sm$ sowohl, als $\frac{mX}{a}$ ganze Zahlen sind, so ist $\operatorname{Cos}\left[2ms\pi \pm \frac{m\pi X}{a}\right] = \pm 1$, und zwar gilt das Zeichen $+$, wenn $\frac{mX}{a}$ eine gerade Zahl ist, aber das ne-

gative Zeichen, wenn $\frac{mX}{a}$ ungerade ist, daher verschwindet die Ambiguität der Zeichen, und jene erste Hälfte des Werthes von $y$ wird allemal

$$= + \frac{\frac{m}{2a} \cdot Ydx \operatorname{Sin} \frac{\pi X}{a}}{\operatorname{Sin}\left(2\pi s \pm \frac{\pi X}{a}\right)},$$

$$\text{oder} = \pm \frac{m \cdot Ydx}{2a} = \pm \tfrac{1}{2} Y,$$

$$\text{weil } \operatorname{Sin}\left(2\pi s \pm \frac{\pi X}{a}\right) = \pm \operatorname{Sin} \frac{\pi X}{a} \text{ und } \frac{mdx}{a} = 1$$

ist. Und hier gilt das Zeichen +, wenn

$$X = x + aHt - 2as$$

positiv, aber das Zeichen —, wenn dieser Werth negativ ist.

Gehen wir jetzt zu dem zweiten Gliede des Werthes von $y$ fort, und bezeichnen mit $Y'$ die anfängliche Verrückung desjenigen Theilchens, dessen Lage während des Gleichgewichts durch die Entfernung

$$X = \pm (x - aHt - 2as)$$

bestimmt ward, so findet man auf eben dem Wege, daſs dieses zweite Glied $= \pm \frac{1}{2} Y'$ wird, und wieder das Zeichen + gilt, wenn $X$ positiv ist, und umgekehrt, daher der gesuchte Werth von $y$ ist $y = \pm \frac{1}{2}(Y + Y')$, wo $Y, Y$ die anfängliche Ausweichung derjenigen beiden Theilchen ist, welche um die Entfernung $= aHt + 2as$ und $aHt - 2as$ von demjenigen Punkte entfernt sind, auf welchen $y$ sich bezieht; $y$ aber ist die Ausweichung des durch $x$ bestimmten Theilchens am Ende der Zeit $= t$, und $s$ eine unbestimmte ganze Zahl.

541. Dieser Ausdruck für $y$ läſst sich auch auf folgende Weise verändern. Es sey über der Linie $BC$ (Fig. 109.), welche die Länge der betrachteten linearischen Luftmasse vorstellt, die Scale der anfänglichen Auswei-

chungen $BYC$ gezeichnet, nämlich so, dafs jede Ordinate $XY$ ausdrückt, wie weit dasjenige Theilchen, welches sich beim Gleichgewichte in $X$ befand, bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts von seiner Stelle verrückt war, so sind $Y$, $Y'$ Ordinaten dieser Scale. Man kann aber jede Ordinate $XY$ als Function der zugehörigen Abscisse ansehen, und $Y = F : X$ setzen, mithin, da im vorigen §. $Y$ mit der Abscisse $= \pm (x + aHt - 2as)$, und $Y'$ mit der Abscisse $= \pm (x - aHt - 2as)$ zusammengehörte, so hat man auch

$$y = \tfrac{1}{2}F : [\pm (x + aHt - 2as)] + \tfrac{1}{2}F : [\pm (x - aHt - 2as)].$$

Und da bei dieser ganzen Untersuchung nichts angenommen ist, wodurch der anfängliche Zustand einem gewissen Gesetze unterworfen würde, so kann die Scale $BYC$ jede Gestalt haben, und es ist gar nicht nothwendig, dafs dieselbe sich durch eine Gleichung ausdrücken lasse, sondern sie kann ganz irregulär seyn.

542. Vermittelst dieser Scale läfst sich nun der Werth von $y$ für jeden Werth von $x$ und $t$ durch Construction darstellen. Dieses läfst sich hier bewerkstelligen, ohne dafs man die Scale über die Endpunkte $B$, $C$ hinaus fortzusetzen braucht, wenn man nur für $s$ den gehörigen Werth, und dann das passende Zeichen nimmt.

Will man nämlich die Bewegung des in $x$ (Fig. 109.) befindlichen Lufttheilchens bestimmen, für welches im Zustande des Gleichgewichts $Bx = x$ war, so mufs man, da $a.H.t$ sich im Fortgange der Zeit ändert, die Abscisse $\pm (x \pm aHt - 2as)$ allemal so annehmen, dafs ihre Endpunkte in den Raum $BC$ fallen, zugleich aber sich erinnern, dafs da, wo das Zeichen $+$ gilt, oder die Abscisse $= + (x \pm aHt - 2as)$ ist, auch der Werth der Ordinate im Werthe von $y$ positiv genommen wird, aber dafs die Ordinate negativ zu nehmen ist, wenn die Abscisse

$$= - (x \pm aHt - 2as) \text{ ist.}$$

So lange $t$ so klein ist, daſs $aHt$ kleiner als $x$ und kleiner als $(a - x)$ ist, setze man $s = 0$, und gebe beiden Abscissen das Zeichen $+$, so ist

$$y = \tfrac{1}{2}F:(x + aHt) + \tfrac{1}{2}F:(x - aHt),$$

oder, wenn in der Figur $xX = xX' = aHt$, so ist

$$y = \tfrac{1}{2}(XY + X'Y').$$

Wächst nun $t$, so daſs $aHt > x$ ist, aber noch

$$aHt < (a - x),$$

so behalte man in $(x + aHt - 2as)$ noch $s = 0$, und das positive Zeichen; hingegen, da $x - aHt$ negativ wird, und jenseits $B$ keine Ordinaten mehr vorkommen, so behält man zwar $s = 0$, nimmt aber das negative Zeichen, und erhält

$$y = \tfrac{1}{2}F:(x + aHt) - \tfrac{1}{2}F:[-(x - aHt)].$$

Nimmt man also für einen solchen Werth von $t$ in der Figur $xX'' = aHt$ und $xX = aHt - x$, so wird

$$y = \tfrac{1}{2}(X''Y'' - XY).$$

Es sey $t$ noch gröſser, so daſs auch $aHt > (a - x)$, aber noch $aHt < (a + x)$, so wird $x + aHt > a$, setzt man aber $s = 1$, so wird $-(x + aHt - 2a)$, eine Abscisse, welcher Ordinaten zugehören.

Die Abscisse $-(x - aHt)$ ist, der Voraussetzung zufolge, noch $< a$, und also gehören auch ihr Ordinaten zu, daher ist hier $s = 0$, und man gebraucht das negative Zeichen. Hier wird

$$y = -\tfrac{1}{2}F:[-(x + aHt - 2a)] - \tfrac{1}{4}F:[-(x - aHt)].$$

Auf ähnliche Weise könnte man weiter fortgehen, und immer $y$ durch Summen oder Differenzen zweier Ordinaten ausdrücken.

543. Diese Regeln werden durch folgende Darstellung noch deutlicher. Wenn $x$ der Punkt ist, wo sich beim Gleichgewichte das Theilchen befand, dessen Bewegung bestimmt werden soll, so trage man, für das Ende der Zeit $t$, die Entfernung $= a.H.t$ nach beiden Seiten

von $x$ auf der Axe hin $= xX'$. Fallen die so bestimmten Punkte $X$, $X'$ noch diesseits $B$ und $C$, so ist die halbe Summe der Ordinaten $X'Y'$ und $XY = y$. Ist aber diese Entfernung gröſser als $xB$, so trage man den über $B$ hinausreichenden Theil von $B$ in $BX$ rückwärts, so daſs $xB + BX = aHt$ sey, und nehme im Werthe von $y$ jetzt die Ordinate $XY$ negativ. Wäre aber $aHt$ so groſs, daſs der von $B$ rückwärts getragne Theil sich bis über $C$ hinaus erstreckte, so kehre man mit diesem Ueberschusse von $C$ an zurück, und wenn nun der Endpunkt in $X$ fällt, also $aHt = xB + BC + CX$ ist, so nehme man im Werthe von $y$ die Ordinate $XY$ positiv. Hätte diese Abscisse sich abermals über $B$ hinaus erstreckt, so hätte man von $B$ wieder zurückkehren, und die Ordinate negativ nehmen müssen. — Eben das gilt für die nach der andern Seite von $x$ getragne Abscisse, und auch hier, wie dort, bleibt im Werthe von $y$ die Ordinate mit $+$ bezeichnet, so lange $aHt < xC$ ist; sie wird mit $-$ bezeichnet beim ersten Zurückgehen, oder wenn

$$aHt > xC \text{ aber } < xC + BC;$$

sie wird wieder mit $+$ bezeichnet, wenn

$$aHt > xC + CB \text{ aber } < xC + 2BC$$

und so weiter.

Diese Regeln kommen eben darauf hinaus, als wenn man die Scale über $B$ und $C$ hin fortsetzt, nach den Regeln, welche für die Scale der Dichtigkeiten bei einer an beiden Enden offenen cylindrischen Röhre oben (§. 407.) gelehret sind.

544. Obgleich man hieraus schon übersieht, daſs aus der anfänglichen Störung des Gleichgewichts in der Folge eine gewisse oscillirende Bewegung der Lufttheilchen entsteht, und aus der Aehnlichkeit der Ausdrücke mit den oben gefundenen (welche sich nämlich nur wegen der hier ganz verschiedenen Bezeichnungsart von einander unterscheiden) sich leicht schlieſsen läſst, daſs man auf ähnliche Resultate, wie dort, kommen muſs, so will ich doch noch das Hauptpro-

blem von der Fortpflanzung einer kleinen Schwingung in der Luft hier vollständig nach dieser Methode auflösen.

545. Problem 115. Es stelle $BC$ eine linearische Luftmasse vor, und es werde am Anfange der Zeit $t$ ein einziges Lufttheilchen in Schwingung gesetzt, man soll bestimmen, wie diese Schwingung sich im Fortgange der Zeit fortpflanzt.

Auflösung. Ich nehme an, daſs bei der anfänglichen Störung des Gleichgewichts alle Theilchen sich an der Stelle befanden, wo sie im Zustande des Gleichgewichts waren, aber daſs dem Theilchen $x$ (Fig. 110.) die Geschwindigkeit $V = s$ ertheilt ward. In den Formeln §. 535. werden also alle Werthe von $Y = 0$, und die Geschwindigkeit $V$ erhält nur bei einem einzigen Theilchen, dessen Lage durch die Abscisse $= X$ bestimmt wird, einen Werth $= s$, für alle übrigen ist auch $V = 0$.

Soll also vermittelst der dort für $u$ gefundenen Gleichung irgend eines andern Lufttheilchens $S$ Bewegung am Ende der Zeit $= t$ bestimmt werden, so setze ich $Bx = X$, $BS = x$, $BC = a$, und erhalte

$$u = \frac{2\,s\,dx}{a}\,(\text{Sin}\,\frac{\pi X}{a}\,.\,\text{Sin}\,\frac{x\,\pi}{a}\,.\,\text{Cos}\,\pi Ht$$

$$+ \text{Sin}\,\frac{2\pi X}{a}\,.\,\text{Sin}\,\frac{2\pi x}{a}\,.\,\text{Cos}\,2\pi Ht$$

$$+ \text{Sin}\,\frac{3\pi X}{a}\,.\,\text{Sin}\,\frac{3\pi x}{a}\,.\,\text{Cos}\,3\pi Ht$$

$$+ + + \text{ in infin.}).$$

Das Summirungszeichen kommt hier nicht vor, weil nur in einem einzigen Punkte $s$ einen von 0 verschiedenen Werth erhält. Diese Gleichung läſst sich auch so ausdrücken:

$$u = \frac{s}{m}\,(\text{Sin}\,\frac{x\,\pi}{a}\;\text{Sin}\left[\frac{\pi X}{a} + \pi Ht\right]$$

$$+ \text{Sin}\,\frac{2\pi x}{a}\,.\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi X}{a} + 2\pi Ht\right]$$

$$+ \text{Sin}\,\frac{3\pi x}{a}\,.\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi X}{a} + 3\pi Ht\right]$$

$$+ + + \text{ in infin.})$$

$$+ \frac{x}{m} (\text{Sin} \frac{x\pi}{a} . \text{Sin} \left[\frac{\pi X}{a} - \pi H t\right]$$

$$+ \text{Sin} \frac{2x\pi}{a} . \text{Sin} \left[\frac{2\pi X}{a} - 2\pi H t\right]$$

$$+ \text{Sin} \frac{3\pi x}{a} . \text{Sin} \left[\frac{3\pi X}{a} - 3\pi H t\right]$$

$$+ + + \text{ in infin.}).$$

Aber aus dem Vorigen ist bekannt, dafs diese beiden unendlichen Reihen verschwinden, wenn nicht entweder $\frac{X}{a} + Ht$, oder aber $\frac{X}{a} - Ht$, $= 2s \pm \frac{x}{a}$ ist. Vorhin, da für jedes $X$ im anfänglichen Zustande eine Störung des Gleichgewichts Statt fand, mufsten aus der ganzen Reihe der Werthe von $X$ diejenigen beiden genommen werden, welche diesen Gleichungen entsprachen; aber da jetzt $x$ nur für einen einzigen Werth von $X$ einen reellen Werth hat, so ist offenbar, dafs $u = o$ ist, wenn nicht die verflossene Zeit einen solchen Werth hat, dafs entweder

$$t = \frac{2s}{H} - \frac{X}{aH} \pm \frac{x}{aH},$$

$$\text{oder } t = \frac{2s}{H} + \frac{X}{aH} \mp \frac{x}{aH} \text{ ist.}$$

Folglich entsteht nur in denjenigen Augenblicken in $S$ eine Schwingung, da $aHt$ einen der folgenden Werthe hat,

$$aHt = x - X,$$
$$aHt = x + X,$$
$$aHt = 2a - X - x,$$
$$aHt = 2a + X - x,$$
$$aHt = 2a - X + x,$$

und so weiter. Hieraus läfst sich für jeden Punkt $S$ bestimmen, in welchem Augenblicke die Schwingung sich bis dahin fortgepflanzt hat.

546. Um diese Ausdrücke denjenigen ähnlich zu machen, welche wir oben fanden, will ich statt $H$ seinen

Werth setzen. In §. 535. ward $\sqrt{\frac{2gp}{aS}} = H$ gesetzt, also ist $aH = \sqrt{\frac{2g.ap}{S}}$, und hier bedeutet $g$ den Raum, welchen ein freifallender Körper an der Oberfläche der Erde in der ersten Secunde durchläuft, $a$ ist die Länge oder das Volumen der linearischen Luftmasse, $S$ die Masse derselben, also der Quotient $\frac{S}{a}$ ihre Dichtigkeit, welche ich $= b$ nennen will, endlich ist $p$ die elastische Kraft der Luft, oder der Druck, welchen sie ausübt; diese elastische Kraft $= p$, mit welcher die Luft der Compression widersteht, ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Höhe $= k$ ist, nennt man also die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 1$, so ist $p = k$, und daher $aH = \sqrt{\frac{2gk}{b}}$, wo nun $b : 1$ das Verhältniſs der Dichtigkeiten der Luft und des Queksilbers ist.

547. Die Schwingung, welche in $x$ (Fig. 110.) erregt worden, kommt also in $S$ an, wenn die Zeit

$$t = (x - X) \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{2gk}{b}}}$$

verflossen, oder $t = \frac{xS}{\sqrt{\frac{2gk}{b}}}$ ist, und alsdann wird in $S$ der erregte Schall gehört; aber auſser diesem ersten Schalle hört man, wenn die Luftmasse in $B$ und $C$ begränzt ist, noch eine mehrmalige Wiederholung des Schalles, und die Zeitpunkte, wo man diese Echo hört, sind auf folgende Weise bestimmt. Der Hauptschall kommt an, wenn

$$t\sqrt{\frac{2gk}{b}} = xS \text{ ist,}$$

die Echo, wenn $t\sqrt{\frac{2gk}{b}} = Bx + BS$,

$$\text{wenn } t\sqrt{\frac{2gk}{b}} = xC + SC,$$

$$\text{wenn } t\sqrt{\frac{2gk}{b}} = xB + BC + SC$$

u. s. w. ist, welches eben die Bestimmungen für die Zeit des Wiederhalles sind, die wir oben bei einer an beiden Enden offenen oder an beiden Enden verschlossenen Röhre fanden.

Wäre für den Punkt $S'$ die Entfernung vom Endpunkte $B$, $x < X$, so gäben die Formeln des Problems die Zeit, wann der Schall dort gehört wird,

$$= (X - x)\sqrt{\frac{b}{2gk}},$$

$$\text{oder} = (x + X)\sqrt{\frac{b}{2gk}} \text{ u. s. w.}$$

548. Wären die Endpunkte $B$, $C$ beide unendlich entfernt, so würde sowohl in $S$, als in $S'$ nur ein einfacher Schall gehört, und zwar in $S$, wenn $t = \frac{xS}{\sqrt{2gk}}\sqrt{b}$, und in $S'$, wenn $t = \frac{xS'}{\sqrt{\frac{2gk}{b}}}$ ist. Der Schall pflanzt sich also nach beiden Seiten mit gleicher Geschwindigkeit und gleichförmig fort, und durchläuft in einer Secunde den Raum $= \sqrt{\frac{2gk}{b}}$. Wiederholungen des Schalles werden in diesem Falle nicht gehört, denn die Zeit, nach welcher sie, der Formel zufolge, gehört werden sollten, ist unendlich, weil $x$, $X$ und $a$ unendlich sind, aber $x - X$ eine endliche Gröſse ist. Wäre die Luftmasse an einem Ende begränzt, z. B. in $B$, erstreckte sich aber nach $C$ hin ins Unendliche, so würde man ein einfaches Echo hören. Denn die Formel gibt an, daſs in $S$ eine Schwingung entsteht, sowohl wenn $t = \frac{xS}{\sqrt{\frac{2gk}{b}}}$ ist, als wenn

$$t = \frac{xS + 2Bx}{\sqrt{\frac{2gk}{b}}} = \frac{xB + BS}{\sqrt{\frac{2gk}{b}}}$$

ist. Mehrere Wiederholungen finden auch in diesem Falle nicht Statt. Aber bei einer an beiden Enden begränzten Luftmasse hört man unzählige Wiederholungen des Schalles, welche in Rücksicht der Zeit, da man sie hört, sich so verhalten, als ob der Schall in den Endpunkten $B$, $C$ zurückgeworfen würde.

549. Diese Resultate sind den oben gefundenen ganz ähnlich, und da die Schlüsse, welche uns hier darauf geleitet haben, gar nicht voraussetzen, dafs die anfängliche Störung des Gleichgewichts durch eine reguläre Scale, welche sich durch eine Gleichung ausdrücken liefse, dargestellt werden solle, so erhellet nun, dafs die oben angenommene Voraussetzung, dafs die Scalen für den anfänglichen Zustand dem Gesetze der Stetigkeit nicht nothwendig unterworfen sind, richtig ist, und dafs alle in den vorigen Abschnitten gefundene Resultate völlig gültig sind.

---

Leipzig,

gedruckt bey Carl August Solbrig.

# Verzeichnifs
## der vorzüglichsten Druckfehler.

---

Seite 19. Zeile 23. und folgende mufs statt $Mm$ und $Nn$ stehen $M, m$ und $N, n$.

— 38. — 12. lies $ak = s'$ statt $S'$.

— 77. — 22. lies $v$ statt $V$.

— 81. — 13. lies $\frac{u}{k}$ statt $\frac{n}{k}$.

— 88. — 15. mufs im Nenner $8h^5$ statt $h^5$ stehen.

— 138. — 11. lies — oder wir diesen.

— 144. — 3. lies wenn die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ es ist.

— 177. — 2. von unten, lies $- \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2)z^2$.

— 188. — 15. von oben, lies $- F:(x + z\sqrt{-1})$.

— 200. — 10. mufs nach $\varrho$ ein ; stehen.

— 215. — 2. von oben mufs es im Zähler $gm^2$ heifsen.

— 216. letzte Zeile lies selbst statt sehr.

— 236. Zeile 21. lies $z'$ statt $Z'$.

— 240. — 22. sind die Parenthesen unvollständig.

— 292. — 7. lies $(k - l + \lambda)$.

— 293. — 10. lies $t\sqrt{\frac{g}{2l}} =$ Ang. . . . .

— 294. — 17. lies für statt weil.

— 300. — 1. lies endlichen.

— 302. — 6 lies = statt —

— 336. letzte Zeile, lies $t = \frac{Av}{C}$.

— 354. — 4. lies $v = [-h + \sqrt{(hk + h\sqrt{(h^2 + k^2)})}]\sqrt{\frac{2g}{h}}$.

— 367. — 8. von unten, lies $\frac{1^{\circ}}{100}$ stztt $\frac{1^{\circ}}{180}$.

— 378. — 24. lies $(b + l \,\mathrm{Sin}\, \eta)$ statt $(b + l) \,\mathrm{Sin}\, \eta$.

— 386. — 12. lies $\frac{\sigma''}{\varrho + 1}$.

— 416. — 11. lies $- \frac{\alpha c \,\mathrm{Sin}\, \zeta}{4}$.

— 422. — 7. lies die nothwendige.

— 429. — 22. lies die Dichtigkeit kleiner, als die des umgebenden.

— 433. letzte Zeile, lies $2g\left(l + \frac{\alpha(\lambda^2 - 3\lambda - 2)c}{3}\right)$.

— 439. Zeile 8. lies $(1 + \mu)$ statt $(1 + m)$.

Seite 558. Zeile 8. lies $- a^2 c \,.\, T M$.

— 565. — 11. lies $\frac{2(b-a)}{b(a+b)}$.

— 565. — 20. lies $\varkappa = \frac{1}{2} c S (S^{IV} Y^{IV} + S''' Y''')$.

— 571. — 11. lies $+ \frac{1}{2} \Sigma (A S Y)$.

— 573. — 10. lies $+ \frac{1}{2} S Y$.

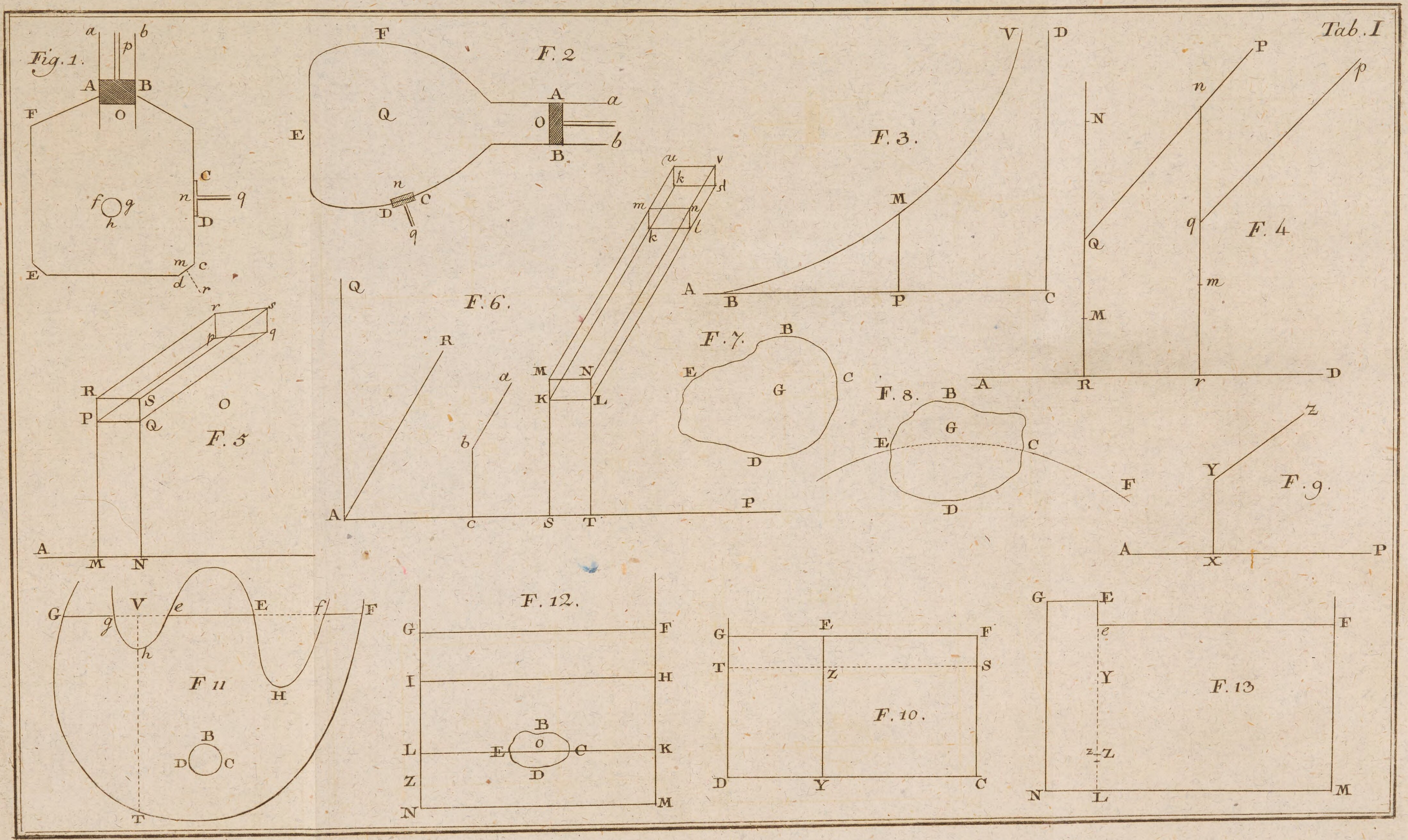
— 574. — 18. lies $\frac{c}{2 S^2} t m T M$.

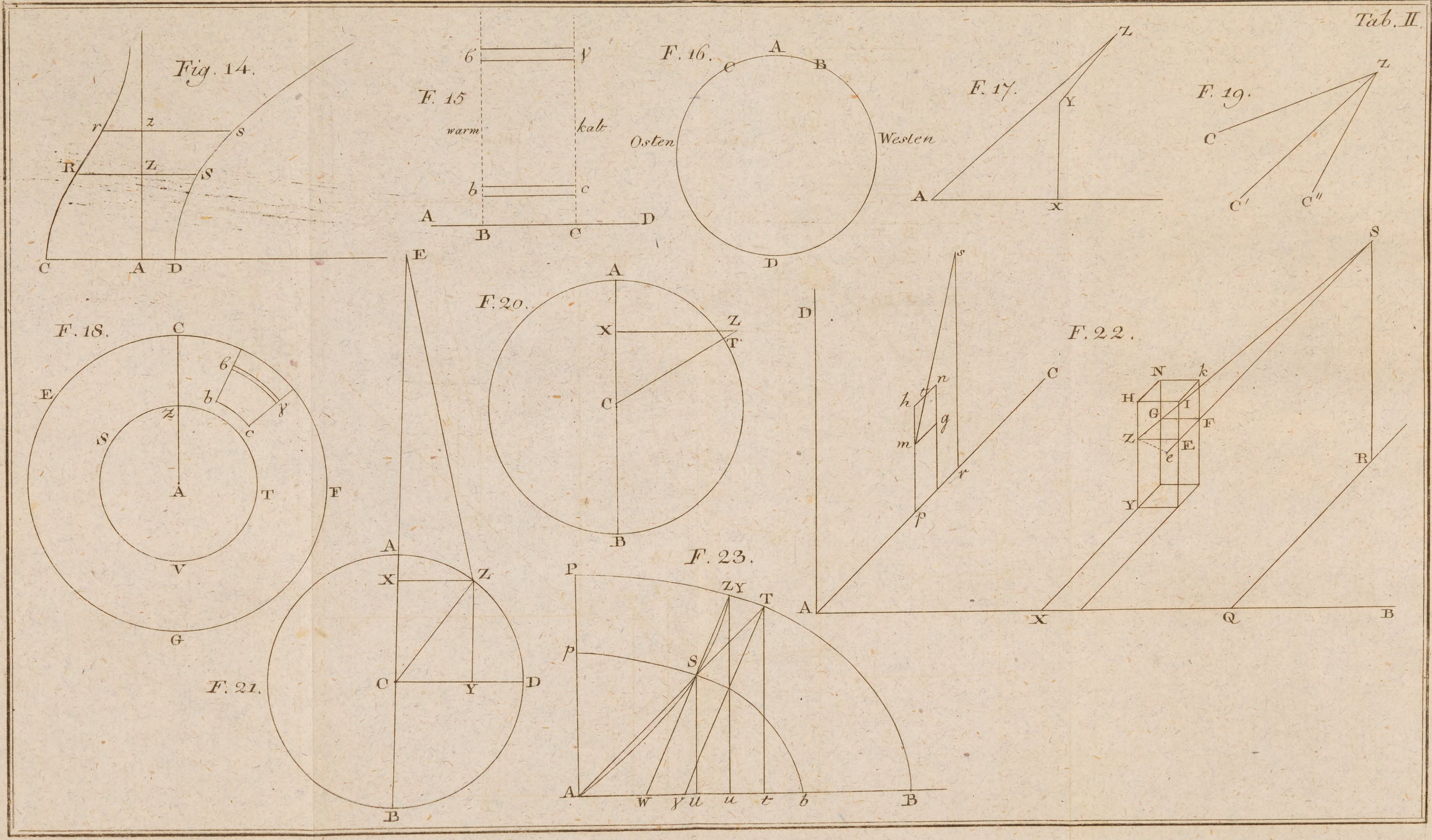
— 582. — 5. lies $\int (y - z) \, dx$.

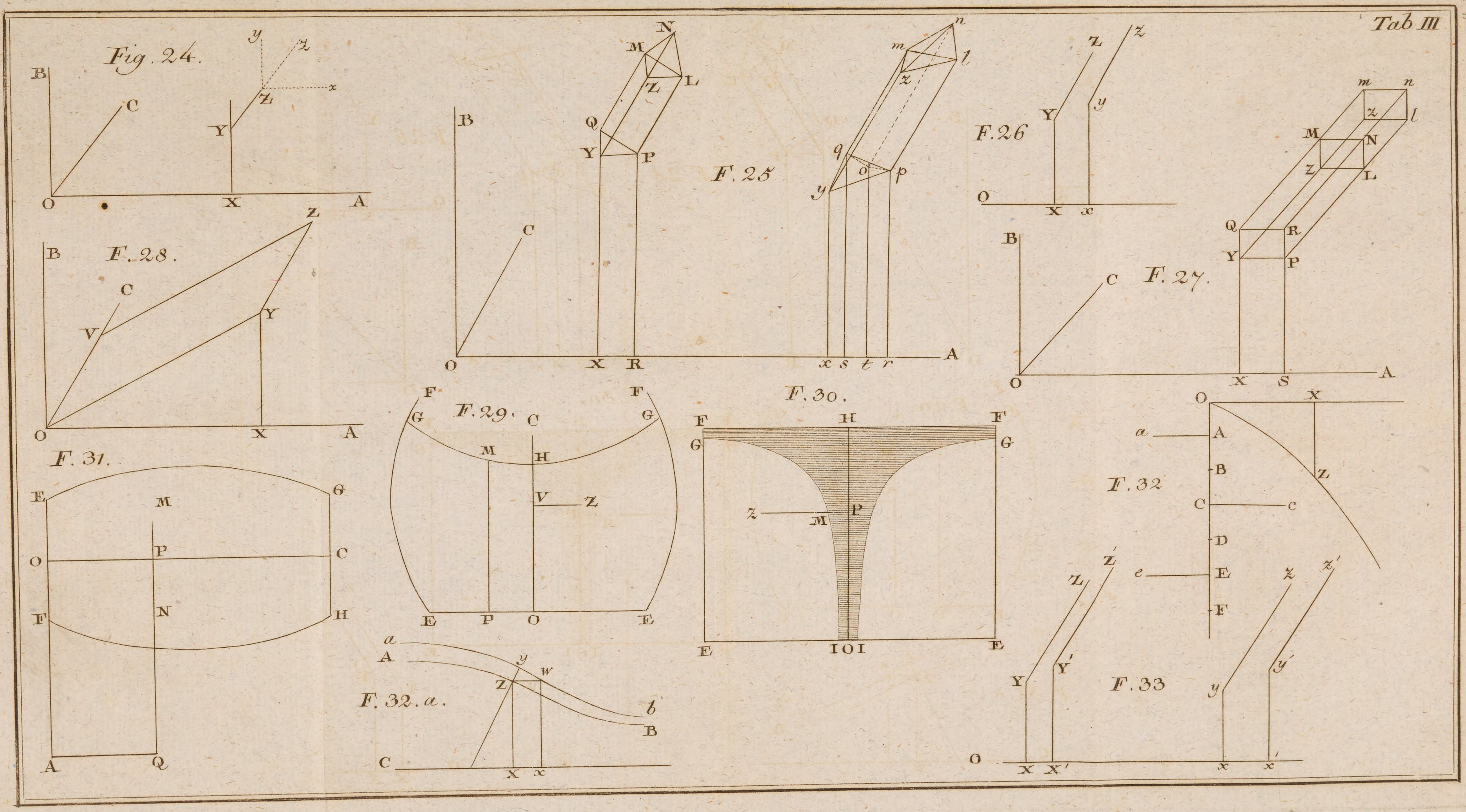
— 618. — 13. lies $\operatorname{Sin} \frac{2 \mu \pi}{m}$.

---

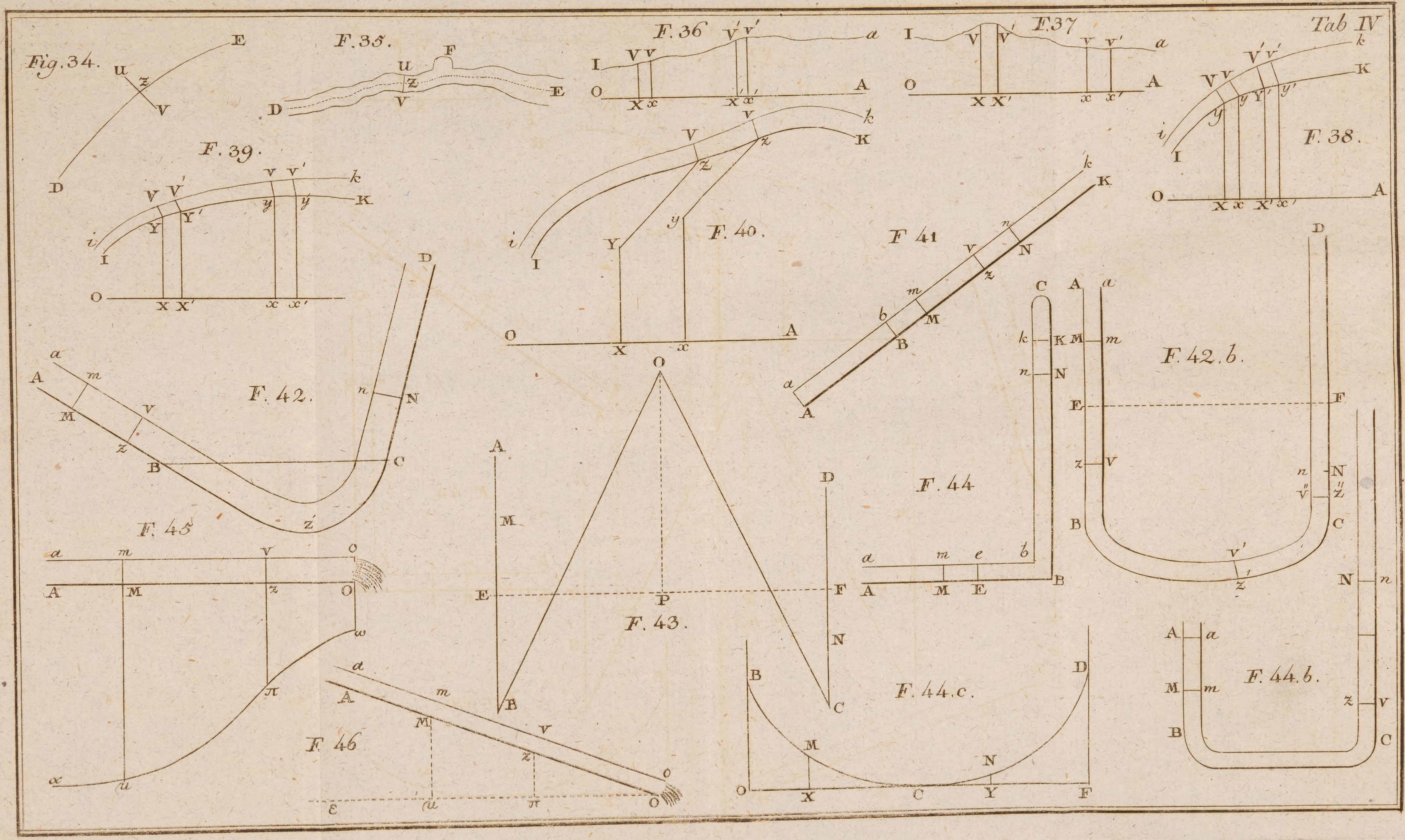
Bayerische
Staatsbibliothek
München


Tab. I
Fig. 1.
F. 2
F. 3.
F. 4
F. 5
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F 11
F. 12.
F. 13

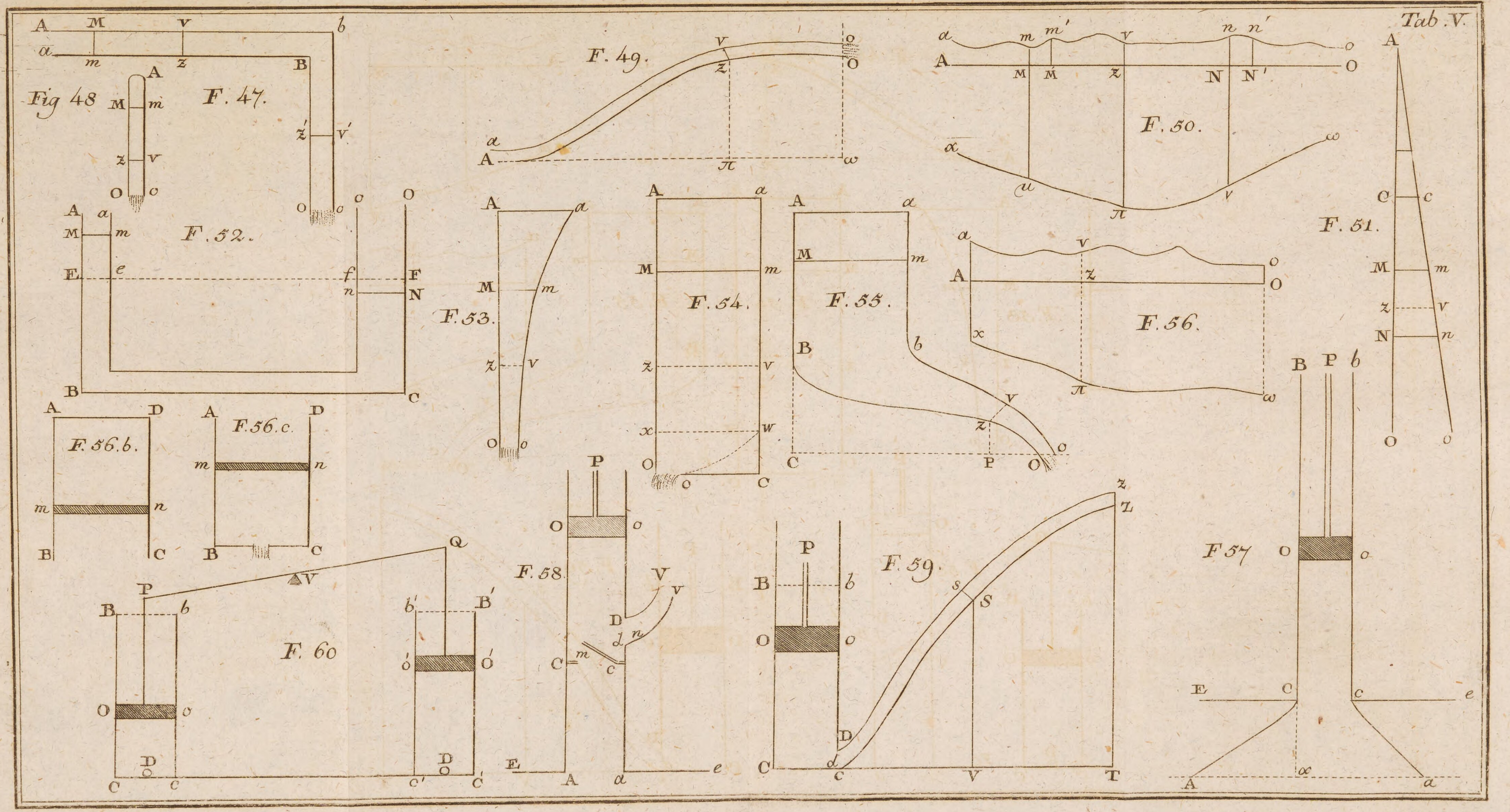

Tab. II.
Fig. 14.
r z s
R Z S
C A D
F. 15
6 y
warm kalt
b c
A B C D
F. 16.
A B C
Osten Westen
D
F. 17.
Z Y A X
F. 19.
Z C C′ C″
F. 18.
C E 6 b y z c S A T F V G
E
F. 20.
A X Z T C B
F. 21.
A X Z C Y D B
F. 22.
D s n h g m r p C S N k H I G F Z E e Y R A X Q B
F. 23.
P Z Y T p S A w y u u t b B

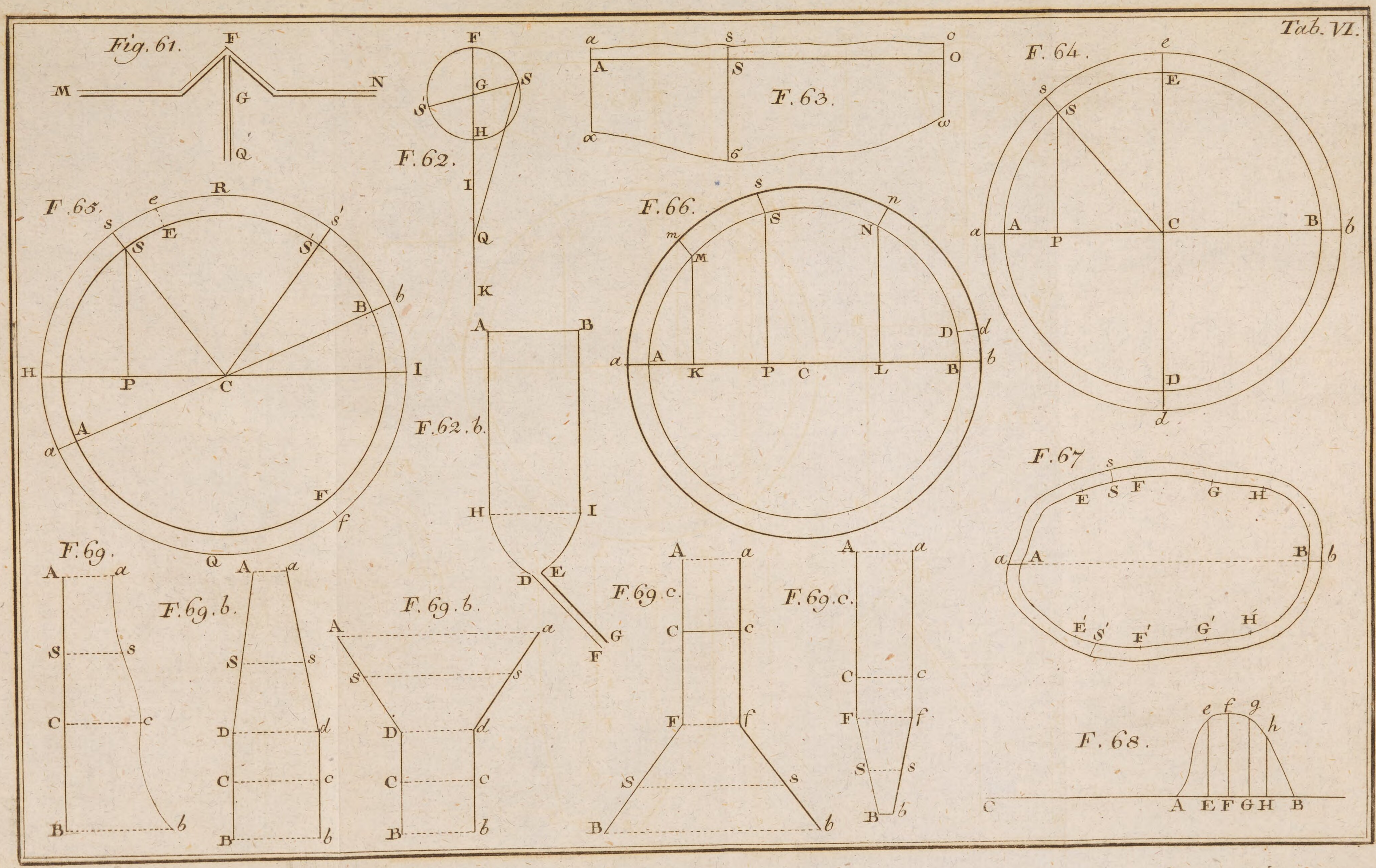


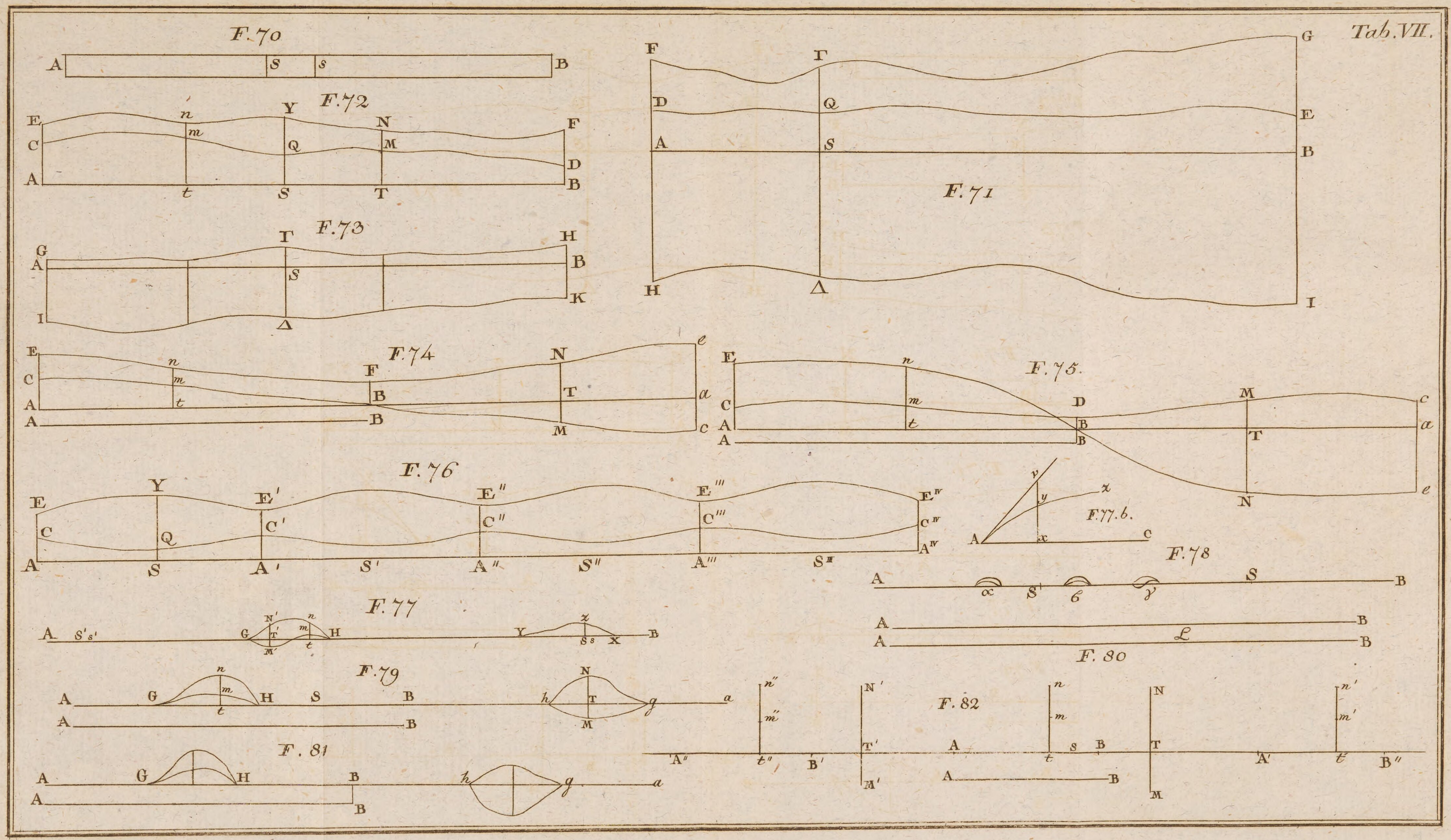
Tab III
Fig. 24.
F. 25
F. 26
F. 27.
F. 28.
F. 29.
F. 30.
F. 31.
F. 32
F. 32. a.
F. 33

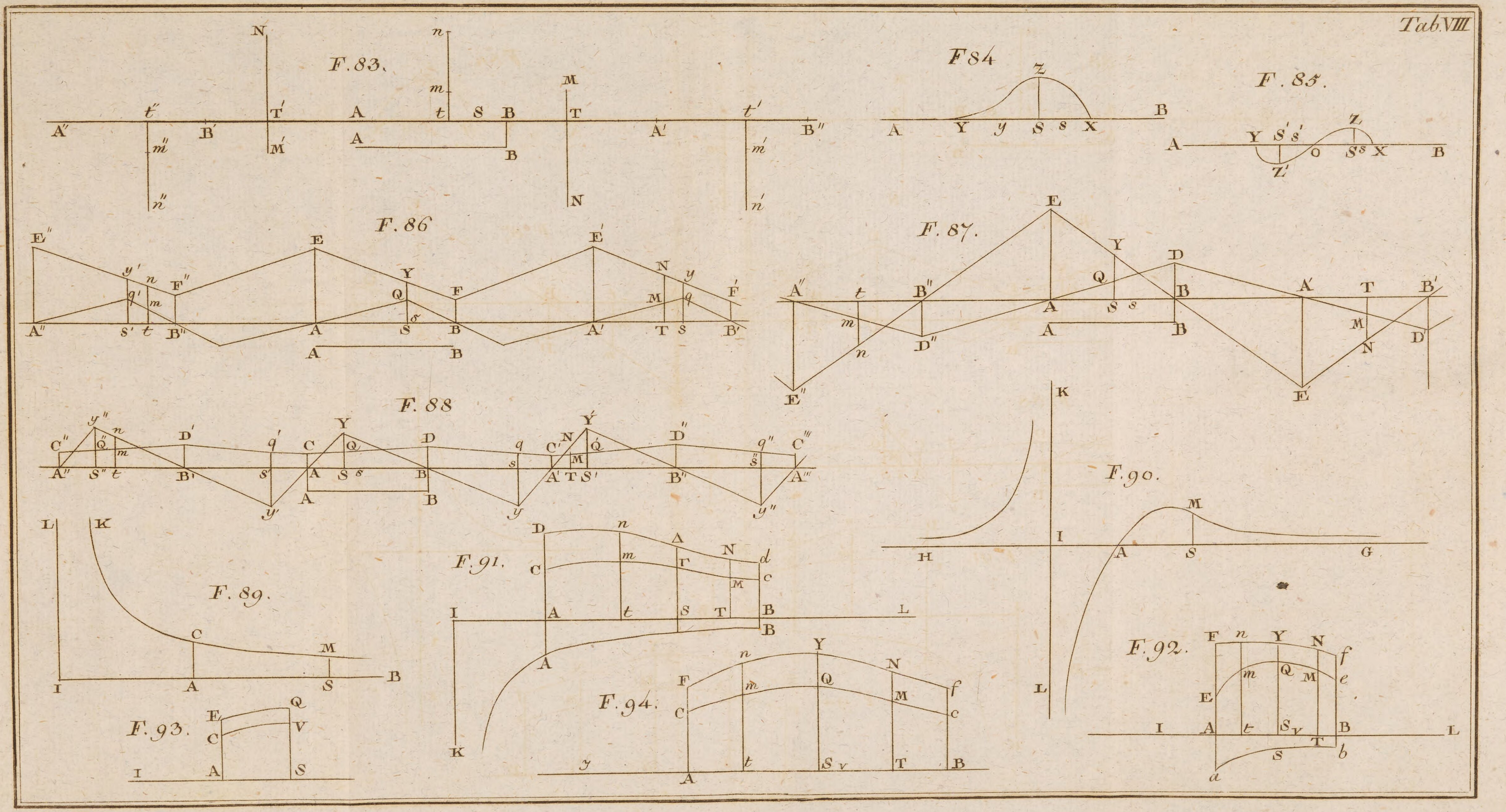

Tab IV
Fig. 34.
F. 35.
F. 36
F. 37
F. 38.
F. 39.
F. 40.
F. 41
F. 42.
F. 42. b.
F. 43.
F. 44
F. 44. b.
F. 44. c.
F. 45
F. 46

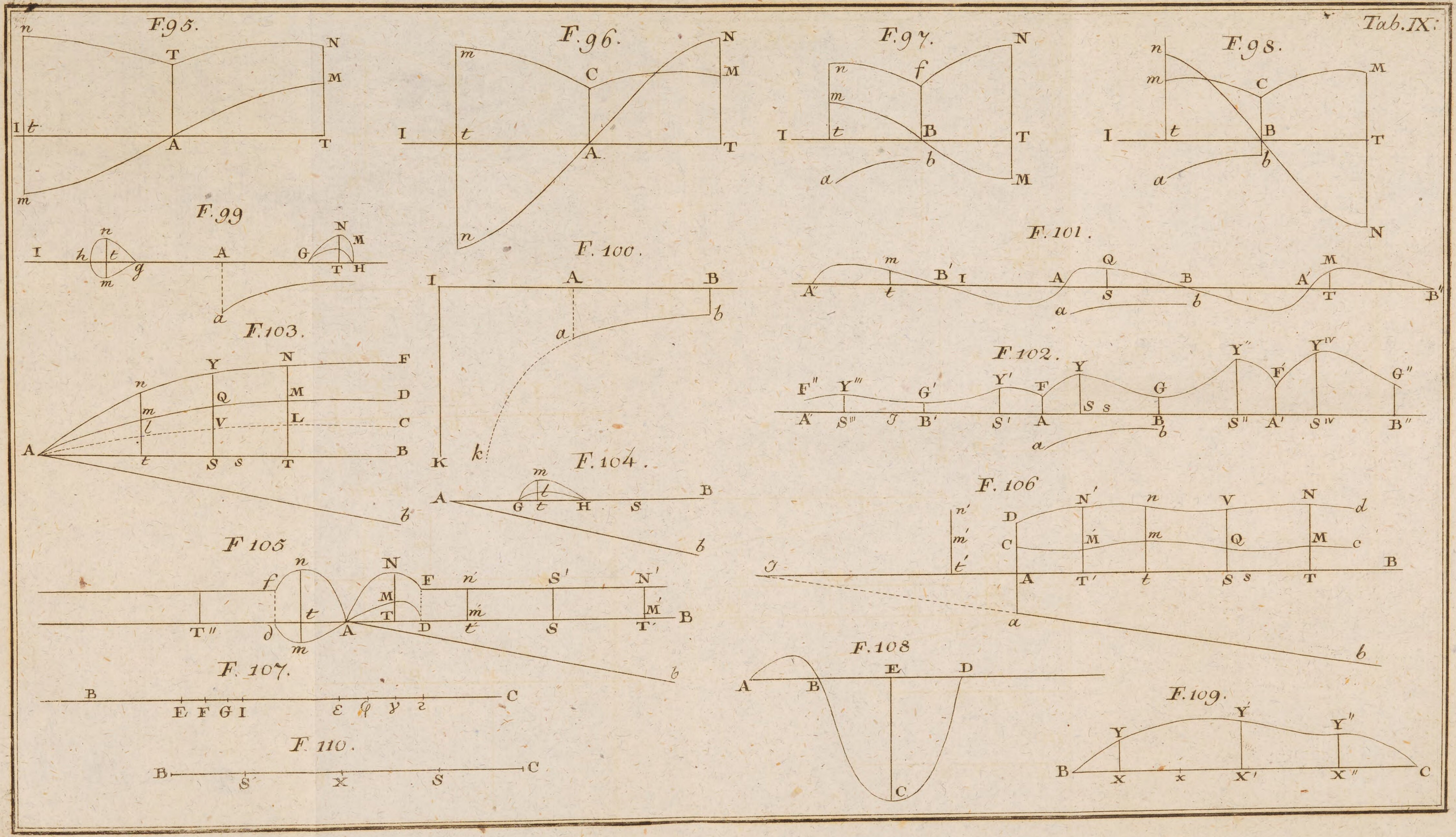
Tab. V.


Fig 48
F. 47.
F. 49.
F. 50.
F. 51.
F. 52.
F. 53.
F. 54.
F. 55.
F. 56.
F. 56.b.
F. 56.c.
F. 57
F. 58.
F. 59.
F. 60


Tab. VI.
Fig. 61.
F. 62.
F. 62. b.
F. 63.
F. 64.
F. 65.
F. 66.
F. 67
F. 68.
F. 69.
F. 69. b.
F. 69. b.
F. 69. c.
F. 69. c.


Tab. VII.
F. 70
F. 71
F. 72
F. 73
F. 74
F. 75.
F. 76
F. 77
F. 77. b.
F. 78
F. 79
F. 80
F. 81
F. 82


Tab.VIII
F. 83.
F 84
F. 85.
F. 86
F. 87.
F. 88
F. 89.
F. 90.
F. 91.
F. 92.
F. 93.
F. 94.


Tab. IX.
F.95.
F.96.
F.97.
F.98.
F.99
F.100.
F.101.
F.102.
F.103.
F.104.
F.105
F.106
F.107.
F.108
F.109.
F.110.

9.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard,

Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper

Leipzig 1806

A.hydr. 36
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059828-2